



Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 23: Integration mit Partialbruchzerlegung

Dr. Stefan Frei, 13.02.20

Beispiel 1 zur Partialbruchzerlegung

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x - 4}$

Beispiel 1 zur Partialbruchzerlegung

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x - 4}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 1, x_2 = -2$

Beispiel 1 zur Partialbruchzerlegung

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{1}{2(x-1)(x+2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 1, x_2 = -2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{1/2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Beispiel 1 zur Partialbruchzerlegung

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{1}{2(x-1)(x+2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 1, x_2 = -2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Beispiel 1 zur Partialbruchzerlegung

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{1}{2(x-1)(x+2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 1, x_2 = -2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{\overbrace{(A+B)} x + \overbrace{2A-B}}{(x-1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Beispiel 1 zur Partialbruchzerlegung

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{1}{2(x-1)(x+2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 1, x_2 = -2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{\underbrace{(A+B)}_{\stackrel{!}{=}0}x + \underbrace{2A-B}_{\stackrel{!}{=}1/2}}{(x-1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Beispiel 1 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$A + B = 0$$

$$2A + -B = \frac{1}{2}$$

Beispiel 1 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$A + B = 0$$

$$2A + -B = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B = -A$$

$$3A = \frac{1}{2}$$

Beispiel 1 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$A + B = 0$$

$$2A + -B = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B = -A$$

$$3A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$$

Beispiel 1 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 & \Rightarrow B &= -A \\ 2A + -B &= \frac{1}{2} & 3A &= \frac{1}{2} & \Rightarrow A &= \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{1/2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/6}{x-1} - \frac{1/6}{x+2}$$

Beispiel 1 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 & \Rightarrow B &= -A \\ 2A + -B &= \frac{1}{2} & 3A &= \frac{1}{2} & \Rightarrow A &= \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{1/2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/6}{x-1} - \frac{1/6}{x+2}$$

- Integration (Stammfunktionen)

$$\int f(x) dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx$$

Beispiel 1 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 & \Rightarrow B &= -A \\ 2A + -B &= \frac{1}{2} & 3A &= \frac{1}{2} & \Rightarrow A &= \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{1/2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/6}{x-1} - \frac{1/6}{x+2}$$

- Integration (Stammfunktionen)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln(|x-1|) - \frac{1}{6} \ln(|x+2|) + c \end{aligned}$$

Beispiel 1 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 & \Rightarrow B &= -A \\ 2A + -B &= \frac{1}{2} & 3A &= \frac{1}{2} & \Rightarrow A &= \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{1/2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/6}{x-1} - \frac{1/6}{x+2}$$

- Integration (Stammfunktionen)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln(|x-1|) - \frac{1}{6} \ln(|x+2|) + c = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{|x-1|}{|x+2|} \right) + c. \end{aligned}$$

Beispiel 2

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

Beispiel 2

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Beispiel 2

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Beispiel 2

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

Beispiel 2

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{\overbrace{(A+B+C)} x^2 - \overbrace{(3A+2B+C)} x + \overbrace{2A}}{x(x-1)(x-2)}\end{aligned}$$

Beispiel 2

Wir suchen die **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$

- **Nullstellen** des Nenners: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$
- **Partialbruchzerlegung**: Wir suchen $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{\overbrace{(A+B+C)}^{\stackrel{!}{=}0} x^2 - \overbrace{(3A+2B+C)}^{\stackrel{!}{=} -1} x + \overbrace{2A}^{\stackrel{!}{=}1}}{x(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

Beispiel 2 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A + B + C &= 0 \\3A + 2B + C &= -1 \\2A &= 1\end{aligned}$$

Beispiel 2 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A + B + C &= 0 \\3A + 2B + C &= -1\end{aligned}$$

$$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

- Die ersten beiden Gleichungen ergeben

Beispiel 2 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A + B + C &= 0 \\3A + 2B + C &= -1\end{aligned}$$

$$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

- Die ersten beiden Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad B + C &= -\frac{1}{2} \\ \text{(ii)} \quad 2B + C &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Beispiel 2 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A + B + C &= 0 \\3A + 2B + C &= -1\end{aligned}$$

$$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

- Die ersten beiden Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad B + C &= -\frac{1}{2} \\ \text{(ii)} \quad 2B + C &= -\frac{5}{2} \quad \text{(ii)-(i)} \Rightarrow B = -2, C = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Beispiel 2 (fortgesetzt)

- Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A + B + C &= 0 \\3A + 2B + C &= -1\end{aligned}$$

$$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

- Die ersten beiden Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad B + C &= -\frac{1}{2} \\ \text{(ii)} \quad 2B + C &= -\frac{5}{2} \quad \text{(ii)-(i)} \Rightarrow B = -2, C = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

- Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$$

Beispiel 2 (fortgesetzt)

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$$

Integration (Stammfunktionen)

Beispiel 2 (fortgesetzt)

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$$

Integration (Stammfunktionen)

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-2} dx$$

Beispiel 2 (fortgesetzt)

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$$

Integration (Stammfunktionen)

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(|x|) - 2 \ln(|x-1|) + \frac{3}{2} \ln(|x-2|) + c.\end{aligned}$$

Klausur

- **Mi, 04.03.20, 17:00-18:30**, Räume A600, A701 (Aufteilung laut Homepage)
- 15 min vorher da sein
- **Einziges Hilfsmittel:** **Handbeschriebenes** DIN A4 Blatt (Vorder- und Rückseite), keine Kopien, keine Verkleinerungen
- Kein Taschenrechner, etc, Handys und Smartwatches in Taschen
- Ca. 45 Punkte, 40% zum Bestehen notwendig
- Bei Bestehen evtl. Anrechnen von bis zu 5 Bonuspunkten aus den Übungen

Klausureinsicht: Voraussichtlich Di, 10.03.20, 15:15-16:45 (D406)