

Übungen zur **Mathematik I**für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Folgen, Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit**(1) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ (falls möglich):

$$\begin{aligned}a_n &= 3^n \\a_n &= (-3)^n \\a_n &= (-3)^{-n} \\a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n+1}\end{aligned}$$

(2) Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3}{n^3+n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4+n^3+n^2}{n^5+10n^4+n^3+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+7n^2-4n}{100n^2+n+1}$.(3) Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Funktionen für $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{5x^4 - 3x^2 + 6}{2(x+1)^4 + 3}, & h(x) &= \frac{\sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (2x)^{N-i}}{(x-3)^N}, \\r(x) &= \frac{(x^2 + 26x + 169)^3 (2x^3 - 1)}{(x^4 - 4)(x+1)^3(x-10^8)}, & g(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 3},\end{aligned}$$

(4) Gibt es ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, welches die Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ besitzt und $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$ erfüllt? Falls ja, so geben Sie ein solches Polynom an.

(5) Überprüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - 4}{(x-2)^2} \right), & \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 - 4}{(x-2)^2} \right), & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{(x-2)^2} \right), \\ \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right), & \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right), & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right).\end{aligned}$$

(6) Berechnen Sie die folgenden Reihen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+2}}{(k+1)!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{5^{k+1}}$.(7) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $h(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ und untersuchen Sie h auf Stetigkeit.(8) Finden Sie Intervalle $[a, b]$, in denen $p(x) = -3x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3$ eine Nullstelle besitzt.