Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zur **Mathematik I**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Differenzierbarkeit von Funktionen**

Lösungen

(1)

$$f(x) = \exp(-3x) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-3)^n \exp(-3x) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-3)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+3x)^2} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-3)^n (n+1)!}{(1+3x)^{n+2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-3)^n (n+1)!$$

(2)

$$L'(t) = \frac{ac\,\exp(b-ct)}{[1+\exp(b-ct)]^2}.$$

$$L''(t) = \frac{ac^2\,\exp(b-ct)\,[\exp(b-ct)-1]}{[1+\exp(b-ct)]^3}$$

(3)

$$\nabla h(u,v) = \left(2u\cos(u^2+v^2),\ 2v\cos(u^2+v^2)\right), \quad \nabla h(0,0) = (0,0)$$

$$\operatorname{Hess} h(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cos(u^2+v^2) - 4u^2\sin(u^2+v^2) & -4uv\,\sin(u^2+v^2) \\ -4uv\,\sin(u^2+v^2) & 2\cos(u^2+v^2) - 4v^2\sin(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Hess} h(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Beachte: $8 - x^2 - 2x - y^2 = 9 - (x+1)^2 - y^2$ und

$$\ln\left(\frac{x+2y^2}{\sqrt{8-x^2-2x-y^2}}\right) = \ln\left(x+2y^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(8-x^2-2x-y^2\right)$$

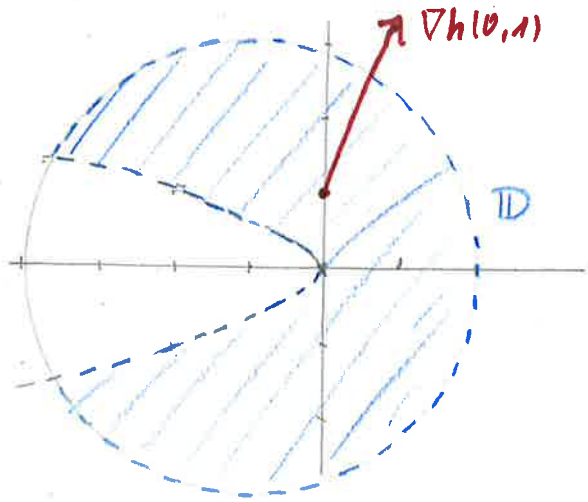
a) $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > -2y^2 \text{ und } (x+1)^2 + y^2 < 9\}$

b)

$$h_x(x,y) = \frac{1}{x+2y^2} + \frac{x+1}{8-x^2-2x-y^2}$$

$$h_y(x,y) = \frac{1}{x+2y^2} + \frac{y}{8-x^2-2x-y^2}$$

$$\nabla h(0,1) = \left(\frac{9}{14}, \frac{15}{7}\right)$$

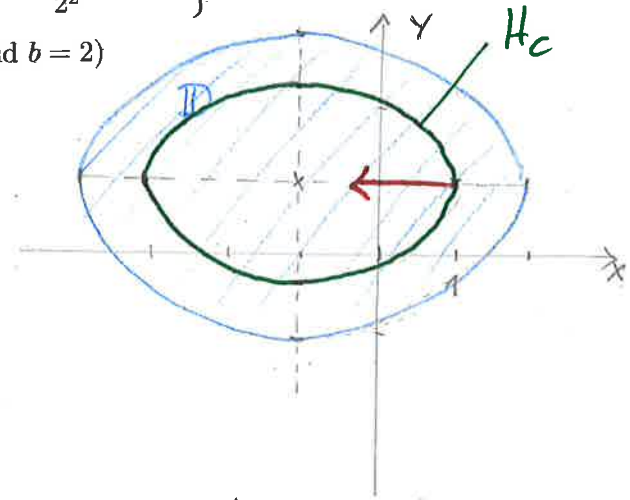


(5)a)

$$\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} \leq 1\right\}$$

(Ellipse mit Mittelpunkt (-1,1) und Halbachsen $a = 3$ und $b = 2$)

$\mathbb{W} = [0, 6]$.



b)

$$h_x(x,y) = \frac{-4(x+1)}{\sqrt{36 - 9(y-1)^2 - 4(x+1)^2}}$$

$$h_y(x,y) = \frac{-9(y-1)}{\sqrt{36 - 9(y-1)^2 - 4(x+1)^2}}$$

$$h_{xy}(x,y) = -\frac{36(x+1)(y-1)}{\left(\sqrt{36 - 9(y-1)^2 - 4(x+1)^2}\right)^3}$$

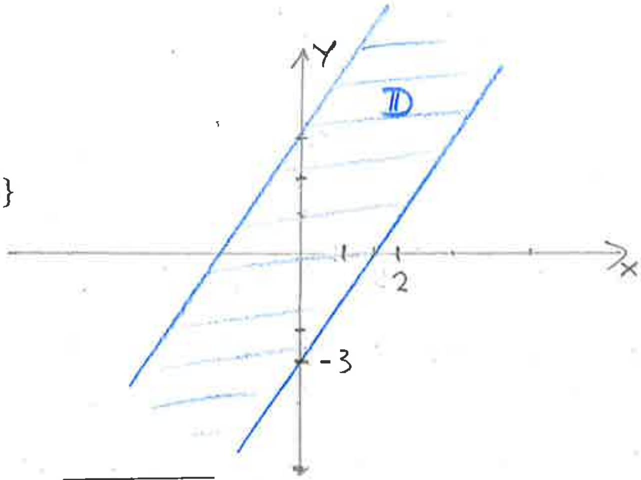
c) i) H_c ist Ellipse mit Mittelpunkt (-1,1) und Halbachsen $a = 2$ und $b = \frac{4}{3}$

ii) $\nabla h(1,1) = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, 0\right)$

d) $\vec{a} = (-1, 1)$, da $\nabla h(-1,1) = (0,0)$.

(6)a) $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \mathbb{R}, \; 2x - 3 \leq y \leq 2x + 3\}$

$\mathbb{W} = [0, 3]$



b) h ist nicht injektiv,da z.B. $h(0,0) = 3$ und $h(1,2) = \sqrt{9 - (2-2)^2} = 3$.

c) $$\frac{\partial h(\vec{a})}{\partial \vec{b}} = \frac{5}{\sqrt{40}}$$

d) $$\vec{d} = \nabla h(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 1)\,, \quad \frac{\partial h(\vec{a})}{\partial \vec{d}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$