Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2019/20

Dr. S. Frei

Übungen zur **Mathematik I**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Differenzierbarkeit von Funktionen**

(1) Bestimmen Sie für $f(x) = \exp(-3x)$ bzw. $f(x) = \frac{1}{(1+3x)^2}$ eine allgemeine Formel für $f^{(n)}(x)$. Berechnen Sie jeweils auch $f^{(n)}(0)$.

(2) Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung von der logistischen Kurve

$$L(t) = \frac{a}{1 + \exp(b - ct)}.$$

(3) Bestimmen Sie Gradient $\nabla h(u,v)$ und Hesse-Matrix $\operatorname{Hess} h(u,v)$ von $h(u,v) = \sin(u^2 + v^2)$. Berechnen Sie auch $\nabla h(0,0)$ und $\operatorname{Hess} h(0,0)$.

(4) Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+2y^2}{\sqrt{8 - x^2 - 2x - y^2}}\right)$.

a) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich von h und skizzieren Sie ihn.
b) Bestimmen Sie $h_x(x,y)$, $h_y(x,y)$ und $\nabla h(x,y)$. Ermitteln Sie den Gradienten von h an der Stelle $(\bar{x},\bar{y}) = (0,1)$ und zeichnen Sie ihn in Ihre Skizze des Definitionsbereichs von h.
(Tipp zu a) und b): ln-Regeln.)

(5) Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = \sqrt{36 - 9(y-1)^2 - 4(x+1)^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{W}$ von h. Skizzieren Sie $\mathbb{D}$.
b) Berechnen Sie $h_{xy}(x,y)$.
c) Zeichnen Sie in das Schaubild aus a)
  i) die Höhenlinie durch den Punkt $(1,1)$,
  ii) die Richtung des Gradienten $\nabla h(1,1)$.

d) Gibt es ein $\vec{a} \in \mathbb{D}$ so, dass für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\dfrac{\partial h(\vec{a})}{\partial \vec{b}}$ verschwindet? Falls ja, so geben Sie $\vec{a}$ an.

(6) Es sei $h(x,y) = \sqrt{9 - (2x-y)^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von h und skizzieren Sie diesen. Geben Sie den Wertebereich $\mathbb{W}$ von h an.

b) Ist h injektiv (mit Begründung)?

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von h im Punkt $\vec{a} = (1,1)$ in Richtung $\vec{b} = (-2,1)$.