Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

10. April 2019

Nachklausur zur **Mathematik I**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 1 handgeschriebenes Blatt (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen).
   Alle anderen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy, i-Phone, Tablet, ...) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte).
7. Bonuspunkte gibt es nur für den ersten Versuch.

Viel Erfolg!

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt	Bonus	total	Note
Punkte	8	10	7	11	9	45	5	50	
erreicht									

bitte wenden

Aufgabe 1: (8 Punkte)

a) Es sei $r(x) = \dfrac{8x^6 + 7x^5 + 2x^2 - 12}{(ax^3+1)^m}$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = \dfrac{1}{2}$?

b) Der Punkt P hat die Kugelkoordinaten $(r, \vartheta, \varphi) = \left(\sqrt{8},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$.
Welche kartesischen Koordinaten besitzt dieser Punkt?

c) Eine radioaktive Substanz hat eine Halbwertszeit von 32 Jahren. Nach wie vielen Jahren sind 93.75 % dieser Substanz zerfallen?
(Hinweis: 93.75 % $= \frac{15}{16}$)

Aufgabe 2: (10 Punkte)

a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat der Tetraeder (= dreiseitige Pyramide) mit den Eckpunkten $A(3|2|1)$, $B(4|3|3)$, $C(3|\lambda|1)$ und $D(6|4|2)$ das absolute Volumen 5?

b) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

(1) Welchen Abstand hat $\vec{b}$ von $G = \operatorname{span}\{\vec{a}\}$?

(2) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$ mit $\|\vec{c}\| = 1$, welcher orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

In dieser Aufgabe bezeichnet i die imaginäre Einheit.

a) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \ :\ z = r \cdot e^{i\varphi} + i^2 ,\ 1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4} \right\} .$$

b) Bestimmen Sie den Betrag von $u = \dfrac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^7}$.

c) Es sei $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$. Berechnen Sie $\ln(z)$ und $\sqrt{z}$ (in der algebraischen Darstellung).

Aufgabe 4: (11 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = \ln\big(4 - (x+y)^2\big)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{W}$ von h. Skizzieren Sie $\mathbb{D}$.

b) Ist h injektiv (mit Begründung)?

c) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von h.

d) Bestimmen Sie zu h das Taylor-Polynom vom Grad 2 an der Stelle $(1,0)$.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+4}{x^2-4}\,dx$.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe zu

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. Welchen Konvergenzbereich besitzt diese Reihe?