Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 4: Lineare Unabhängigkeit

Dr. Stefan Frei, 04.11.19

Linearkombination / Lineare Hülle

- Zu Vektoren $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k} \in \mathbb{R}^n$ nennt man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i}$$

  und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ eine Linearkombination der $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$.

- Die Menge aller Linearkombinationen heißt lineare Hülle der Vektoren $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k} \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{span}\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i},\ \alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe

Liegt $\vec{u} = (0, 5, 1)$ in der linearen Hülle von $\vec{v} = (1, 2, 0)$ und $\vec{w} = (1, 0, 1)$ (d.h. $\vec{u} \in$ span$\{\vec{v}, \vec{w}\}$)?

Aufgabe

Liegt $\vec{u} = (0, 5, 1)$ in der linearen Hülle von $\vec{v} = (1, 2, 0)$ und $\vec{w} = (1, 0, 1)$ (d.h. $\vec{u} \in \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$)?

$\Leftrightarrow$ Gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1 \vec{v} + \alpha_2 \vec{w} = \vec{u}$?

Aufgabe

Liegt $\vec{u} = (0, 5, 1)$ in der linearen Hülle von $\vec{v} = (1, 2, 0)$ und $\vec{w} = (1, 0, 1)$
(d.h. $\vec{u} \in \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$)?

$\Leftrightarrow$ Gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1\vec{v} + \alpha_2\vec{w} = \vec{u}$?

Lineares Gleichungssystem $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe

Liegt $\vec{u} = (0, 5, 1)$ in der linearen Hülle von $\vec{v} = (1, 2, 0)$ und $\vec{w} = (1, 0, 1)$
(d.h. $\vec{u} \in \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$)?

$\Leftrightarrow$ Gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1\vec{v} + \alpha_2\vec{w} = \vec{u}$?

Lineares Gleichungssystem $\quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrcrl} (I) & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = 0 \\ (II) & 2\alpha_1 & & & = 5 \\ (III) & & & \alpha_2 & = 1 \end{array}$$

$(II), (III) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{5}{2}, \alpha_2 = 1,$
aber $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 + \frac{5}{2} \neq 0 \quad (I)$.

Aufgabe

Liegt $\vec{u} = (0, 5, 1)$ in der linearen Hülle von $\vec{v} = (1, 2, 0)$ und $\vec{w} = (1, 0, 1)$ (d.h. $\vec{u} \in \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$)?

$\Leftrightarrow$ Gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1 \vec{v} + \alpha_2 \vec{w} = \vec{u}$?

Lineares Gleichungssystem $\quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lrcl} (I) & \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ (II) & 2\alpha_1 \qquad & = & 5 \\ (III) & \alpha_2 & = & 1 \end{array}$$

$(II), (III) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{5}{2}, \alpha_2 = 1,$
aber $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 + \frac{5}{2} \neq 0 \quad (I)$.

Es gibt also keine $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1 \vec{v} + \alpha_2 \vec{w} = \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \notin \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$

Lineare Hülle

Wir haben gesehen, dass 2 Vektoren den ganzen $\mathbb{R}^2$ aufspannen können, z.B.

$$\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \mathbb{R}^2.$$

Dagegen ist

$$\text{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{e}_1}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{v} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\} \neq \mathbb{R}^2.$$

Lineare Hülle

Wir haben gesehen, dass 2 Vektoren den ganzen $\mathbb{R}^2$ aufspannen können, z.B.

$$\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \mathbb{R}^2.$$

Dagegen ist

$$\text{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{e}_1}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{v} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\} \neq \mathbb{R}^2.$$

Frage: Wann spannen n Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ den vollen $\mathbb{R}^n$ auf?