Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 5: Basis, Determinante und Orientierung

Dr. Stefan Frei, 07.11.19

Basis eines Vektorraums

Die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in U$ eines Vektorraums U heißen eine Basis von U, wenn

(i) $U = \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$

(ii) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ sind linear unabhängig

Ein Vektorraum hat in der Regel (unendlich) viele Basen. Wegen (i) haben diese aber immer **gleich viele Elemente**.

Wir definieren die Dimension eines Vektorraums U als

$$\dim(U) = k = \#\,\text{Basiselemente}$$

Beispiel 1: Koordinatendarstellung bzgl verschiedener Basen

Wir betrachten die beiden Basen

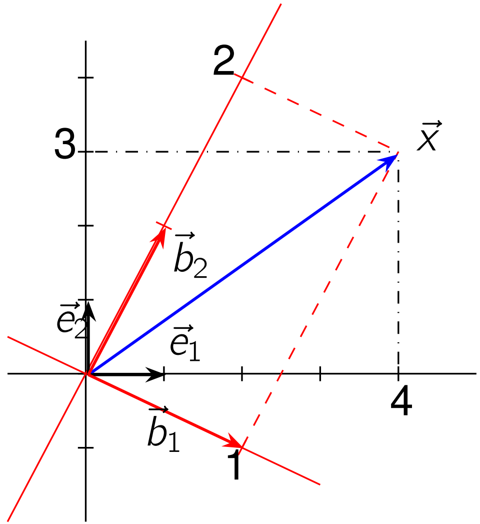
$$\mathcal{N} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \quad \mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

und den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{N}$.

Wie lautet die Koordinatendarstellung von $\vec{x}$ bzgl. $\mathcal{B}$?



Beispiel 1: Koordinatendarstellung bzgl verschiedener Basen

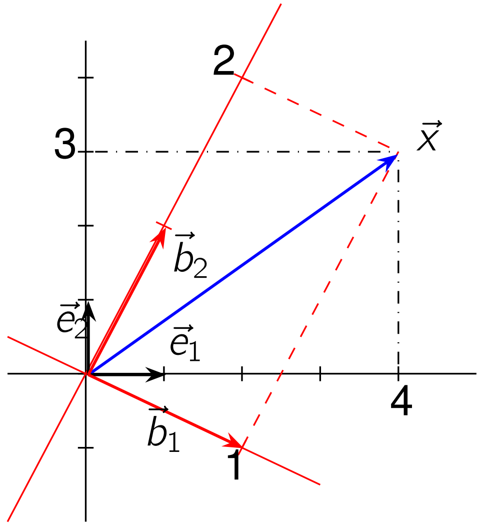
Wir betrachten die beiden Basen

$$\mathcal{N} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \quad \mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

und den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{N}$.



Wie lautet die Koordinatendarstellung von $\vec{x}$ bzgl. $\mathcal{B}$?

Lösung: Wir bestimmen λ_1, λ_2 so, dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1: Koordinatendarstellung bzgl verschiedener Basen

Wir bestimmen λ_1, λ_2 so, dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: Koordinatendarstellung bzgl verschiedener Basen

Wir bestimmen λ_1, λ_2 so, dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, d.h.

$$\vec{x} \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: Koordinatendarstellung bzgl verschiedener Basen

Wir bestimmen λ_1, λ_2 so, dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, d.h.

$$\vec{x} \overset{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probe (Rücktransformation):

$$\lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

Beispiel 2: Koordinatendarstellung bzgl verschiedener Basen

Wir betrachten die beiden Basen

$$\mathcal{N} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \qquad \mathcal{A} := \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $\quad \vec{x} \overset{\mathcal{A}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 - 2 \cdot \vec{a}_3.$

Wie lautet die Koordinatendarstellung von $\vec{x}$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{N}$?

Beispiel 2: Koordinatendarstellung bzgl verschiedener Basen

Wir betrachten die beiden Basen

$$\mathcal{N} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \qquad \mathcal{A} := \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $\vec{x} \overset{\mathcal{A}}{\triangleq} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 - 2 \cdot \vec{a}_3.$

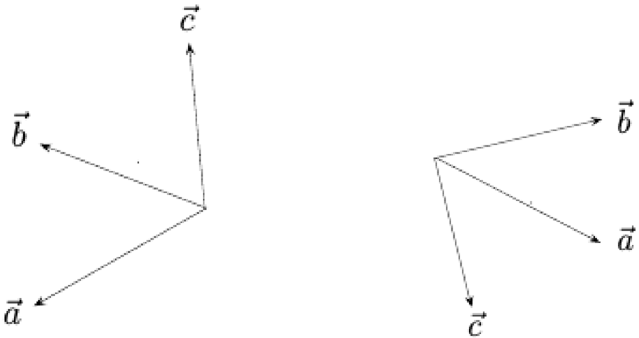
Wie lautet die Koordinatendarstellung von $\vec{x}$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{N}$?

Lösung

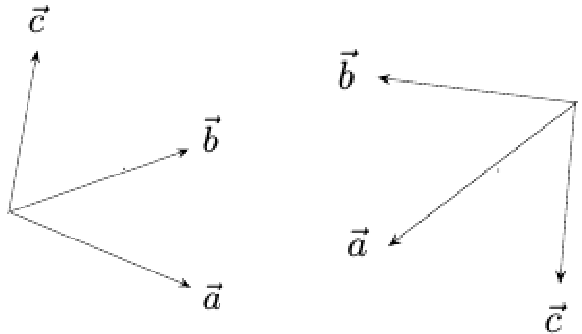
$$\vec{x} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Links- und Rechtssysteme

Linkssystem

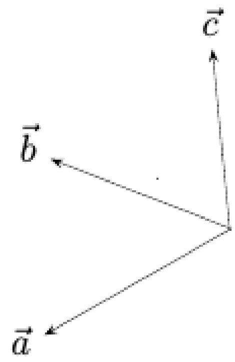


Rechtssystem



Eigenschaften von Determinante und Orientierung

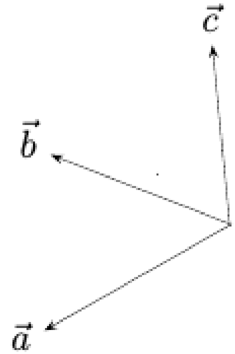
- $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ und $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ haben dieselbe Orientierung



Eigenschaften von Determinante und Orientierung

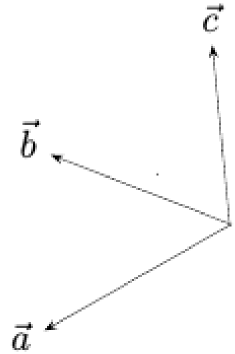
- $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ und $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ haben dieselbe Orientierung

- Permutation von 2 Vektoren: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ und $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ haben unterschiedliche Orientierungen



Eigenschaften von Determinante und Orientierung

- $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ und $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ haben dieselbe Orientierung

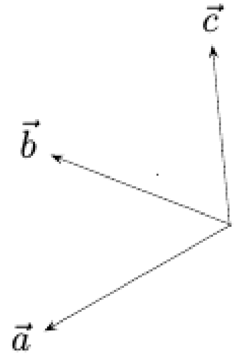


- Permutation von 2 Vektoren: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ und $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ haben unterschiedliche Orientierungen

- Multilinearität: $\det(\lambda_1\vec{a}, \lambda_2\vec{b}, \lambda_3\vec{c}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Eigenschaften von Determinante und Orientierung

- $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ und $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ haben dieselbe Orientierung



- Permutation von 2 Vektoren: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ und $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ haben unterschiedliche Orientierungen

- Multilinearität: $\det(\lambda_1\vec{a}, \lambda_2\vec{b}, \lambda_3\vec{c}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
  $\rightarrow$ Insbesondere $\det(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}) = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
  $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$ und $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ haben unterschiedliche Orientierungen