Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 10: Folgen und Reihen

Dr. Stefan Frei, 02.12.19

Wiederholung Folgen

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{R}$ heißt Folge

($\mathbb{N}_r := \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq r\}$)

- Folge $(a_n)_{n \geq r}$, Folgenglieder $a_n := f(n)$

Wiederholung Folgen

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{R}$ heißt Folge

$(\mathbb{N}_r := \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq r\})$

- Folge $(a_n)_{n \geq r}$, Folgenglieder $a_n := f(n)$
- $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $(a_n)_{n \geq r}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

  wenn es zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\epsilon.$$

- Besitzt $(a_n)_{n \geq r}$ einen Grenzwert, so heißt a_n konvergent, sonst divergent

Wiederholung Folgen

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{R}$ heißt Folge

($\mathbb{N}_r := \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq r\}$)

- Folge $(a_n)_{n \geq r}$, Folgenglieder $a_n := f(n)$
- $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $(a_n)_{n \geq r}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

wenn es zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\epsilon.$$

- Besitzt $(a_n)_{n \geq r}$ einen Grenzwert, so heißt a_n konvergent, sonst divergent
- Uneigentliche Konvergenz (eine “Form der Divergenz”)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty.$$

Wiederholung Reihen

Sei $(a_n)_{n \geq r}$ eine Folge

- Motivation: Wert bzw. Konvergenz der unendlichen Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Wiederholung Reihen

Sei $(a_n)_{n \geq r}$ eine Folge

- Motivation: Wert bzw. Konvergenz der unendlichen Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Definition Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

- Reihe: Folge der Partialsummen

$$(s_n)_{n \geq 0} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \geq 0} = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2)$$

Wiederholung Reihen

Sei $(a_n)_{n \geq r}$ eine Folge

- Motivation: Wert bzw. Konvergenz der unendlichen Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Definition Partialsumme
$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$
- Reihe: Folge der Partialsummen
$$(s_n)_{n \geq 0} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \geq 0} = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2)$$
- Konvergenz/Divergenz der Reihe: Konvergenz/Divergenz der Folge $(s_n)_{n \geq 0}$
- Wert der Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \to \infty} s_n$$

Beispiele Reihen

- Geometrische Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1$$

  konvergent für $|q| < 1$, sonst divergent (da q^k keine Nullfolge).

Beispiele Reihen

- Geometrische Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1$$

  konvergent für $|q| < 1$, sonst divergent (da q^k keine Nullfolge).

- Harmonische Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \text{(divergent)}$$

Beispiele Reihen

- Geometrische Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1$$
  konvergent für $|q| < 1$, sonst divergent (da q^k keine Nullfolge).
- Harmonische Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \text{(divergent)}$$
- Summe der reziproken Quadratzahlen
  $$s_1 = 1, \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{4} = 1.25$$
  $$s_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \approx 1.361, \qquad s_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \approx 1.424$$

Beispiele Reihen

- Geometrische Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1$$
  konvergent für $|q| < 1$, sonst divergent (da q^k keine Nullfolge).
- Harmonische Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \text{(divergent)}$$
- Summe der reziproken Quadratzahlen
$$s_1 = 1, \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{4} = 1.25$$
$$s_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \approx 1.361, \qquad s_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \approx 1.424$$
Es gilt $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(konvergent)}$$

Konvergenz von Reihen

- Weiteres Bsp: Definition der Eulerschen Zahl e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Konvergenz von Reihen

- Weiteres Bsp: Definition der Eulerschen Zahl e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad \text{(konvergent)}$$

Konvergenz von Reihen

- Weiteres Bsp: Definition der Eulerschen Zahl e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad \text{(konvergent)}$$

- Damit eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, ist es notwendig, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$$

Konvergenz von Reihen

- Weiteres Bsp: Definition der Eulerschen Zahl e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad \text{(konvergent)}$$

- Damit eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, ist es notwendig, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$$

- Das ist aber noch nicht hinreichend für Konvergenz, d.h. genügt im allgemeinen noch nicht (Beispiel Harmonische Reihe)

4.2.2 Konvergenzkriterien für Reihen

- **Majorantenkriterium**

  Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

  $$|\mathbf{a_k}| < \mathbf{b_k} \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$

  so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

4.2.2 Konvergenzkriterien für Reihen

- **Majorantenkriterium**

  Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

  $$|\mathbf{a_k}| < \mathbf{b_k} \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$

  so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

- **Leibnizkriterium**

  Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine positive und streng monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe

  $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

4.2.2 Konvergenzkriterien für Reihen

- **Majorantenkriterium**

  Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

  $$|\mathbf{a_k}| < \mathbf{b_k} \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$

  so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

- **Leibnizkriterium**

  Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine positive und streng monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe

  $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

  Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$

4.2.2 Konvergenzkriterien für Reihen

- **Majorantenkriterium**

  Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

  $$|\mathbf{a_k}| < \mathbf{b_k} \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$

  so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

- **Leibnizkriterium**

  Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine positive und streng monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe

  $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

  Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -ln(2)$. (Dagegen ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent)

Weitere Konvergenzkriterien

- **Wurzelkriterium**
  Gibt es eine Zahl $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} < q \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$

  so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Weitere Konvergenzkriterien

- **Wurzelkriterium**
  Gibt es eine Zahl $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
  $$\sqrt[k]{|a_k|} < q \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$
  so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.
- **Quotientenkriterium**
  Gibt es eine Zahl $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
  $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$
  so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beispiel Quotientenkriterium

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel Quotientenkriterium

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir prüfen

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

Beispiel Quotientenkriterium

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir prüfen

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!}\right| \qquad .$$

Beispiel Quotientenkriterium

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir prüfen

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| \qquad .$$

Beispiel Quotientenkriterium

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir prüfen

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Beispiel Quotientenkriterium

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir prüfen

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Also kann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gefunden werden, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

(sogar für beliebig kleines $q > 0$).

Beispiel Quotientenkriterium

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir prüfen

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Also kann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gefunden werden, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

(sogar für beliebig kleines $q > 0$).

Anmerkung: Diese Reihe dient zur Definition der Exponentialfunktion: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Rechenregeln

Zur Erinnerung: Reihen sind Folgen der Partialsummen $(s_n)_{n\geq 0}$

Rechenregeln

Zur Erinnerung: Reihen sind Folgen der Partialsummen $(s_n)_{n\geq 0}$

Damit gilt für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b, \quad c \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = a \pm b,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = ca,$$

Aber

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot b_n) \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{R}^m$ heißt Folge im $\mathbb{R}^m$.

- Folgenglieder sind m-dimensionale Vektoren, z.B. im $\mathbb{R}^2$

$$(\vec{w}_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n)_{n\geq 0}$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{R}^m$ heißt Folge im $\mathbb{R}^m$.

- Folgenglieder sind m-dimensionale Vektoren, z.B. im $\mathbb{R}^2$

$$(\vec{w}_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n)_{n\geq 0}$$

- Eine Folge $(\vec{w}_n)_{n\geq 0}$ heißt konvergent, wenn jede Komponente konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \vec{w}_n = \vec{w} = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textbf{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{R}^m$ heißt Folge im $\mathbb{R}^m$.

- Folgenglieder sind m-dimensionale Vektoren, z.B. im $\mathbb{R}^2$

$$(\vec{w}_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n)_{n\geq 0}$$

- Eine Folge $(\vec{w}_n)_{n\geq 0}$ heißt konvergent, wenn jede Komponente konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \vec{w}_n = \vec{w} = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textbf{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

- Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \left(2^{-n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{R}^m$ heißt Folge im $\mathbb{R}^m$.

- Folgenglieder sind m-dimensionale Vektoren, z.B. im $\mathbb{R}^2$

$$(\vec{w}_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n)_{n\geq 0}$$

- Eine Folge $(\vec{w}_n)_{n\geq 0}$ heißt konvergent, wenn jede Komponente konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \vec{w}_n = \vec{w} = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textbf{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

- Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \left(2^{-n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 2^{-n}, \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}\right) = (0, 1).$$