Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 21: Taylor-Entwicklung

Dr. Stefan Frei, 06.02.20

Taylorpolynome

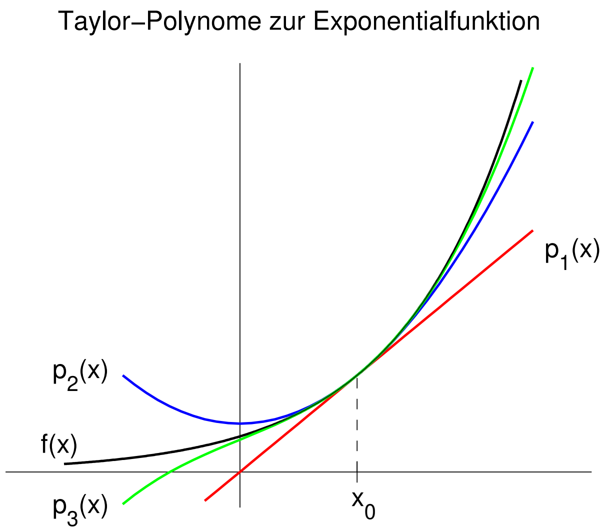
Ziel: Lokale Approximation von Funktionen durch Polynome

- Taylorpolynom 1. Ordnung um x_0
  (Tangente an x_0)

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Taylorpolynom 2. Ordnung um x_0

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$



Taylorpolynome

Ziel: Lokale Approximation von Funktionen durch Polynome

- Taylorpolynom 1. Ordnung um x_0
  (Tangente an x_0)

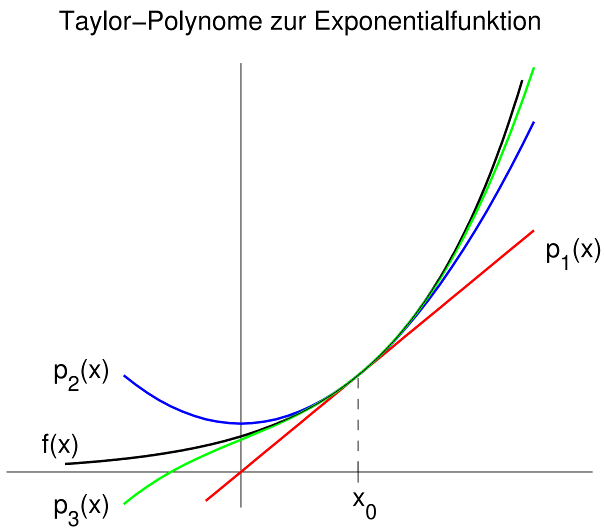
$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Taylorpolynom 2. Ordnung um x_0

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

- Taylorpolynom n-ter Ordnung um x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k}(x - x_0)^k$$



Taylorpolynome

Ziel: Lokale Approximation von Funktionen durch Polynome

- Taylorpolynom 1. Ordnung um x_0
  (Tangente an x_0)

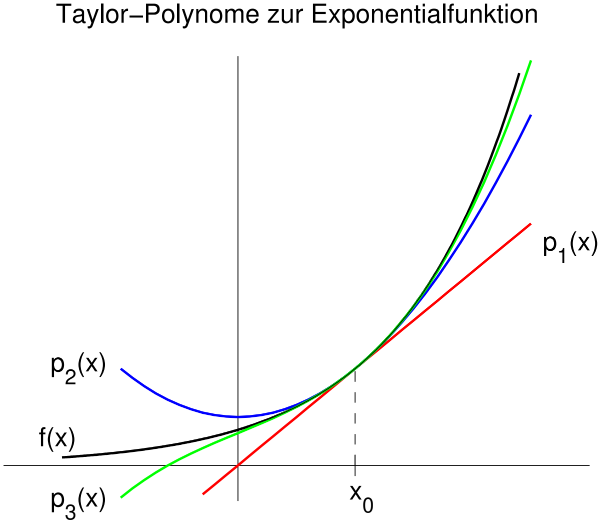
$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Taylorpolynom 2. Ordnung um x_0

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

- Taylorpolynom n-ter Ordnung um x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k}(x - x_0)^k$$



Anwendung: Ableitungen und Funktionswerte von f in x_0 bekannt, aber nicht für $x \neq x_0$

Taylorreihe

- Taylorpolynom n-ter Ordnung um x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k}(x - x_0)^k$$

- Konvergiert der Wert $p_n(x)$ für $n \to \infty$, dann können wir die (unendliche) Taylorreihe definieren

Taylorreihe

- Taylorpolynom n-ter Ordnung um x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k}(x - x_0)^k$$

- Konvergiert der Wert $p_n(x)$ für $n \to \infty$, dann können wir die (unendliche) Taylorreihe definieren

$$Tf_{x_0}(x) := \lim_{n\to\infty} p_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k}(x - x_0)^k$$

Taylorreihe

- Taylorpolynom n-ter Ordnung um x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k} (x - x_0)^k$$

- Konvergiert der Wert $p_n(x)$ für $n \to \infty$, dann können wir die (unendliche) Taylorreihe definieren

$$Tf_{x_0}(x) := \lim_{n \to \infty} p_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k} (x - x_0)^k$$

- In der Regel gilt bei Konvergenz (bis auf Spezialfälle)

$$Tf_{x_0}(x) = f(x)$$

d.h. die Taylorpolynome nähern sich f an und die (unendliche) Taylorreihe ist gleich f

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

-

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

- Bsp. 1: Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$: Es gilt

$$f^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$$

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

- Bsp. 1: Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$: Es gilt

$$f^{(k)}(0) = \exp(0) = 1 \qquad \Rightarrow Tf_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

- Bsp. 1: Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$: Es gilt

$$f^{(k)}(0) = \exp(0) = 1 \qquad \Rightarrow Tf_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Diese Taylorreihe haben wir zur Definition von exp verwendet! Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und stimmt mit $f(x) = \exp(x)$ überein

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

- Bsp. 2: Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

- Bsp. 2: Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$: Es gilt

$$f^{(k)}(1) = \exp(1) = e$$

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

- Bsp. 2: Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$: Es gilt

$$f^{(k)}(1) = \exp(1) = e \qquad \Rightarrow Tf_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k$$

Beispiel Taylorreihe

Sei $f(x) = \exp(x)$. Es gilt für alle Ableitungen $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0)$$

- Bsp. 2: Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$: Es gilt

$$f^{(k)}(1) = \exp(1) = e \qquad \Rightarrow Tf_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k$$

  Man kann zeigen, dass auch diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und mit $f(x)$ übereinstimmt.

Konvergenz der Taylorreihe

Allgemein gilt: Die Taylorreihe

$$Tf_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k}(x - x_0)^k$$

konvergiert für alle x, die genügend nahe an x_0 liegen

$$|x - x_0| < r$$

(für ein r) und divergiert für alle x, die weiter weg liegen

$$|x - x_0| > r.$$

Konvergenz der Taylorreihe

Allgemein gilt: Die Taylorreihe

$$Tf_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k}(x - x_0)^k$$

konvergiert für alle x, die genügend nahe an x_0 liegen

$$|x - x_0| < r$$

(für ein r) und divergiert für alle x, die weiter weg liegen

$$|x - x_0| > r.$$

r heißt Konvergenzradius und kann berechnet werden durch

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{f^{(k+1)}(x_0)} \right| = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{|f^{(k)}(x_0)|} \right)^{-1}$$

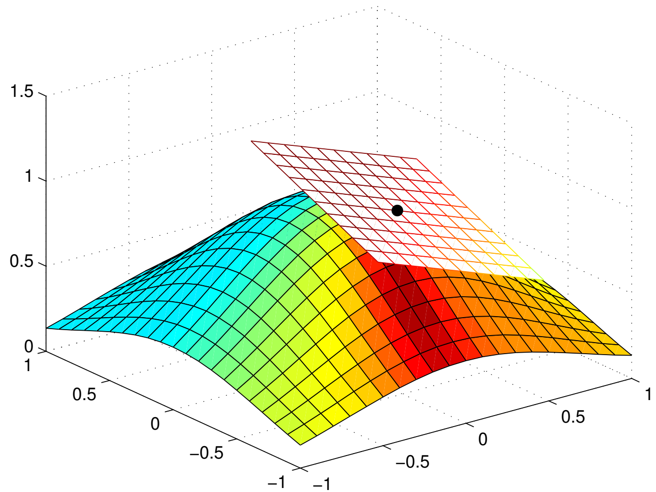
Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^2$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Taylorpolynom erster Ordnung um (x_0, y_0) (Tangentialebene in (x_0, y_0))

$$p_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Tangentialebene

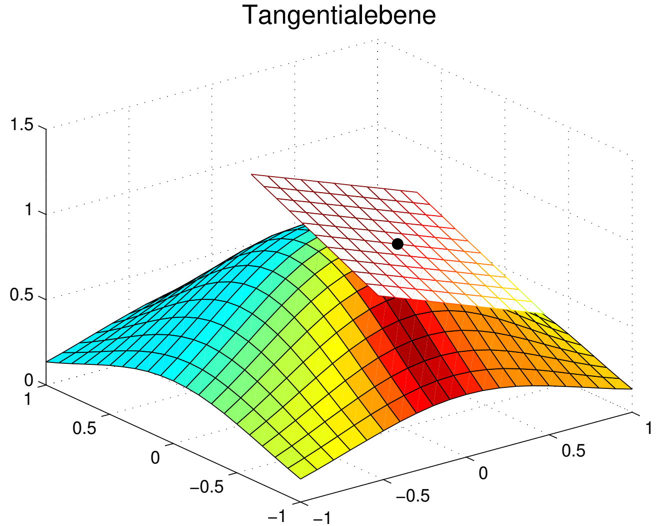


Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^2$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Taylorpolynom erster Ordnung um (x_0, y_0) (Tangentialebene in (x_0, y_0))

$$p_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0)$$



- Taylorpolynom zweiter Ordnung um (x_0, y_0)

$$p_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(x_0,y_0)(x - x_0)^2 + \partial_{xy} f(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\partial_{yy} f(x_0,y_0)(y - y_0)^2$$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sie $f(x,y) = \exp(x^2 + y)$.

- Gesucht: Taylorpolynom erster Ordnung um $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} p_1(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) \\ &+ \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sie $f(x,y) = \exp(x^2 + y)$.

- Gesucht: Taylorpolynom erster Ordnung um $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} p_1(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) \\ &+ \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

- Ableitungen

$$f(1,0) = \exp(1) = e$$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sie $f(x,y) = \exp(x^2 + y)$.

- Gesucht: Taylorpolynom erster Ordnung um $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} p_1(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) \\ &+ \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

- Ableitungen

$$f(1,0) = \exp(1) = e$$

$$\partial_x f(x,y) = 2x\exp(x^2 + y) \qquad \Rightarrow \partial_x f(1,0) = 2\exp(1) = 2e$$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sie $f(x, y) = \exp(x^2 + y)$.

- Gesucht: Taylorpolynom erster Ordnung um $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} p_1(x, y) = f(x_0, y_0) &+ \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &+ \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

- Ableitungen

$$\begin{aligned} & & f(1, 0) &= \exp(1) = e \\ \partial_x f(x, y) &= 2x \exp(x^2 + y) &\Rightarrow \partial_x f(1, 0) &= 2 \exp(1) = 2e \\ \partial_y f(x, y) &= \exp(x^2 + y) &\Rightarrow \partial_y f(1, 0) &= \exp(1) = e. \end{aligned}$$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sie $f(x,y) = \exp(x^2 + y)$.

- Gesucht: Taylorpolynom erster Ordnung um $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} p_1(x,y) &= f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) \\ &\quad + \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

- Ableitungen

$$\begin{aligned} & & f(1,0) &= \exp(1) = e \\ \partial_x f(x,y) &= 2x\exp(x^2+y) &\Rightarrow \partial_x f(1,0) &= 2\exp(1) = 2e \\ \partial_y f(x,y) &= \exp(x^2+y) &\Rightarrow \partial_y f(1,0) &= \exp(1) = e. \end{aligned}$$

- Taylorpolynom erster Ordnung

$$p_1(x,y) = e + 2e(x - x_0) + e(y - y_0)$$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sie $f(x,y) = \exp(x^2 + y)$.

- Gesucht: Taylorpolynom erster Ordnung um $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} p_1(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) \\ &+ \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

- Ableitungen

$$\begin{aligned} & & f(1,0) &= \exp(1) = e \\ \partial_x f(x,y) &= 2x\exp(x^2+y) &\Rightarrow \partial_x f(1,0) &= 2\exp(1) = 2e \\ \partial_y f(x,y) &= \exp(x^2+y) &\Rightarrow \partial_y f(1,0) &= \exp(1) = e. \end{aligned}$$

- Taylorpolynom erster Ordnung

$$p_1(x,y) = e + 2e(x - x_0) + e(y - y_0) = e + 2e(x-1) + ey$$