Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

9. März 2018

Klausur zur Mathematik I

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 1 handgeschriebenes Blatt (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen). Alle anderen Hilfsmittel (auch Taschenrechner) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte).

Viel Erfolg!

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt	Bonus	total	Note
Punkte	9	9	9	10	8	45	5	50	
erreicht									

bitte wenden

Aufgabe 1: (9 Punkte)

a) Berechnen Sie $\sum_{j=2}^{5} \prod_{k=1}^{j} k$.

b) Gegeben sei die Funktion $r(x) = \dfrac{8x^6 + 3x^2 - 5}{(ax^2+1)^m}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$.

Wie sind a und m zu wählen, damit $\lim_{x \to \infty} r(x) = 1$ gilt?

c) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \exp\left(\sqrt{1-2x}\right)$.

(1) Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich von f.

(2) Untersuchen Sie f auf strenge Monotonie.

(3) Besitzt f eine Umkehrfunktion? Falls ja, so bestimmen Sie diese.

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms.

b) Bestimmen Sie eine ONB von $E = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat $\vec{c}_\lambda$ von $E = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ den Abstand 2 ?

Aufgabe 3: (9 Punkte)

In dieser Aufgabe bezeichnet i die imaginäre Einheit.

a) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = r(\cos(2t) + i\sin(2t)),\ 1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2} \right\} .$$

b) Berechnen Sie $\ln\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$.

c) Es sei $p(z) = z^5 + 4z^3 + 8z^2 + 32$. Zeigen Sie, dass $z_1 = -2i$ eine Nullstelle von $p(z)$ ist. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von $p(z)$. Geben Sie diese sowohl in der exponentiellen als auch in der algebraischen Darstellung an.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Es sei $h(x, y) = \ln(4 - xy)$.

a) Skizzieren Sie den maximalen Definitionsbereich zu h.

b) Ermitteln Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von h.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte von h.

d) Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 zu $h(x, y)$ an der Stelle $(2, 1)$.

Aufgabe 5: (8 Punkte)

a) Berechnen Sie die Taylor-Reihe zu $f(x) = \ln(1 + 2x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Welchen Konvergenzbereich besitzt diese Reihe?

b) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$.