

Übungen zur **Mathematik I**für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**Freiwillige Zusatzaufgaben zu **komplexe Zahlen**

- (1) **a)** Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?
b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 81$.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen von $p(u) = -2u^4 + 2u^2 + 24$.
d) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = i$.
- (2) Berechnen Sie

$$\exp(\pi i), \quad \exp(2 + 2\pi i), \quad \ln(i), \quad \ln(-2 + 2i), \quad i^i, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{2+i}.$$

- (3) Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass $z = 1 + i$ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = 4x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 2x - 2$$

ist. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von $p(x)$.

- (4) Das Polynom $p(z) = z^5 - 6z^4 + 38z^3 - 150z^2 + 325z$ besitzt (in der Gaußschen Zahlenebene) die Nullstellen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = -5i$. Geben Sie (ohne große Rechnung) die restlichen Nullstellen von p an.

- (5) (i) Bestimmen Sie alle Lösungen von $z^4 - (1+i)^4 = 0$ in kartesischen und Polarkoordinaten.
(ii) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche $z^3 + |z|^3 = 0$ erfüllen. Skizzieren Sie diese Menge.

- (6) Bestimmen Sie

- i) den Betrag von $u = \left(\frac{7 + 19i}{19 + 7i}\right)^{29}$,
ii) den Imaginärteil von $w = \left(\frac{1}{1+i}\right)^9$.

- (7) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die folgenden Mengen

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leq 2, \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) < 0\}$$
$$B = B_+ \cap B_- \quad \text{mit} \quad B_{\pm} = \{z \in \mathbb{C} : |z \pm 1| \leq 2\}$$

- (8) **a)** Skizzieren Sie die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} : |(z+i)^2| = 4|z+i|\}$.

- b)** Bestimmen Sie den Imaginärteil von $\ln(-2 - 2i)$.

- c)** Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 - 8i = 0$ und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene. Geben Sie diese Lösungen sowohl in der algebraischen als auch in der exponentiellen Darstellung an.