

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 8: Funktionen mit mehreren Variablen

Dr. Stefan Frei, 21.11.19

Funktionsklassen

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (reelle Funktion),

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Funktion mit n Variablen),

$r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ (Kurve),

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (Vektorfeld).

3.5.1: Reellwertige Funktionen mit 2 Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

3.5.1: Reellwertige Funktionen mit 2 Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$

3.5.1: Reellwertige Funktionen mit 2 Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$
- $g : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad g(x, y) = \frac{x+y}{y}$

3.5.1: Reellwertige Funktionen mit 2 Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

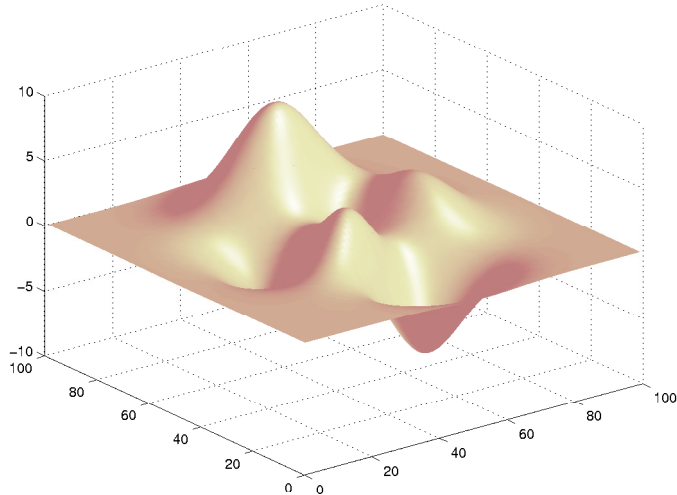
Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$
- $g : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad g(x, y) = \frac{x+y}{y}$
- $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

3.5.2: Funktionen mit 2 Variablen: Graphische Darstellung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

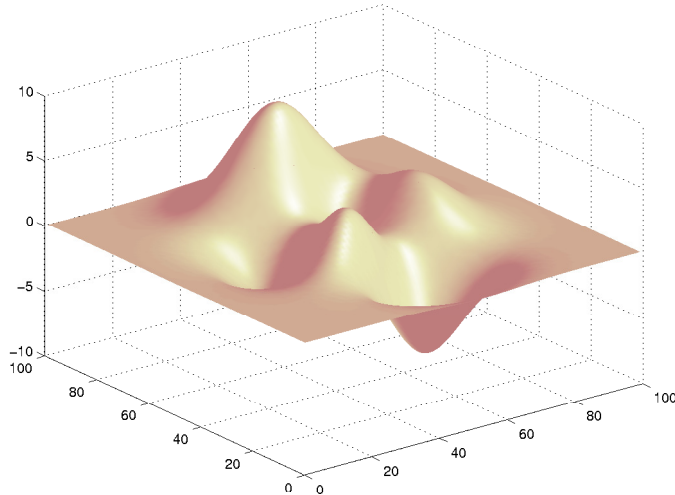
Plot der Werte $f(x, y)$ über dem
Definitionsbereich D (Graph)



3.5.2: Funktionen mit 2 Variablen: Graphische Darstellung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Plot der Werte $f(x, y)$ über dem
Definitionsbereich D (Graph)



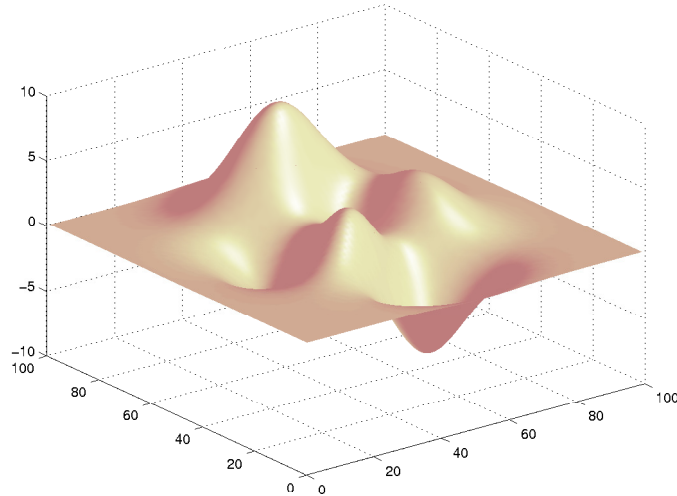
2. Möglichkeit: Definition von *Höhenlinien*
zu Niveaus c

$$H_c = \{(x, y) \in D : g(x, y) = c\}$$

3.5.2: Funktionen mit 2 Variablen: Graphische Darstellung

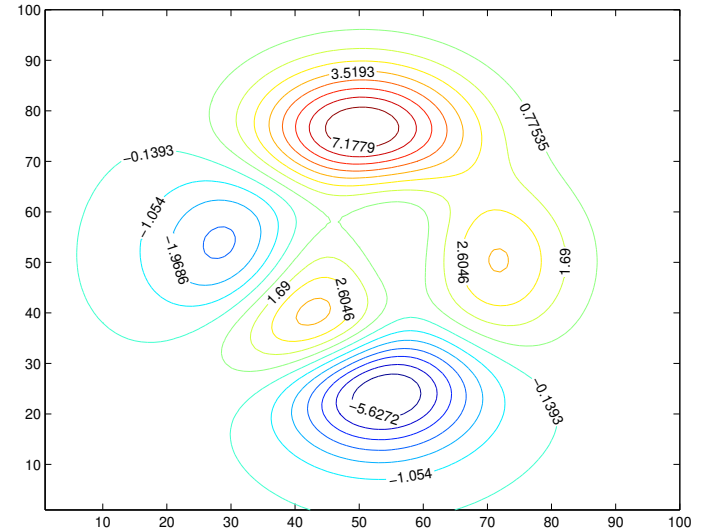
$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Plot der Werte $f(x, y)$ über dem Definitionsbereich D (Graph)



2. Möglichkeit: Definition von *Höhenlinien* zu Niveaus c

$$H_c = \{(x, y) \in D : g(x, y) = c\}$$



3.5.3: Reellwertige Funktionen mit n Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n,$$
$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\text{kurz } \vec{u} \rightarrow f(\vec{u}))$$

.

3.5.3: Reellwertige Funktionen mit n Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n,$$
$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\text{kurz } \vec{u} \rightarrow f(\vec{u}))$$

- Für $n \geq 3$ keine graphische Veranschaulichung

3.5.3: Reellwertige Funktionen mit n Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n,$$
$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\text{kurz } \vec{u} \rightarrow f(\vec{u}))$$

- Für $n \geq 3$ keine graphische Veranschaulichung
- Beispiele:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := x^2 + 3xy + z^3,$$

3.5.3: Reellwertige Funktionen mit n Variablen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n,$$
$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\text{kurz } \vec{u} \rightarrow f(\vec{u}))$$

- Für $n \geq 3$ keine graphische Veranschaulichung
- Beispiele:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := x^2 + 3xy + z^3,$$

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\vec{u}) := \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

3.5.4: Vektorfeld

Vektorwertige Funktion mit n Variablen (**Vektorfeld**)

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^m$$

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_m(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{pmatrix} .$$

Jedes f_i ist eine reellwertige Funktion $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

3.5.4: Vektorfeld

Vektorwertige Funktion mit n Variablen (**Vektorfeld**)

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^m$$

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_m(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{pmatrix} .$$

Jedes f_i ist eine reellwertige Funktion $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y, z) := \begin{pmatrix} 2x + 3y - 2z \\ y + z \end{pmatrix} .$$

Vektordarstellung

Graphische Veranschaulichung von $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \in \{2, 3\}$

Vektordarstellung

Graphische Veranschaulichung von $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \in \{2, 3\}$

Man trägt in Punkten $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ einen Vektorpfeil mit Richtung $F(\vec{u})$ auf

Beispiel:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$F(x, y) = (y, -x)$$

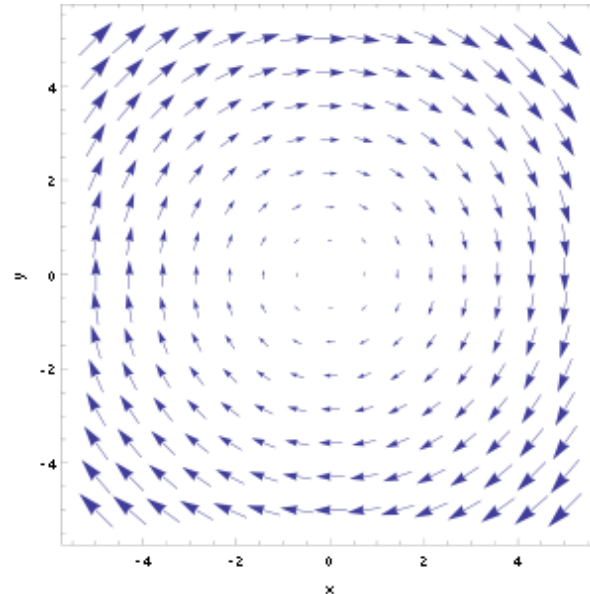
Vektordarstellung

Graphische Veranschaulichung von $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \in \{2, 3\}$

Man trägt in Punkten $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ einen Vektorpfeil mit Richtung $F(\vec{u})$ auf

Beispiel:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$F(x, y) = (y, -x)$$



Quelle: wikipedia.de

3.5.5: Kurven

Kurven in der Ebene: $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$

mit zwei reellen Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

3.5.5: Kurven

Kurven in der Ebene: $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$

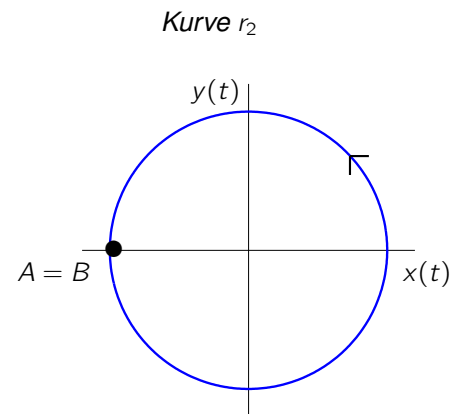
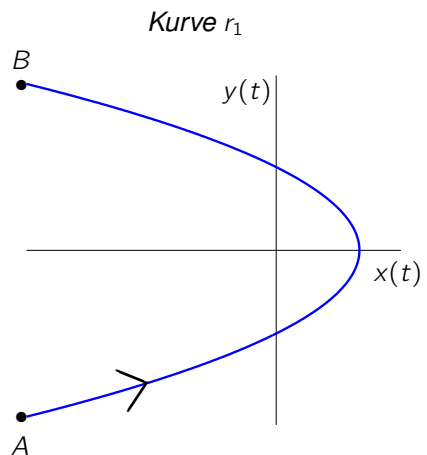
mit zwei reellen Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

- $A = r(a)$ *Anfangspunkt*, $B = r(b)$ *Endpunkt* der Kurve.
- Gilt $A = B$, so reden wir von einer *geschlossenen Kurve*.

- **Beispiele:**

$$r_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$r_1(t) = (1 - t^2, t),$$

$$r_2 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$r_2(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$



Raumkurven

Kurven im \mathbb{R}^3 (*Raumkurven*):

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

mit drei reellen Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ auf einem Intervall $I = [a, b]$.

Raumkurven

Kurven im \mathbb{R}^3 (Raumkurven):

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

mit drei reellen Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ auf einem Intervall $I = [a, b]$.

Beispiel (Graphische Darstellung)

$$r : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$r(t) = (\cos(10t), \sin(10t), \exp(t))$$

Beachte: Alle 3 Koordinaten stellen den Wertebereich von r dar (Unterschied zu [Graphen](#))

