Universität Konstanz Dr. E. Luik

Fachbereich Mathematik
und Statistik

4. März 2019

Klausur zur **Mathematik I**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 1 handgeschriebenes Blatt (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen). Alle anderen Hilfsmittel (auch Taschenrechner) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte).

Viel Erfolg!

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt	Bonus	total	Note
Punkte	7	10	10	11	7	45	5	50	
erreicht									

bitte wenden

Aufgabe 1: (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin(3x)}{2x}$.

b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=2}^{8} \binom{8}{k} 3^k (-1)^{8-k}$.

c) Ermitteln Sie von der Funktion $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x+1}$ eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

a) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte $A(2|3|5)$, $B(4|4|4)$ und $C(3|5|4)$ gegeben.

(1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken A, B, C.

(2) Es sei E die Ebene durch die drei Punkte A, B, C. Geben Sie die Parameterdarstellung von E an.

(3) Gehört der Nullpunkt zu E (mit Begründung)?

b) Welchen Abstand hat $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ von $U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

Aufgabe 3: (10 Punkte)

In dieser Aufgabe bezeichnet i die imaginäre Einheit.

a) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge

$$M = \{ z \in \mathbb{C} : 1 \le |z - i| \le 2 \text{ und } \operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Im}(z) < 0 \} .$$

b) Die komplexe Zahl u hat die Polarkoordinaten $(r_1, \varphi_1) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$,

die komplexe Zahl v hat die Polarkoordinaten $(r_2, \varphi_2) = \left(3, \frac{\pi}{4}\right)$.

Welche Polarkoordinaten hat dann $u\cdot v$?

c) Es sei $p(z) = z^5 + z^4 - 2z^3 - 8iz^2 - 8iz + 16i$.

(1) Bestimmen Sie ein Polynom $q(z)$ mit $p(z) = (z^2 + z - 2)\cdot q(z)$.

(2) Berechnen Sie alle Nullstellen von $p(z)$. Geben Sie diese in der algebraischen Darstellung an.

Aufgabe 4: (11 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(x-1)y}}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{W}$ zu h. Skizzieren Sie $\mathbb{D}$.

b) Ermitteln Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von h.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 zu $h(x,y)$ an der Stelle $(2,3)$.

d) Bestimmen Sie im Punkt $\vec{a} = (2,3)$ die Richtung $\vec{b}$ und den Wert der maximalen Richtungsableitung.

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Berechnen Sie den Konvergenzbereich und die Grenzfunktion von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (x-1)^{2k} .$$