Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 6: Determinante und Spatprodukt

Dr. Stefan Frei, 14.11.19

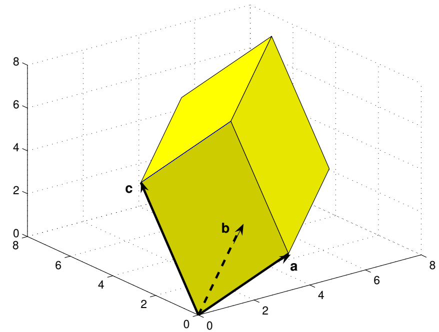
Determinante einer 3x3-Matrix

- Definition

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

- Geometrische Bedeutung: Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats

$$V = \left| \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \right|$$



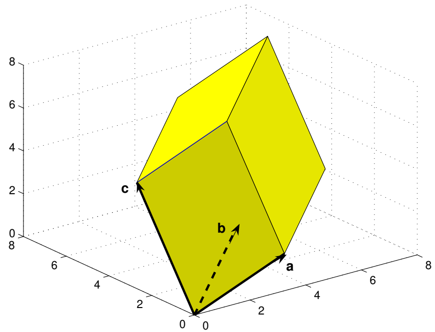
Determinante einer 3x3-Matrix

- Definition

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

- Geometrische Bedeutung: Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats

$$V = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$



- Weitere Eigenschaften
  - $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abh. (allgemein für n Vektoren im $\mathbb{R}^n$)
  - $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Linkssystem
  - $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

Spatprodukt

Definition:

$$S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = < \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} >$$

Spatprodukt

Definition:

$$S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} > = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Spatprodukt

Definition:

$$
\begin{aligned}
S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} > &= \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 \\
&= \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).
\end{aligned}
$$

Spatprodukt

Definition:

$$
\begin{aligned}
S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} > &= \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 \\
&= \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).
\end{aligned}
$$

Eigenschaften der Determinante übertragen sich auf Spatprodukt:

- Volumen des Spates zu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$: $\quad V = |S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$
- Lineare Unabhängigkeit, Orientierung

Beispiel Spatprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Beispiel Spatprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Es gilt

$$S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

Daraus schließen wir

Beispiel Spatprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Es gilt

$$S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

Daraus schließen wir

- Volumen des von $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ aufgespannten Spates: $V = |S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 1$

Beispiel Spatprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Es gilt

$$S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

Daraus schließen wir

- Volumen des von $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ aufgespannten Spates: $V = |S(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 1$
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sind linear unabh. und bilden ein Rechtssystem