Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 3: Vektoren

Dr. Stefan Frei, 31.10.19

n-dimensionale Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Vektoren müssen nicht unbedingt Koordinaten enthalten, auch Variablen, Kräfte, Geschwindigkeiten, Konzentrationen,...

- Vektoraddition $\vec{x} + \vec{y}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

- Skalarmultiplikation $\lambda \vec{x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

n-dimensionale Vektoren

- Skalarprodukt $< \vec{x}, \vec{y} >$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

- 2 Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ heißen orthogonal zueinander, wenn $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$

n-dimensionale Vektoren

- Skalarprodukt $< \vec{x}, \vec{y} >$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

- 2 Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ heißen orthogonal zueinander, wenn $< \vec{x}, \vec{y} > = 0$
- Länge eines Vektors

$$\|\vec{x}\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{< x, x >}$$

Beispiele

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $< \vec{x}, \vec{y} >$ und $\vec{x} + \vec{y}$
-

Beispiele

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $< \vec{x}, \vec{y} >$ und $\vec{x} + \vec{y}$ nicht definiert
-

$$\vec{y} + 3\vec{z} =$$

Beispiele

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $< \vec{x}, \vec{y} >$ und $\vec{x} + \vec{y}$ nicht definiert
- $$\vec{y} + 3\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Länge $\|\vec{x}\| =$

Beispiele

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $< \vec{x}, \vec{y} >$ und $\vec{x} + \vec{y}$ nicht definiert
- $$\vec{y} + 3\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Länge $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
- $< y, z > =$

Beispiele

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $< \vec{x}, \vec{y} >$ und $\vec{x} + \vec{y}$ nicht definiert
- $$\vec{y} + 3\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Länge $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
- $< y, z > = 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 0$

Bsp. Vektoren

Wir nehmen an, dass auf einen fallenden Gegenstand 2 Kräfte wirken, die Gravitation f_1 und eine externe Kraft f_2 (z.B. Magnetfeld)

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1\,N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei m die Masse und $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ die Gravitationskonstante der Erde.

Die resultierende Gesamtkraft ist

$$f_{\text{tot}} = f_1 + f_2 = \begin{pmatrix} 1\,N \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

1. Symmetrie $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$
2. Definitheit $< \vec{x}, \vec{x} >> 0$, wenn $\vec{x} \neq 0$
3. Linearität $< \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{z} > +\lambda < \vec{y}, \vec{z} >$

Eigenschaften des Skalarprodukts

1. Symmetrie $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$
2. Definitheit $< \vec{x}, \vec{x} > > 0$, wenn $\vec{x} \neq 0$
3. Linearität $< \vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{z} > + \lambda < \vec{y}, \vec{z} >$

Veranschaulichung in 2 Dimensionen

- $< \vec{x}, \vec{y} > > 0$: Für den Winkel α zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt

$$0 \leq \alpha < 90^\circ \quad \text{oder} \quad 270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$$

- $< \vec{x}, \vec{y} > < 0 \quad \Rightarrow 90^\circ < \alpha < 270^\circ$
- $< \vec{x}, \vec{y} >= 0 \quad \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 270^\circ$