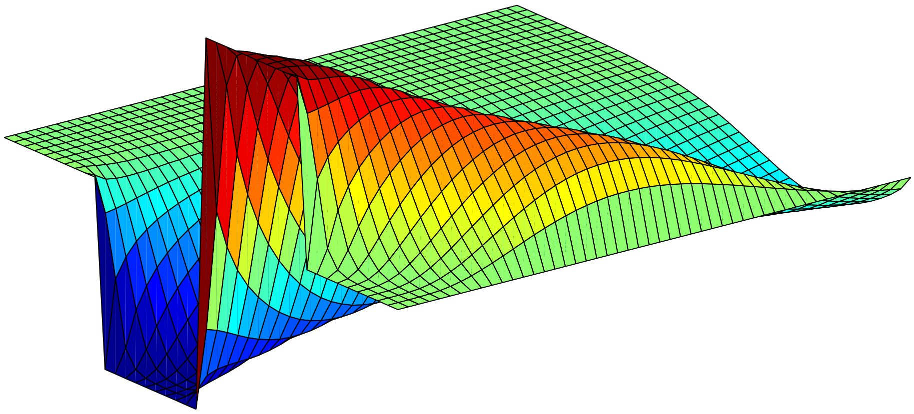
Sktiprum zur Vorlesung

Analysis I

Private Mitschrift



Eindimensionale Differenzial- & Integralrechnung

gelesen von

Prof. Dr. Michael Junk

Martin Gubisch

Konstanz, Wintersemester 2005/2006

Inhaltsverzeichnis

1. Der Körper der reellen Zahlen

1.1. Die Axiome von $\mathbb{R}$

Axiom 1.1. (Existenz von $\mathbb{R}$)

(R0) Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$, deren Elemente reelle Zahlen heißen und die folgende Eigenschaften hat: $\Diamond$

Axiom 1.2. (Körperaxiome der Addition)

Zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ wird eindeutig ein drittes Element $x + y \in \mathbb{R}$ zugeordnet mit:

(A1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(A2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = y + x$.

(A3) Es existiert ein neutrales Element der Addition $0 \in \mathbb{R}$, so dass $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A4) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein additiv inverses Element $-x \in \mathbb{R}$ mit $(-x) + x = 0$. $\Diamond$

Satz 1.3.

1. Das neutrale Element der Addition ist eindeutig bestimmt. Wir nennen es die Null in $\mathbb{R}$.
2. Zu jeder reellen Zahl existiert *genau ein* additiv inverses Element.

Beweis.

1. Seien 0 und $0'$ neutrale Elemente der Addition. Dann gilt:

$$0 + 0' \overset{(A3)}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0' + 0 \overset{(A2)}{=} 0 \overset{(A3)}{=} 0'.$$

2. Seien $(-x)$ und $(-x)'$ additiv invers zu x. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(-x) + x \overset{(A4)}{=} 0 \quad &\Longrightarrow \quad x + (-x) \overset{(A2)}{=} 0 \\
&\Longrightarrow \quad (-x)' + (x + (-x)) = (-x)' + 0 \\
&\Longrightarrow \quad (-x)' + (x + (-x)) \overset{(A3)}{=} (-x)' \\
&\Longrightarrow \quad ((-x)' + x) + (-x) \overset{(A1)}{=} (-x)' \\
&\Longrightarrow \quad 0 + (-x) \overset{(A4)}{=} (-x)' \\
&\Longrightarrow \quad (-x) + 0 \overset{(A2)}{=} (-x)' \\
&\Longrightarrow \quad (-x) \overset{(A3)}{=} (-x)'.
\end{aligned}$$

$\square$

Axiom 1.4. (Körperaxiome der Multiplikation)

Zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ wird eindeutig ein drittes Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zugeordnet mit:

(M1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(M2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.

(M3) Es existiert ein neutrales Element der Multiplikation $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so dass $1x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(M4) Zu jedem $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert ein multiplikativ inverses Element $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $(x^{-1}) \cdot x = 1$. $\Diamond$

Satz 1.5.

1. Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig bestimmt und als Eins bezeichnet.
2. Zu jeder von 0 verschiedenen reellen Zahl existiert *genau ein* multiplikativ inverses Element.

Beweis.

1. Seien 1 und $1'$ neutrale Elemente der Multiplikation. Dann gilt:

$$1 \cdot 1' \overset{\text{(M3)}}{=} 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1' \cdot 1 \overset{\text{(M2)}}{=} 1 \overset{\text{(M3)}}{=} 1'.$$

2. Seien (x^{-1}) und $(x^{-1})'$ multiplikativ invers zu x. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x^{-1}) \cdot x \overset{\text{(M4)}}{=} 1 \quad &\Longrightarrow \quad x \cdot (x^{-1}) \overset{\text{(M2)}}{=} 1 \\
&\Longrightarrow \quad (x^{-1})' \cdot (x \cdot (x^{-1})) = (x^{-1})' \cdot 1 \\
&\Longrightarrow \quad (x^{-1})' \cdot (x \cdot (x^{-1})) \overset{\text{(M3)}}{=} (x^{-1})' \\
&\Longrightarrow \quad ((x^{-1})' \cdot x) \cdot (x^{-1}) \overset{\text{(M1)}}{=} (x^{-1})' \\
&\Longrightarrow \quad 1 \cdot (x^{-1}) \overset{\text{(M4)}}{=} (x^{-1})' \\
&\Longrightarrow \quad (x^{-1}) \cdot 1 \overset{\text{(M2)}}{=} (x^{-1})' \\
&\Longrightarrow \quad (x^{-1}) \overset{\text{(M3)}}{=} (x^{-1})'.
\end{aligned}$$

□

Axiom 1.6. (Körperaxiom der Distributivität)

(D) Distributivgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot z + y \cdot z$. ◊

Bemerkung 1.7.

Zur Abkürzung führen wir die folgenden Schreibweisen ein:

$$x - y = x + (-y), \qquad \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}, \qquad xy = x \cdot y, \qquad x^2 = x \cdot x.$$

◊

Satz 1.8.

Aus den Körperaxiomen lassen sich folgende Eigenschaften der reellen Zahlen folgern:

1. $-0 = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : -(-x) = x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = -x$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
6. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
7. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : (x^{-1})^{-1} = x$.

Beweis.

Zentraler Trick: 0 dazuaddieren bzw. 1 dazumultiplizieren.

1. Es gilt $-0 \overset{\text{(A3)}}{=} -0 + 0 \overset{\text{(A4)}}{=} 0$.
2. Es gilt $-(-x) \overset{\text{(A3)}}{=} -(-x) + 0 \overset{\text{(A4)}}{=} -(-x) + (-x + x) \overset{\text{(A1)}}{=} (-(-x) + (-x)) + x \overset{\text{(A4)}}{=} 0 + x \overset{\text{(A2)}}{=} x + 0 \overset{\text{(A3)}}{=} x$.
3. Wegen
$$0 \cdot x \overset{\text{(A3)}}{=} (0 + 0) \cdot x \overset{\text{(M2)}}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{\text{(D)}}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0 \overset{\text{(M2)}}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x$$
ist $(-0 \cdot x) + (0 \cdot x) = (-0 \cdot x) + (0 \cdot x) + (0 \cdot x)$; mit (A4) erhalten wir $0 = 0 \cdot x$.
4. Es gilt
$$\begin{aligned}
(-1) \cdot x = -x \Longleftrightarrow x \cdot 1 + (-1) \cdot x = x \cdot 1 + (-x) &\overset{\text{(M2)}}{\Longleftrightarrow} x \cdot 1 + x \cdot (-1) = x \cdot 1 + (-x) \\
&\overset{\text{(D)}}{\Longleftrightarrow} x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 1 + (-x) \overset{\text{(A2)}}{\Longleftrightarrow} x \cdot (-1 + 1) = -x + x \cdot 1 \\
&\overset{\text{(M3)}}{\Longleftrightarrow} x \cdot (-1 + 1) = -x + x \overset{\text{(A4)}}{\Longleftrightarrow} x \cdot 0 = 0 \overset{\text{(M2)}}{\Longleftrightarrow} 0 \cdot x = 0 \overset{\text{(1.8.3)}}{\Longleftrightarrow} 0 = 0.
\end{aligned}$$

5. $(-x)\cdot(-y) \overset{(1.8.4)}{=} (-x)\cdot((-1)\cdot y) \overset{(M1)}{=} ((-x)\cdot(-1))\cdot y \overset{(M2)}{=} ((-1)\cdot(-x))\cdot y \overset{(1.8.4)}{=} (-(-x))\cdot y \overset{(2.)}{=} x\cdot y.$
6. Für $x\in\mathbb{R}$ ist $(-x)\cdot y \overset{(1.8.4)}{=} ((-1)\cdot x)\cdot y \overset{(M1)}{=} (-1)\cdot(x\cdot y) \overset{(1.8.4)}{=} -(x\cdot y).$
7. Sei Œ $x\neq 0$, sonst $x\cdot y = 0\cdot y \overset{(1.8.3)}{=} 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x\cdot y = 0 &\Longleftrightarrow x^{-1}\cdot(x\cdot y) = x^{-1}\cdot 0 \overset{(M1)}{\Longleftrightarrow} (x^{-1}\cdot x)\cdot y = x^{-1}\cdot 0 \overset{(M4)}{\Longleftrightarrow} 1\cdot y = x^{-1}\cdot 0 \\ &\overset{(M2)}{\Longleftrightarrow} y\cdot 1 = 0\cdot x^{-1} \overset{(M3)}{\Longleftrightarrow} y = 0\cdot x^{-1} \overset{(1.8.3)}{\Longleftrightarrow} y = 0. \end{aligned}$$

8. Für $x\neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x \Longleftrightarrow x^{-1}\cdot(x^{-1})^{-1} = x^{-1}\cdot x \overset{(M2)}{\Longleftrightarrow} (x^{-1})^{-1}\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x \overset{(M4)}{\Longleftrightarrow} 1 = 1.$ □

Axiom 1.9. (Anordnungsaxiome)

Es gibt eine Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$, die es erlaubt, zwei Zahlen miteinander zu vergleichen:

(O1) Für je zwei Elemente $x, y\in\mathbb{R}$ gilt $x\leq y$ oder $y\leq x$.

(O2) Für alle $x, y\in\mathbb{R}$ folgt aus $x\leq y$ und $y\leq x$, dass $x=y$.

(O3) Transitivität: $x\leq y$ und $y\leq z$ impliziert $x\leq z$ für alle $x, y, z\in\mathbb{R}$.

(O4) Für alle $x, y, z\in\mathbb{R}$ gilt $x\leq y \Rightarrow z+x\leq z+y$.

(O5) Für alle $\forall x, y, z\in\mathbb{R}$ mit $x\leq y$ und $0\leq z$ folgt $z\cdot x\leq z\cdot y$. ◊

Bemerkung 1.10.

Weitere gebräuchliche Schreibweisen sind:

$$x\geq y :\Leftrightarrow y\leq x, \qquad x<y :\Leftrightarrow x\leq y \text{ und } x\neq y, \qquad x>y :\Leftrightarrow x\geq y \text{ und } x\neq y.$$ ◊

Satz 1.11.

Konsequenzen der Anordnungsaxiome:

1. $\forall x, y\in\mathbb{R} : x\leq y \Rightarrow -y\leq -x.$
2. $\forall x, y, z\in\mathbb{R} : x\leq y$ und $z\leq 0 \Rightarrow z\cdot y\leq z\cdot x.$
3. $\forall x, y\in\mathbb{R} : x\geq 0$ und $y\geq 0 \Rightarrow x\cdot y\geq 0.$
4. $\forall x\in\mathbb{R} : x^2\geq 0.$
5. $0<1.$
6. $\forall x\in\mathbb{R} : 0<x \Rightarrow 0<x^{-1}.$
7. $\forall x, y\in\mathbb{R} : 0<x<y \Rightarrow 0<y^{-1}<x^{-1}.$

Beweis.

1. Seien $x, y\in\mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} x\leq y &\overset{(O4)}{\Longrightarrow} -x+x\leq -x+y \overset{(A4)}{\Longrightarrow} 0\leq -x+y \overset{(O4)}{\Longrightarrow} -y+0\leq -y+((-x)+y) \\ &\overset{(A2)}{\Longrightarrow} -y+0\leq -y+(y+(-x)) \overset{(A1)}{\Longrightarrow} -y+0\leq (-y+y)+(-x) \overset{(A4)}{\Longrightarrow} -y+0\leq 0+(-x) \\ &\overset{(A2)}{\Longrightarrow} -y+0\leq -x+0 \overset{(A3)}{\Longrightarrow} -y\leq -x. \end{aligned}$$

2. Es gilt $z\leq 0 \overset{(1.11.1)}{\Longrightarrow} -0\leq -z \overset{(1.8.1)}{\Longrightarrow} 0\leq -z$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} x\leq y &\overset{(O5)}{\Longrightarrow} (-z)\cdot x\leq(-z)\cdot y \overset{(1.8.4)}{\Longrightarrow} -(z\cdot x)\leq -(z\cdot y) \\ &\overset{(1.11.1)}{\Longrightarrow} -(-(z\cdot y))\leq -(-(z\cdot x)) \overset{(1.8.2)}{\Longrightarrow} z\cdot y\leq z\cdot x. \end{aligned}$$

3. Seien $x\geq 0$ und $y\geq 0$. Dann gilt: $y\geq 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} x\cdot y\geq x\cdot 0 \overset{(M2)}{\Longrightarrow} x\cdot y\geq 0\cdot x \overset{(M2)}{\Longrightarrow} x\cdot y\geq 0.$
4. Im Fall $x\geq 0$ ist gemäß (1.11.3) auch $x\cdot x\geq 0$. Andernfalls gilt

$$x<0 \overset{(1.11.1)}{\Longrightarrow} -x>-0 \overset{(1.8.1)}{\Longrightarrow} -x>0 \overset{(1.11.3)}{\Longrightarrow} (-x)\cdot(-x)>0 \overset{(1.8.5)}{\Longrightarrow} x\cdot x>0.$$

5. $1 \overset{(M3)}{=} 1^2 \overset{(1.11.4)}{\geq} 0$ und $1 \overset{(M3)}{\neq} 0$ ergibt zusammen $1 > 0$.

6. Wegen $x^{-1} \cdot x^{-1} \overset{(1.11.4)}{\geq} 0$ gilt $(x^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot 0 < (x^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot x$, mit (M3) also

$$0 < (x^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot x \overset{(M1)}{\Longrightarrow} 0 < x^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot x) \overset{(M4)}{\Longrightarrow} 0 < x^{-1} \cdot 1 \overset{(M3)}{\Longrightarrow} 0 < x^{-1}.$$

7. Aus (1.11.4) folgt direkt $0 < x^{-1}$ und $0 < y^{-1}$. Noch zu zeigen: $y^{-1} < x^{-1}$.

$$\begin{aligned} x < y &\overset{(O5)}{\Longrightarrow} x^{-1} \cdot x < x^{-1} \cdot y \overset{(M4)}{\Longrightarrow} 1 < x^{-1} \cdot y \overset{(O5)}{\Longrightarrow} y^{-1} \cdot 1 < y^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot y) \\ &\overset{(M3)}{\Longrightarrow} y^{-1} < y^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot y) \overset{(M2)}{\Longrightarrow} y^{-1} < y^{-1} \cdot (y \cdot x^{-1}) \overset{(M1)}{\Longrightarrow} y^{-1} < (y^{-1} \cdot y) \cdot x^{-1} \\ &\overset{(M4)}{\Longrightarrow} y^{-1} < 1 \cdot x^{-1} \overset{(M2)}{\Longrightarrow} y^{-1} < x^{-1} \cdot 1 \overset{(M3)}{\Longrightarrow} y^{-1} < x^{-1}. \end{aligned}$$ □

Axiom 1.12. (Vollständigkeitsaxiom)

Das Vollständigkeitsaxiom sichert die Kontinuumseigenschaft von $\mathbb{R}$. Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir definieren zu A die Menge $S = \{s \in \mathbb{R} : \forall x \in A : x \leq s\}$ der oberen Schranken. Ist $S \neq \emptyset$, so nennen wir A nach oben beschränkt; ein Element $\sigma \in S$ heißt kleinstes Element, falls $\forall s \in S : \sigma \leq s$. Das Vollständigkeitsaxiom lautet nun:

(V) Ist A nach oben beschränkt, dann enthält S ein kleinstes Element. ♢

Satz 1.13. (Lösen einfacher Gleichungen)

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann hat die Gleichung $a + x = b$ die eindeutige Lösung $x = -a + b$.
2. Ist $a \neq 0$, dann hat die Gleichung $a \cdot x = b$ die eindeutige Lösung $x = a^{-1} \cdot b$.

Beweis.

1. Seien $M = \{x \in \mathbb{R} \mid a + x = b\}$ und $L = \{-a + b\}$. Zu zeigen: $M \subseteq L$ & $L \subseteq M$; dann auch $M = L$.
   a) Sei $x \in L$, d.h. $x = -a + b$, da L nur aus $-a + b$ besteht. Dann gilt $x \in M$, d.h. $L \subseteq M$:

$$\begin{aligned} a + x = a + (-a + b) = b &\overset{(A1)}{\Longleftrightarrow} (a + (-a)) + b = b \overset{(A2)}{\Longleftrightarrow} b + (-a + a) = b \\ &\overset{(A4)}{\Longleftrightarrow} b + 0 = b \overset{(A3)}{\Longleftrightarrow} b = b. \end{aligned}$$

   b) Sei $x \in M$ beliebig, dann ist $x \in L$, d.h. $L \subseteq M$:

$$\begin{aligned} a + x = b &\overset{(1.8.1)}{\Longleftrightarrow} -a + (a + x) = -a + b \overset{(A1)}{\Longleftrightarrow} (-a + a) + x = -a + b \\ &\overset{(A4)}{\Longleftrightarrow} 0 + x = -a + b \overset{(A2)}{\Longleftrightarrow} x + 0 = -a + b \overset{(A3)}{\Longleftrightarrow} x = -a + b. \end{aligned}$$

2. Seien $M = \{x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x = b\}$ und $L = \{a^{-1} \cdot b\}$. Zu zeigen: $M = L$.
   a) Sei $x \in L$, d.h. $x = a^{-1}b$. Dann ist auch $x \in M$, also $L \subseteq M$:

$$\begin{aligned} a \cdot x = a \cdot (a^{-1} \cdot b) = b &\overset{(M1)}{\Longleftrightarrow} (a \cdot a^{-1}) \cdot b = b \overset{(M2)}{\Longleftrightarrow} b \cdot (a^{-1} \cdot a) = b \\ &\overset{(M4)}{\Longleftrightarrow} b \cdot 1 = b \overset{(M3)}{\Longleftrightarrow} b = b. \end{aligned}$$

3. Ist hingegen $x \in M$, dann auch $x \in L$ und somit $M \subseteq L$:

$$\begin{aligned} a \cdot x = b &\overset{(1.8.4)}{\Longleftrightarrow} a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b \overset{(M1)}{\Longleftrightarrow} (a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b \\ &\overset{(M4)}{\Longleftrightarrow} 1 \cdot x = a^{-1} \cdot b \overset{(M2)}{\Longleftrightarrow} x \cdot 1 = a^{-1} \cdot b \overset{(M3)}{\Longleftrightarrow} x = a^{-1} \cdot b. \end{aligned}$$ □

Bemerkung 1.14.

$x \in \mathbb{R}$ heißt eine Lösung der Gleichung $a + x = b$, wenn es in der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\xi \in \mathbb{R} \mid a + \xi = b\}$ liegt. Entsprechend ist $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $ax = b$, wenn $x \in \mathbb{L} = \{\xi \in \mathbb{R} \mid a\xi = b\}$ erfüllt ist. ♢

1.2. Der Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$

Definition 1.15.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist der Betrag oder Absolutbetrag definiert als

$$|x| = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1.16.

$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ heißt der Abstand oder die Distanz zwischen x und y. $\lozenge$

Satz 1.17.

Eigenschaften des Absolutbetrags:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$. (Positivität)
2. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (Definitheit)
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x||y|$. (Multiplikativität)
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$. (Dreiecksungleichung)

Beweis.

1. Sei $x \in \mathbb{R} \overset{(O1)}{\Longrightarrow} x \leq 0$ oder $0 \leq x$. Unterscheide:
   a) $0 \leq x \overset{(1.15)}{\Longrightarrow} |x| = x \geq 0$.
   b) $x < 0 \overset{(1.15)}{\Longrightarrow} |x| = -x$ und $0 < x \overset{(1.11.1)}{\Longrightarrow} -0 < -x \overset{(1.15)}{\Longrightarrow} |x| = -x > 0$.
2. Sei $x = 0$. Dann $|x| = |0| \overset{(1.15)}{=} 0$. Ist umgekehrt $|x| = 0$, dann $x = 0$ oder $x = -0 \overset{(1.11.1)}{\Longrightarrow} x = 0$.
3. Unterscheide die vier Fälle: $y \geq 0$ & $y \geq 0$, $x \geq 0$ & $y < 0$, $x < 0$ & $y \geq 0$ sowie $x < 0$ & $y < 0$.
   a) $|xy| \overset{(1.11.3)}{=} xy \overset{(1.15)}{=} |x||y|$.
   b) Wegen $y \leq 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} xy \leq x0 \overset{(1.11.3)}{=} 0$ ist $|xy| = -xy \overset{(M2)}{=} -yx \overset{(1.8.4)}{=} (-y)x \overset{(1.15)}{=} |y||x|$.
   c) Analog zu (b): Vertausche x und y.
   d) Zunächst gilt $-(-x) + (-x) = 0 \overset{(1.3)}{\Longrightarrow} x = -(-x)$: Inverse sind eindeutig. Also:
   $$|xy| = |-(-xy)| \overset{(M1,M2)}{=} |(-x)(-y)| \overset{(a)}{=} |-x||-y| \overset{(1.15)}{=} (-x)(-y) \overset{(1.15)}{=} |x||y|.$$
4. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 1.18 folgen dann $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$. Dann gilt:
   $$-(|x| + |y|) \overset{(D)}{=} -|x| + (-|y|) \overset{(O4)}{\leq} x + (-|y|) \overset{(O4)}{\leq} x + y \overset{(O4)}{\leq} |x| + y \overset{(O4)}{\leq} |x| + |y|.$$
   Wiederum mit Lemma 1.18 folgt $|x + y| \leq |x| + |y|$. $\square$

Lemma 1.18.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-|x| \leq x \leq |x|$.
2. Ist $-a \leq x \leq a$ für ein $a \geq 0$, dann gilt: $|x| \leq a$.

Beweis.

1. Wieder per Fallunterscheidung: Sei zunächst $x \geq 0$. Dann $-|x| \overset{(1.15)}{=} -x \leq 0 \leq x \overset{(1.15)}{=} |x| \leq |x|$. Ist dagegen $x < 0$, dann $-|x| = -(-x) = x \leq x < 0 \leq -x = |x| \leq |x|$.
2. Sei $-a \leq x \leq a$. Ist $x \geq 0$, dann $|x| = x \leq a$; andernfalls $(x < 0)$ gilt $|x| = -x \leq -(-a) = a$.

Korollar 1.19. (Umgekehrte Dreiecksungleichung)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Abschätzung $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Beweis.

Es gelten:

$$\begin{aligned} |x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \quad &\Longrightarrow \quad |x| - |y| \leq |x-y| \\ |y| = |y-x+y| \leq |y-x| + |x| \quad &\Longrightarrow \quad |y| - |x| \leq |x-y|. \end{aligned}$$

Zusammen: $-|x-y| \leq -(|y| - |x|) = |x| - |y| \leq |x-y|$ und Lemma 1.18 liefert die Behauptung. □

1.3. Induktive Mengen und vollständige Induktion

Bemerkung 1.20.

Nach den Körperaxiomen haben wir bisher nur die Existenz der drei (verschiedenen) Zahlen $0, 1, -1$ gesichert. Wir setzen $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ u.s.w.. Wegen $0 < 1$ folgt mit (O4), dass $1 = 1 + 0 < 1 + 1 = 2$, also ist 2 von 0 und 1 verschieden. Dies gilt auch für $3, 4, \ldots$. So lassen sich aber nur *endlich* viele Zahlen konstruieren. Zur Konstruktion *aller* "natürlicher" Zahlen benutzen wir folgendes Prinzip: ◊

Definition 1.21.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls $1 \in M$ und $x + 1 \in M$ für alle $x \in M$.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv} : x \in M\} = \bigcap \Big\{ M \;\Big|\; M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv} \Big\}.$$

Bemerkung 1.22.

1. $\mathbb{R}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ sind induktiv.
2. $\mathbb{N}$ ist induktiv: Wegen $1 \in M$ für alle induktiven Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist $1 \in \mathbb{N}$. Weiter gilt zu $x \in \mathbb{N}$, dass $x \in M$ für alle induktiven Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist per Definition auch $x + 1 \in M$ für alle die Mengen, d.h. $x + 1 \in \mathbb{N}$. Somit besitzt $\mathbb{N}$ die beiden Eigenschaften einer induktiven Menge.
3. $\mathbb{N}$ ist die "kleinste" induktive Menge: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ induktiv, dann gilt $\mathbb{N} \subseteq M$. ◊

Bemerkung 1.23. (Vollständige Induktion)

Um Aussagen der Form $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ zu beweisen, genügt es wegen

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\} = \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$$

die Induktivität der Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$ nachzuweisen, d.h. zu zeigen:

1. $A(1)$ ist wahr, der Induktionsanfang, und
2. $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, der Induktionsschritt. $A(n)$ wird dabei als Induktionsannahme oder Induktionsvoraussetzung bezeichnet. ◊

Bemerkung 1.24. (Gaußsche Summenformel)

Per vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. ◊

Satz 1.25.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation, d.h.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}.$$

Beweis.

1. Wir setzen $M_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt
$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N} \iff \forall m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N} \iff \forall m \in \mathbb{N} : M_m = \mathbb{N}.$$
Per Definition von M_m ist klar: $M_m \subseteq \mathbb{N}$. Wir müssen also noch zeigen: $\mathbb{N} \subseteq M_m$. Dazu genügt es laut Bemerkung 1.22 nachzuweisen, dass M_m induktiv ist.
   a) Da $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ induktiv, ist auch $1 + m \in \mathbb{N}$, also $1 \in M_m$.
   b) Sei $n \in M_m$. Dann $m + n \in \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv, also $(m + n) + 1 = n + (n + 1) \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in M_m$.

   Also ist M_m für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ induktiv und es gilt somit auch $\mathbb{N} \subseteq M_n$, insgesamt also $M_m = \mathbb{N}$.
2. Sei wieder $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wenden hier das Induktionsprinzip an auf die Aussagen $A(n) : mn \in \mathbb{N}$:
   a) Induktionsanfang: $A(1) : m1 \in \mathbb{N}$ ist wahr, da nach (M3) $m1 = m \in \mathbb{N}$.
   b) Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$, d.h. sei $A(n)$ wahr. Wir zeigen: Dann ist auch $A(n + 1)$ wahr. Gelte also $A(n) : mn \in \mathbb{N}$. Dann ist $m(n + 1) = mn + m \in \mathbb{N}$ nach (1), da sowohl mn als auch m nach Annahme in $\mathbb{N}$ liegen. □

Bemerkung 1.26. (Rekursive Definitionen)

Wir benutzen das Induktionsprinzip, um beliebige Potenzen a^n mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ zu definieren:
$$a^0 = 1 \ \& \ a^{n+1} = a \cdot a^n, \qquad \text{analog} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ für } a \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$
Dann lassen sich auch die Potenzgesetze
$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} :\ \ \forall p, q \in \mathbb{N} :&\quad a^p a^q = a^{p+q}, \\ \forall a \in \mathbb{R} :\ \ \forall p, q \in \mathbb{N} :&\quad (a^p)^q = a^{pq}, \\ \forall a, b \in \mathbb{R} :\ \ \forall p \in \mathbb{N} :&\quad (ab)^p = a^p b^p \end{aligned}$$
per Induktion zeigen. Wir beweisen hier nur die erste Gleichung: Seien $a \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$, dann gelten
$$a^p a^1 = a^p(aa^0) = a^p(a1) = aa^p = a^{p+1} \quad \& \quad a^p a^{q+1} = a^p(aa^q) = a(a^p a^q) = aa^{p+q} = a^{(p+q)+1}. \qquad \Diamond$$

Bemerkung 1.27.

Induktionsbeweise müssen nicht mit dem Induktionsanfang $n = 1$, d.h. dem Nachweis $A(1)$, starten. ◊

Satz 1.28. (Bernoullische Ungleichung)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und alle $x \in \mathbb{R}^\times$ mit $x > -1$ gilt die Ungleichung $(1 + x)^n > 1 + nx$.

Beweis.

1. Induktionsanfang: $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, da $x^2 > 0$.
2. Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für ein n, dann
$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (a + x)(a + x)^n > (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 > 1 + nx + x = 1 + (n + 1)x. \end{aligned}$$
□

Bemerkung 1.29. (Summen- & Produktzeichen)

Seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \{1, ..., N\}$. Dann setzen wir
$$\sum_{n=m}^{N} a_n = 0 \text{ für } N < m \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=m}^{N+1} a_n = \left(\sum_{n=m}^{N} a_n\right) + a_{N+1} \text{ für } N > m - 1;$$
$$\prod_{n=m}^{N} a_n = 1 \text{ für } N < m \qquad \text{und} \qquad \prod_{n=m}^{N+1} a_n = \left(\prod_{n=m}^{N} a_n\right) a_{N+1} \text{ für } N > m - 1,$$
d.h. $\sum_{n=m}^{N} a_n = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_N$ und $\prod_{n=m}^{N} a_n = a_m a_{m+1} \cdots a_N$. ◊

Bemerkung 1.30. (Ganze und rationale Zahlen)

Wir definieren weitere Teilmengen der reellen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_0 \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} : x = \frac{p}{q} \right\},$$

wobei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gelten:

1. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sind abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.
2. Die rationalen Zahlen erfüllen die Körper- und Anordnungsaxiome, d.h. $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.
3. $\mathbb{Z}$ ist kein Körper, beispielsweise besitzt $2 \in \mathbb{Z}$ kein multiplikativ inverses Element. $\Diamond$

Satz 1.31. (Arithmetisches Mittel)

Sei K ein angeordneter Körper mit $a, b \in K$, $a < b$. Dann gelten $\frac{a+b}{2} \in K$ und $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Beweis.

Es gilt $2a = (1+1)a = 1a + 1a = a + a < a + b < b + b = (1+1)b = 2b$. Mit $2 > 0$ folgt also $\frac{1}{2} = 2^{-1} > 0$, d.h. $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$. $\square$

Bemerkung 1.32.

1. Insbesondere gilt für angeordnete Körper: $\forall a, b \in K, a < b : \exists x \in K : a < x < b$, d.h. angeordnete Körper sind dicht. Zwischen zwei verschiedenen reellen bzw. rationalen Zahlen liegt also stets eine weitere reelle bzw. rationale Zahl.
2. Es gilt die Ungleichung zwischen arithmetischem, geometrischem und harmonischem Mittel:
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ : \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$
Auch diese Abschätzungen lassen sich per vollständiger Induktion beweisen. $\Diamond$

1.4. Schranken, Supremum & Infimum

Bemerkung 1.33.

Per Widerspruchsbeweis zeigt man leicht, dass die Gleichung $x^2 = 2$ keine rationale Lösung $x \in \mathbb{Q}$ besitzt. Ein Kandidat für eine reelle Lösung wäre das "größte Element" der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\&\, x^2 \leq 2\}$. $\Diamond$

Definition 1.34.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von A, wenn $x \leq M$ für alle $x \in A$ gilt. Besitzt A eine obere Schranke, so ist A nach oben beschränkt. Existiert eine kleinste obere Schranke von A, so wird diese als Supremum $\sup(A)$ von A bezeichnet.

Bemerkung 1.35.

Das Vollständigkeitsaxiom garantiert die Existenz einer kleinsten oberen Schranke. $\Diamond$

Beispiel 1.36.

Unser Kandidat für die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist $w = \sup(A) = \sup\{x \in [0, \infty) \mid x^2 \leq 2\}$. Wir brauchen dazu: $A \neq \emptyset$ ist nach oben beschränkt. Wegen $1^2 \leq 2 \Rightarrow 1 \in A$ ist $A \neq \emptyset$ und A ist z.B. duch 2 nach oben beschränkt, denn $x > 2 \Rightarrow x^2 > 2^2 = 4 > 2$. Also sind die Voraussetzungen des Vollständigkeitsaxioms erfüllt.

Noch zu zeigen: $w^2 = 2$. Wir weisen dazu nach, dass $w^2 < 2$ und $w^2 > 2$ falsch sind. Angenommen, $w^2 < 2$. Sei $\delta = \min\{1, \frac{2-w^2}{2(2w+1)}\} > 0$. Dann gilt

$$(w+\delta)^2 = w^2 + 2w\delta + \delta^2 \overset{\delta\leq 1}{\leq} w^2 + 2w\delta + \delta = w^2 + (2w+1)\delta \overset{\delta\leq\frac{2-w^2}{2(2w+1)}}{\leq} \frac{w^2+2}{2} \overset{(1.31)}{<} 2.$$

Also liegt $w+\delta$ in A, denn $w+\delta \geq 1$, d.h. $w+\delta \in [0,\infty)$, und $(w+\delta)^2 \leq 2$. Außerdem ist $w+\delta > w$ im Widerspruch dazu, dass w eine obere Schranke von A ist. Damit muss $w^2 \geq 2$ gelten.

Angenommen, $w^2 > 2$. Sei $\delta = \min\{\frac{w^2-2}{4w}, \frac{w}{2}\}$. Dann gilt:

$$(w-\delta)^2 = w^2 - 2w\delta + \delta^2 \overset{\delta^2\geq 0}{\geq} w^2 - 2w\delta \overset{\delta\geq\frac{2-w^2}{4w}}{\leq} \frac{2+w^2}{2} \overset{(1.31)}{>} 2.$$

Da $w \leq \frac{w}{2}$, ist außerdem $w-\delta > 0$ und damit eine obere Schranke von A: Gäbe es ein $x \in A$ mit $x > w-\delta$, dann $x^2 = xx > (w-\delta)x > (w-\delta)(w-\delta) = (w-\delta)^2 > 2$, ein Widerspruch. Da weiter $w-\delta < w$ gilt, kann w nicht kleinste obere Schranke von A sein im Widerspruch zu unserer Annahme. Damit gilt $w^2 = \delta$.

w ist also sogar eindeutige positive Lösung von $x^2 = 2$, denn gäbe es eine weitere Lösung $v \in [0,\infty)$ mit $v^2 = 2$, dann müsste $v > w$ oder $w > v$ gelten. Beides haben wir eben ausgeschlossen. Wir setzen $\sqrt{2} = w$, d.h. $\sqrt{2}$ ist die eindeutige positive Lösung von $x^2 = 2$. $\Diamond$

Bemerkung 1.37.

Mengen können beschränkt sein, ohne dass in ihnen eine kleinste obere Schranke liegt. Betrachte zum Beispiel $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. Dann ist $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} = 2 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. $\Diamond$

Satz 1.38. (Charakterisierung des Supremums)

Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$s = \sup(A) \Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq s \text{ und } \forall \epsilon > 0 : \exists a \in A : s - \epsilon < a.$$

Beweis.

1. Sei zunächst $s = \sup(A)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} s = \sup(A) \quad &\Longrightarrow \quad \forall a \in A : a \leq s \text{ und } s \text{ ist kleinste obere Schranke von } A \\ &\Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : s - \epsilon < s \text{ ist keine obere Schranke von } A \\ &\Longrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R} : a > s - \epsilon. \end{aligned}$$

2. Zur anderen Implikation: Wegen $\forall a \in A : a \leq s$ ist s eine obere Schranke von A, also $s \geq \sup(A)$. Wir zeigen $s = \sup(A)$, indem wir $s > \sup(A)$ ausschließen. Wäre $s > \sup(A)$, dann $\epsilon = s - \sup(A) > 0$, d.h. es gäbe ein $a \in A$ mit $a > s - \epsilon = \sup(A)$ im Widerspruch dazu, dass $\sup(A)$ eine obere Schranke von A ist. $\square$

Satz 1.39.

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Dann gilt $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$, wobei wir setzen

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, b \in B : a + b = c\}.$$

Beweis.

Da $A, B \neq \emptyset$, ist auch $A+B \neq \emptyset$ und zu $c \in A+B$ existieren $a \in A$, $b \in B$ mit $c = a+b \leq \sup(A)+\sup(B)$. Also ist $\sup(A) + \sup(B)$ eine obere Schranle von $A + B$; insbesondere existiert $\sup(A + B)$. Nutze nun Satz 1.38: Zu $\delta > 0$ und $\epsilon = \frac{\delta}{2} > 0$ existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $a > \sup(A) - \epsilon$ und $b > \sup(B) - \epsilon$, also $c = a + b > \sup(A) + \sup(B) - 2\epsilon = \sup(A) + \sup(B) - \delta$. Damit gilt

$$\forall c \in A + B : c \leq \sup(A) + \sup(B) \text{ und } \forall \delta > 0 : \exists c \in A + B : c > \sup(A) + \sup(B) - \delta.$$

Also sind die Voraussetzungen zu Satz 1.38 erfüllt, d.h. es gilt $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$. $\square$

Bemerkung 1.40.

Analog zum Supremum definieren wir das "Infimum", also die größte untere Schranke, einer Menge: ◊

Definition 1.41.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke von A, wenn $m \leq x$ für alle $x \in A$ gilt. Besitzt A eine untere Schranke, so ist A nach unten beschränkt. Existiert eine größte untere Schranke von A, so wird diese als Infimum $\inf(A)$ von A bezeichnet.

2. Folgen, Reihen und Funktionen

2.1. Konvergenz und Grenzwert

Beispiel 2.1.

Wir wollen die eindeutige positive Lösung $\sqrt{2} = \sup\{x \in [0, \infty) \mid x^2 \leq 2\}$ der Gleichung $x^2 = 2$ konstruktiv berechnen. $\sqrt{2}$ liegt im Intervall $[1, 2]$, denn da $\sqrt{2}$ eine kleinste obere Schranke der Menge $A = \{x \in [0, \infty) \mid x^2 \leq 2\}$ ist, gilt $1 \in A$, d.h. $\sqrt{2} > 1$, und 2 ist eine obere Schranke von A, also $\sqrt{2} \leq 2$.

Wir verkleinern das Intervall $[1, 2]$ durch Halbierung: Setze $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2}$, dann $c_0^2 = \frac{9}{4} > 2$, d.h. c_0 ist eine obere Schranke von A. Also ist $\sqrt{2} \in [a_0, c_0] = [1, \frac{3}{2}] = [a_1, b_1]$. Wir halbieren nochmal: $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{5}{4}$, also $c_1^2 = \frac{25}{16} < 2$, d.h. $c_1 \in A$ und damit $\sqrt{2} \in [c_1, b_1] = [\frac{25}{16}] = [a_2, b_2]$ u.s.w.. Wir stellen fest: $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$: die Intervallhalbierung liefert eine Intervallschachtelung.

Für die Intervallbreite $B(n)$ des n-ten Intervalls erhalten wir damit:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : B(n) = |b_n - a_n| = \frac{1}{2^n};$$

der Beweis erfolgt wie üblich über Induktion. Die Intervalle werden dabei rekursiv konstruiert:

$$\begin{matrix} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \end{matrix} \qquad c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & c_n^2 > 2 \\ c_n & c_n^2 \leq 2 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & c_n^2 > 2 \\ b_n & c_n^2 \leq 2 \end{cases}$$

Damit erhalten wir auch eine Fehlerabschätzung:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt{2} \in [a_n, b_n] \text{ und } c_n \in [a_n, b_n] \qquad \Longrightarrow \qquad |c_n - \sqrt{2}| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Zum Beispiel erhalten wir $|c_{31} - \sqrt{2}| < 2^{-31} < 5 \cdot 10^{-9}$, d.h. bei $c_{31} = 1,414213563...$ stimmen immerhin die ersten 8 Nachkommastellen. Genaueres Ergebnis: bei 1,4142135623730950488016887242097 stimmen 30 Nachkommastellen. Ab $n = 70$ erhält man 20 korrekte Nachkommastellen; für $n = 1120$ sind es 321. Zur praktischen Berechnung ist die Genauigkeit der approximativen Lösung gemessen am Aufwand bzw. der Anzahl an benötigten Iterationen nicht zufriedenstellend; es gibt wesentlich effizientere Verfahren.

Definition 2.2.

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird reelle Zahlenfolge genannt. Die Funktionswerte $a(n)$ bezeichnet man auch mit a_n. Die traditionelle Schreibweise für eine Folge mit Werten a_n ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen (bzw. approximiert) ein $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jeder Genauigkeitsvorgabe $\epsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder höchstens um ϵ von a abweichen. Wir schreiben dann $\lim a_n = a$ bzw. $a_n \longrightarrow a$ und nennen a den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In formaler Schreibweise:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so nennen wir sie konvergent, andernfalls divergent.

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im Beispiel besitzen die folgenden Eigenschaften:

$$a_n \leq a_{n+1}, \text{ d.h. } (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist monoton wachsend.}$$
$$b_n \geq b_{n+1}, \text{ d.h. } (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist monoton fallend.}$$

Weiter gilt $|c_n - \sqrt{2}| \geq |c_{n+1} - \sqrt{2}|$ d.h. die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Residuen $d_n = |c_n - \sqrt{2}|$ ist ebenfalls monoton fallend. Weiterhin gilt $|c_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ weicht nur beliebig wenig von $\sqrt{2}$ ab, wenn n groß genug ist: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \max\{\frac{1}{\epsilon}, 1\}$, dann gilt mit der Bernoullischen Ungleichung 1.28:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |c_n - \sqrt{2}| = 2^{-n} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon. \qquad \lozenge$$

Satz 2.3. (Archimedisches Prinzip)

Seien a, b beliebige reelle Zahlen mit $a, b > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $na > b$ ist.

Beweis.

Angenommen, es gibt $a, b > 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : an \leq b$, d.h. die Menge $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist (durch b) nach oben beschränkt. Offensichtlich ist A nichtleer, da $a \in A$, also existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom 1.12 das Supremum $s = \sup(A)$ von A. Da $a > 0$, gibt es nach der Charakterisierung des Supremums 1.38 ein $x \in A$, $x = ma$ für ein $m \in \mathbb{N}$, mit $x > s - a$. Also ist $s < x + a = ma + a = (m+1)a \in A$, was nicht sein kann, da s obere Schranke von A ist. □

Korollar 2.4.

Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Wir bezeichnen solche Folgen als Nullfolgen.

Beweis.

Sei $\epsilon > 0$. Setze $a = 1$ und $b = \frac{1}{\epsilon}$, d.h. $a, b > 0$. Nach dem Archimedischen Prinzip 2.3 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $Na > b$, d.h. $N \geq \frac{b}{a} = \frac{1}{\epsilon}$, d.h. für $n \geq N$ gilt $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$. Damit ist $\lim \frac{1}{n} = 0$. □

Satz 2.5.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann gelten die folgenden beiden Eigenschaften:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, d.h. es gibt ein $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis.

1. Sei $\lim a_n = a$. Zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h.
$$\forall n \geq N : |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + \frac{1}{2}.$$
Sei $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + \frac{1}{2}\}$. Dann gilt $|a| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Angenommen, es gibt $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, mit $\lim a_n = a$ und $\lim a_n = b$. Sei $\epsilon = \frac{b-a}{4}$. Dann gibt es $N_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N_a$ und $N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq N_b$. Setze $N = \max\{N_a, N_b\}$, dann ist
$$|b - a| = |b - a_n + a_n - a| \leq |b - a_n| + |a - a_n| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = |b - a|,$$
ein Widerspruch. □

Satz 2.6.

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend & beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend & beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis.

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Seien $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nach Satz 1.38 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > a - \epsilon$, d.h. für alle $n \geq N$ gilt: $|a - a_n| = a - a_n \leq a - a_N < \epsilon$, also $\lim a_n = a$.

2. Die Behauptung folgt mit $\inf A = -\sup(-A)$ aus (1). □

Satz 2.7.

1. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle n und $\lim b_n = 0$, dann ist auch $\lim a_n = 0$.

2. Genau dann konvergiert eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gilt $\lim c_n = c \Longleftrightarrow \lim |c_n - c| = 0$.

3. Zu $(a_n)_{n\geq m}$ definiere die Teilfolge $(a_n)_{n\geq M}$ mit $M \geq m$. Dann gilt: $(a_n)_{n\geq M} \to a \Longrightarrow (a_n)_{n\geq m} \to a$.

   Konvergenz und Grenzwert einer Folge sind also unabhängig von beliebigen endlichen Folgegliedern.

Beweis.

1. Sei $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| = a_n \leq b_n = |b_n - 0| < \epsilon$ für $n \geq N$.

2. Bezeichne $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (|c_n - c|)_{n\in\mathbb{N}}$ die Residuenfolge zu $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gelte $\lim c_n = c$, dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|d_n - 0| = |c_n - c| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Gelte umgekehrt $\lim d_n = 0$, dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - c| = |d_n - 0| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert c.

3. Wenn $(a_n)_{n\geq M}$ gegen a konvergiert, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq M$, mit $|a_n - a| < \epsilon$, falls $n \geq N$. Mit diesem N gilt also für $(a_n)_{n\geq m}$, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für $n \geq N$, also ist auch $\lim a_n = a$. □

Beispiel 2.8.

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $c_n = \frac{4n^3+3n}{n^3-6}$, hat den Grenzwert 4: Zunächst gilt

$$\left|\frac{4n^3 - 3n}{n^3 - 6} - 4\right| = \left|\frac{4n^3 + 3n - 4n^3 + 24}{n^3 - 6}\right| = \left|\frac{3n + 24}{n^3 - 6}\right| \overset{n\geq 2}{=} \frac{3n - 24}{n^3 - 6} \overset{n>24}{\leq} \frac{3n + n}{n^3 - 6} = \frac{4n}{n^3 - 6}.$$

Sei $n \geq 6$, dann ist $n^3 - 6 \geq n^3 - n = n(n^2 - 1) \geq 6(n^2 - 1) = 6n^3 - 6 \geq 6n^2 - 2n^2 = 4n^2$, d.h. $\frac{4n}{n^3-6} \leq \frac{4n}{4n^2} = \frac{1}{n}$. Für $n \geq 24$ erhalten wir daraus:

$$n^3 - 6 > n^3 - n > 6(n^2 - 1) > 4n^2 \ \&\ 3n + 24 \leq 4n \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{4n^3 + 3n}{n^3 - 6}\right| = \frac{3n + 24}{n^3 - 6} < \frac{4n}{4n^2} = \frac{1}{n}.$$

Da $(\frac{1}{n})_{n\geq 24}$ eine Nullfolge ist, folgt mit Satz 2.7, dass $\lim c_n = 4$. ◊

2.2. Die Grenzwertsätze

Bemerkung 2.9. (Konvergenz expliziter Folgen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zentrale Frage: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und falls ja, gegen welchen Grenzwert?

1. Wir versuchen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Verknüpfung elementarer bzw. bekannter, konvergenter Folgen darzustellen, und nutzen die "Grenzwertsätze" 2.10:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{4n-2} = \frac{1 + 3 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{4 - 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{4}.$$

2. Wir stellen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Form $a_n = f(b_n)$ dar mit einer bekannten, konvergenten Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer „stetigen" Funktion f, d.h. mit einer Funktion, die die Vertauschung mit dem Grenzwert zulässt: $\lim a_n = \lim f(b_n) = f(\lim b_n)$. Betrachte z.B. $a_n = \sin(\frac{2\pi}{n+1})$, dann setze $b_n = \frac{2\pi}{n+1}$ und $f = \sin$. Mit den Grenzwertsätzen ist $\lim b_n = 0$, außerdem ist sin stetig, also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin(b_n) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \sin(0) = 0.$$

3. Problematisch: Betrachte die Folge $a_n = (1+\frac{x}{n})^n$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$a_n = \exp\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}}\right),$$

aber es gelten $\lim \ln(1+\frac{x}{n}) = \ln(\lim 1+\frac{x}{n}) = \ln(1) = 0$ und $\lim \frac{1}{n} = 0$. Konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, dann lassen sich die Grenzwertsätze nicht anwenden. Später wenden wir auf solche Folgen den Satz von l'Hopital 4.45 an:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{x}{n}}(-\frac{x}{n^2})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}} = x \implies \lim_{n\to\infty} a_n = e^x. \ \Diamond$$

Satz 2.10. (Grenzwertsätze)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Gelten zusätzlich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Beweis.

Wir bezeichnen im Folgenden mit a den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und mit b den Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$ sowie ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N_2$. Wähle nun $N = \max\{N_1, N_2\}$, dann gilt

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2. Œ sei $c \neq 0$. Zu $\epsilon > 0$ wähle ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}$ für alle $n \geq N$, dann ist

$$|ca_n - ca| = |c(a_n-a)| = |c||a_n-a| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

3. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 2.5 beschränkt, etwa durch $M \in \mathbb{R}^+$. Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_1 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}$ und ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_2 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2|b|}$, also

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| = |a_n(b_n-b) + b(a_n-a)| \\ &\leq |a_n(b_n-b)| + |b(a_n-a)| = |a_n|\,|b_n-b| + |b|\,|a_n-a| \\ &< M\frac{\epsilon}{2M} + |b|\frac{\epsilon}{2|b|} = \epsilon.\end{aligned}$$

4. Wegen (3) genügt es zu zeigen, dass $\lim \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Sei dazu $\epsilon > 0$. Setze $\delta = \min\{\frac{|b|}{2}, \frac{\epsilon|b|^2}{2}\}$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N : |b_n - b| < \delta$. Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung 1.19 gilt dann für alle $n \geq N$:

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \implies |b_n| > \frac{|b|}{2} \implies \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n||b|} < \frac{2}{|b|^2}|b_n-b| < \frac{2}{|b|^2}\delta < \epsilon. \quad \square$$

Bemerkung 2.11. (Konvergenz rekursiver Folgen)

Wir betrachten nun Folgen mit einer Zuordnungsvorschrift $a_n = f(a_0, ..., a_{n-1})$, d.h. jedes Folgenglied wird aus seinen Vorgängern berechnet bei gegebenem Startwert a_0. Zur Bestimmung des Grenzwertes gehen wir in drei Schritten vor:

1. Weise Konvergenz nach, z.B. mittels Satz 2.6 "beschränkt und monoton $\Rightarrow$ konvergent".
2. Nutze die Grenzwertsätze 2.10, um eine Gleichung für den Grenzwert zu bestimmen.
3. Berechne den Grenzwert durch Lösen der Gleichung.

Speziell für rekursive Folgen der Form $a_{n+1} = f(a_n)$ mit stetigem f ist der Grenzwert a gegeben durch die Fixpunktgleichung $a = f(a)$.

Beispiel 2.12. (Bevölkerungsmodell)

Sei x_n die Populationsgröße im Jahr n (nach Volkszählung). Wir betrachten folgendes zeitliches Entwicklungsgesetz (typischerweise rekursiv):

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n = (1 + \alpha - \beta)x_n = \gamma x_n$$

mit $x_0, \alpha, \beta > 0$. Dabei gibt αx_n die Anzahl der Geburten im Jahr n und βx_n die Anzahl der Todesfälle im Jahr n an.

1. Ist $\gamma < 1$, d.h. $\beta > \alpha$, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend: $x_{n+1} = \gamma x_n < x_n$ und außerdem von unten beschränkt durch 0. Also besitzt die Folge einen Grenzwert x. Lösen der zugehörigen Fixpunktgleichung ergibt
$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\gamma x_n) = \gamma \lim_{n\to\infty} x_n = \gamma x \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0,$$
d.h. die Bevölkerung stirbt aus.
2. Ist $\gamma = 1$, dann $x_n = x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Bevölkerungsgröße bleibt konstant.
3. Im Fall $\gamma > 1$, etwa $\gamma = 1 + a$ mit $a > 0$, folgt mit Induktion, dass $x_n \geq x_0(1 + na)$ und mit dem Archimedischen Prinzip 2.3 erhalten wir, dass es zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n > M$, falls $n \geq N$, d.h. $a_n \to \infty$: Die Bevölkerung wächst unbeschränkt.

Beachte: Aus $x_{n+1} = \gamma x_n = \gamma^2 x_{n-1} = \cdots = \gamma^{n+1} x_0$ können wir die explizite Darstellung $x_n = \gamma^n x_0$ der Folge ableiten.

Definition 2.13.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert nach $+\infty$, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n > +M$ für alle $n \geq N$.
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert nach $-\infty$, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n < -M$ für alle $n \geq N$.

Wir schreiben dann $\lim a_n = +\infty$ bzw. $\lim a_n = -\infty$ und nennen die Folge bestimmt divergent oder auch uneigentlich konvergent.

Wir betrachten nun ein verbessertes Modell, in dem die Sterberate bei wachsender Bevölkerung zunimmt (alternativ könnte man eine abnehmende Geburtenrate modellieren), z.B. wegen Nahrungsmittelknappheit, Krankheiten etc.. Wir wandeln dazu den Parameter β ab in $\beta' x_n$, d.h.

$$x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n \left(1 - \frac{\beta'}{1+\alpha} x_n\right) \qquad \text{bzw.} \qquad y_{n+1} = \frac{\beta'}{1+\alpha} x_{n+1} = y_n(1 + \alpha)(1 - y_n)$$

mit $y_n = \frac{\beta'}{1+\alpha} x_n$. Bevor wir die Existenz eines Grenzwertes untersuchen, ermitteln wir, welche Werte für einen möglichen Grenzwert in Frage kommen.

1. Falls $\lim y_n = y$, dann erfüllt y die Gleichung quadratische Gleichung $y = (1 + \alpha)y(1 - y)$.
2. Mögliche Grenzwerte sind also $y = 0$ bzw. $x = 0$, in dem Fall stirbt die Bevölkerung aus, oder $1 = (1 + \alpha)(1 - y)$, d.h. $y = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ und damit $x = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)\beta'} = \frac{\alpha}{\beta'}$, d.h. die Bevölkerungsgröße pendelt sich auf ein Gleichgewicht, auch Equilibrium genannt, ein.

3. Das Konvergenzverhalten der Folge hängt von den Werten α und y_0 ab. Liegt y_0 im Intervall $[0,1]$ und ist $1+\alpha \leq 4 \Leftrightarrow \alpha \leq 3$, dann $y_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. die notwendige Bedingung der Beschränktheit ist erfüllt: Nach Voraussetzung gilt $y_0 \in [0,1]$ und damit auch
$$y_{n+1} = y_n(1-y_n)(1+\alpha) \leq \max_{y_n \in [0,1]} y_n(1-y_n) \max_{\alpha \in [0,3]} (1+\alpha) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y_{n+1} \in [0,1].$$
Gelte nun $\alpha < 1$, d.h. $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{1}{2}$, und $y_0 \leq \frac{\alpha}{1+\alpha}$. Dann ist auch
$$y_{n+1} = (1+\alpha)y_n(1-y_n) \leq (1+\alpha)\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$
und wegen $(1+\alpha)(1-y_n) \geq (1+\alpha)(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}) = 1$ folgt, dass $y_{n+1} \geq y_n$, d.h. die Folge ist monoton. Zusammen ergibt sich: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Für andere Anfangswerte y_0 und Parameter α muss die Folge nicht monoton oder beschränkt sein und ist auch nicht zwingend konvergent. $\Diamond$

Beispiel 2.14. (Klassische Mechanik)

Die gesamte klassische Mechanik führt auf rekursive Folgen. Bezeichne z.B. $x_n \in \mathbb{R}^3$ die Position eines Massepunktes zur Zeit $t_n = n\Delta t$ (mit kleinem Δt) und zugehöriger Geschwindigkeit $v_n \in \mathbb{R}^3$, dann besagt das Newtonsches Gesetz:
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n \;\&\; v_{n+1} = v_n + \Delta t \frac{1}{m} F(t_n; x_n, v_n) \quad \text{bzw.} \quad \dot{x}(t) = v(t) \;\&\; \dot{v}(t) = \frac{1}{m} F(t; x(t), v(t)).$$
Wir erhalten also eine rekursive Folge $(x_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^6$. $\Diamond$

2.3. Teilfolgen und Häufungspunkte

Definition 2.15.

Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Folge $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \ldots$ natürlicher Zahlen existiert, so dass $b_n = a_{\sigma_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim b_n = a$.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel 2.16.

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folgenglieder häufen sich bei ± 1; die Folge ist nicht konvergent, aber es gibt konvergente Teilfolgen $(a_1, a_3, a_5, \ldots) \to +1$ und $(a_2, a_4, a_6, \ldots) \to -1$. Insgesamt ist $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{\pm 1\}$.

Beachte: $\mathrm{HP}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = [0,1]$ ist möglich! Es gilt $\mathrm{HP}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{x\} \Longleftrightarrow \lim x_n = x$. $\Diamond$

Satz 2.17.

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine monotone Teilfolge.

Beweis.

a_N heißt ein dominanter Term, wenn für alle $n > N$ gilt: $a_N > a_n$. Wir unterscheiden die beiden Fälle, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich oder nur endlich viele dominanten Terme hat.

1. Es gibt unendlich viele dominante Terme. Dann definieren wir rekursiv eine monoton fallende Folge dominanter Terme; dies geht, da zu schon konstruierten dominanten Termen $a_{\sigma_1} > a_{\sigma_2} > \ldots > a_{\sigma_n}$ stets ein $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ existiert mit $a_{\sigma_{n+1}}$ dominant. Also ist $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Gibt es nur endlich viele dominante Terme $a_{n_1} > a_{n_2} > ... > a_{n_p}$, dann definieren wir rekursiv eine monoton wachsende Folge: Wähle $\sigma_1 > n_p$ und zu schon konstruierten $a_{\sigma_1} \leq ... \leq a_{\sigma_n}$ mit $\sigma_1 < ... < \sigma_n$ ein $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ mit $a_{\sigma_n} \leq a_{\sigma_{n+1}}$; dies geht, da sonst a_{σ_n} ein weiterer dominanter Term wäre. Also ist $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. $\square$

Satz 2.18. (Satz von Bolzano-Weierstraß)

1. Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.
2. Insbesondere ist $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$ für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis.

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, etwa durch $M > 0$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$. Nach Satz 2.17 gibt es dann eine monotone Teilfolge $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$, für die offensichtlich gilt $|a_{\sigma_n}| \leq M$. Monotone, beschränkte Folgen sind nach Satz 2.6 konvergent.
2. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Nach Satz 2.17 gibt es eine monotone Teilfolge $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ist diese beschränkt, so konvergiert sie, etwa gegen a, und damit $a \in \mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Ist sie dagegen unbeschränkt, dann gilt entweder $a_{\sigma_n} \to +\infty$ (falls die Folge wächst) oder $a_{\sigma_n} \to -\infty$ (falls sie fällt), d.h. $\infty \in \mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ oder $-\infty \in \mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$, in jedem Fall also $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$. $\square$

Satz 2.19.

1. Sei $\lim a_n = a$. Dann gilt $\lim a_{\sigma_n} = a$ für jede Teilfolge $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Haben alle konvergenten Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert a, so gilt: $\lim a_n = a$.

Beweis.

1. Im Fall $a \in \mathbb{R}$ gilt: Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$, falls $n \geq N$. Wegen $\sigma_n \geq n$ gilt dann auch $\sigma_n > N$, falls $n > N$, also $|b_n - a| = |a_{\sigma_n} - a| < \epsilon$ für $n \geq N$, also $\lim b_n = a$.

   Im Fall $a = +\infty$ gilt: Es gibt zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > M$, falls $n > N$, also auch $b_n = a_{\sigma_n} > M$, da $\sigma_n \geq n > N$, d.h. $\lim b_n = \infty$. Der Fall $a = -\infty$ ist analog zu behandeln.
2. Angenommen, $a_n \to a$ wäre falsch, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\sigma > N$ existiert mit $|a_\sigma - a| \geq \epsilon$. Dann gibt es speziell zu $N = 1$ ein $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{\sigma_1} - a| \geq \epsilon$. Seien $\sigma_1 < ... < \sigma_n$ mit $\forall k \in \{1, ..., n\} : |a_{\sigma_k} - a| \geq \epsilon$ schon konstruiert. Dann gibt es zu $N = \sigma_n$ ein $\sigma_{n+1} > N$ mit $|a_{\sigma_{n+1}} - a| \geq \epsilon$, d.h. die Teilfolge $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ hat nach Satz 2.17 eine monotone Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $a \in \mathbb{R}$, kann $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht unbeschränkt sein, also Œ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits konvergent. Gleichzeitig gilt aber $|b_n - a| \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $b_n \to b \neq a$. Wir haben also eine konvergemte Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, die nicht gegen a konvergiert, Widerspruch. $\square$

Bemerkung 2.20. (Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$)

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, d.h. es gibt eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $\forall r \in \mathbb{Q} : \exists N \in \mathbb{N} : r = r_N$.

Betrachte dazu das Schema

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\cdots & -4 & \leftarrow & -3 & & -2 & \leftarrow & -1 & & 0 & \rightarrow & 1 & & 2 & \rightarrow & 3 & & 4 & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \\
\cdots & -\frac{4}{2} & & -\frac{3}{2} & & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \\
\cdots & -\frac{4}{3} & & -\frac{3}{3} & & -\frac{2}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \uparrow & \\
\cdots & -\frac{4}{4} & & -\frac{3}{4} & \leftarrow & -\frac{2}{4} & \leftarrow & -\frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{0}{4} & \leftarrow & \frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{2}{4} & \leftarrow & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \cdots \\
 & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & & \uparrow & \\
\cdots & -\frac{4}{5} & \rightarrow & -\frac{3}{5} & \rightarrow & -\frac{2}{5} & \rightarrow & -\frac{1}{5} & \rightarrow & \frac{0}{5} & \rightarrow & \frac{1}{5} & \rightarrow & \frac{2}{5} & \rightarrow & \frac{3}{5} & \rightarrow & \frac{4}{5} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Die Art der Abzählung impliziert:

1. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Teilfolgen von $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $\{\pm\infty\} \subseteq \mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
2. Für $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ mit $u \in \mathbb{Z}$ und $v \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{nu}{nv} = r_{\sigma_n}$ mit σ_n streng monoton wachsend; da $\lim r_{\sigma_n} = \frac{u}{v}$, folgt $\frac{u}{v} \in \mathrm{HP}((r_n)_{n\in\mathbb{N}})$, also $\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{HP}((r_n)_{n\in\mathbb{N}})$. ◊

Satz 2.21. (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. zu jedem $a \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|a - q| < \epsilon$.

Beweis.

Seien $\epsilon > 0$ und $b = a + \frac{\epsilon}{2}$. Nach dem Prinzip von Archimedes 2.3 gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\epsilon > 1$. Seien $A = na$ und $B = nb$, dann $B - A = n(b-a) = n\frac{\epsilon}{2} > 1$, d.h. zwischen A und B liegt ein $m \in \mathbb{Z}$, also $na = A < m \leq B = nb$, d.h. $a < \frac{m}{n} \leq b = a + \frac{\epsilon}{2}$. Um die Existenz von $m \in \mathbb{Z}$ nachzuweisen, zeigt man: $A < \sup\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq B\} \leq B$. □

Bemerkung 2.22.

Es gilt für die in Bemerkung 2.20 definierten Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Tat $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{HP}((r_n)_{n\in\mathbb{N}})$: Sei dazu $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, gibt es zu $\epsilon = 1$ einen Index $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - r_{\sigma_1}| < 1$. Seien also $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < ... < \sigma_n$ konstruiert mit $|a - r_{\sigma_k}| < \frac{1}{k}$ für $k = 1, ..., n$. Zu $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{|a - r_{\sigma_1}|, ..., |a - r_{\sigma_n}|, 1/(n+1)\}$ gibt es nach Satz 2.21 ein $\sigma_{n+1} \in \mathbb{N}$ mit $|a - r_{\sigma_{n+1}}| < \epsilon < 1/(n+1)$. Wegen $|a - r_m| \geq \epsilon$ für alle $m \leq \sigma_n$ gilt $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ und damit $\lim r_{\sigma_n} = a$, also $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{HP}((r_n)_{n\in\mathbb{N}})$, insgesamt also $\mathrm{HP}((r_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \overline{\mathbb{R}}$. ◊

Bemerkung 2.23.

Wir bezeichnen

$$R_N = \{a_n \mid n \geq N\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N : x = a_n\}$$

als den N-Rest der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gelten:

1. Der N-Rest enthält für jedes $N \in \mathbb{N}$ die komplette Information über alle Häufungspunkte der Folge.
2. Der N-Rest ist beschränkt durch $s_N = \sup R_N$ und $i_N = \inf R_N$ mit $s_N, i_N \in \overline{\mathbb{R}}$.
3. $i_N \leq a_N \leq s_N$ und $s_N \geq s_{N+1}$ sowie $i_N \leq i_{N+1}$, d.h. $i_1 \leq \cdots \leq i_N \leq a_N \leq s_N \leq s_{N+1} \leq \cdots \leq s_1$.
4. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so sind $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ und $(i_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton, also konvergent.
5. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, dann ist auch $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. ◊

Definition 2.24.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer. Wir setzen $\sup A = \infty$, falls A nach oben unbeschränkt ist, und $\inf A = -\infty$, falls A nach unten unbeschränkt ist.

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit N-Rest R_N für $N \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir definieren wir den Limes Inferior und den Limes Superior der Folge durch

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sup R_N, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \inf R_N.$$

Bemerkung 2.25.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gelten:

1. $\limsup a_n \in \mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $\liminf a_n \in \mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ und $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq [\liminf a_n, \limsup a_n]$.
2. Es gilt $\lim a_n = a$ genau dann, wenn $\limsup a_n = a = \liminf a_n$, denn wenn $\lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist, dann folgt $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}$ nach Satz 2.19, also $\limsup a_n = \liminf a_n = a$. Gilt umgekehrt $a = \limsup a_n = \liminf a_n$, dann ist $\emptyset \neq \mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq [a, a] = \{a\}$, also $\lim a_n = a$. ◊

2.4. Cauchyfolgen

Definition 2.26.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine Cauchyfolge, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Bemerkung 2.27.

1. Es reicht nicht, dass die Differenz $|a_{n+1} - a_n|$ zweier aufeinander folgender Glieder beliebig klein wird.
2. Das Vollständigkeitsaxiom 1.12 ist äquivalent dazu, dass in $\mathbb{R}$ jede Cauchyfolge konvergiert.
3. Mittels Cauchyfolgen lassen sich also Konvergenzaussagen treffen, ohne den Grenzwert zu kennen. $\Diamond$

Lemma 2.28.

Cauchyfolgen sind beschränkt.

Beweis.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Zu $\epsilon = 1$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \geq N$. Setze $s = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, dann gilt für $n \geq N$, dass $|a_n| \leq |a_N| + |a_n - a_N| < s$. $\square$

Lemma 2.29.

Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen.

Beweis.

Sei $\lim a_n = a$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N$. Seien nun $n, m > N$, dann ist

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square$$

Satz 2.30.

In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchyfolge konvergent.

Beweis.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wir zeigen: $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}$. Nach Lemma 2.28 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. $\mathrm{HP}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq [\liminf a_n, \limsup a_n] \subseteq \mathbb{R}$. Es genügt also nachzuweisen, dass $\liminf a_n = \limsup a_n$. Sei $\epsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$. Insbesondere ist $a_n - a_m < \epsilon$, also $a_n < a_m + \epsilon$. Damit gilt für alle $n, m \geq N$, dass $\sup R_n \leq a_m + \epsilon$, d.h. $\sup R_n \leq \inf R_m + \epsilon$, also ist speziell $\sup R_n \leq \inf R_n + \epsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt. Wir erhalten daraus $|\sup R_n - \inf R_n| = \sup R_n - \inf R_n < \epsilon$, also $\lim(\sup R_n - \inf R_n) = 0$, d.h. $\limsup R_n = \liminf R_n$, also $\limsup a_n = \liminf a_n$. $\square$

2.5. Reihen

Definition 2.31.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Wir definieren dazu

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{bzw.} s_1 = a_1 \;\&\; s_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe; die Folgenglieder s_n werden als Partialsummen bezeichnet.

Bemerkung 2.32.
Sowohl die Reihe selbst als auch ihr Grenzwert (sofern existent) mit wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. ◊

Beispiel 2.33.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ heißt die harmonische Reihe}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ für ein } q \in \mathbb{R} \text{ heißt geometrische Reihe}.$$ ◊

Satz 2.34. (Cauchykriterium für Reihen)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \quad \iff \quad \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon.$$

Beweis.
Zentrale Idee: Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \Longrightarrow \quad s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

1. Sei zunächst $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s_m| < \epsilon$, falls $n, m > N$. Setze $M = N + 1$ und wähle $\alpha, \beta \geq M$, d.h. $\alpha - 1, \beta \geq N$. Dann gilt:

$$\left| \sum_{k=\alpha}^{\beta} a_k \right| = 0 < \epsilon \text{ für } \alpha > \beta \qquad \text{und} \qquad \left| \sum_{k=\alpha}^{\beta} a_k \right| = |s_\beta - s_{\alpha-1}| < \epsilon \text{ für } \alpha \leq \beta.$$

   Also: existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\alpha, \beta \geq M$ gilt $\left| \sum_{k=\alpha}^{\beta} a_k \right| < \epsilon$.

2. Wähle umgekehrt zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall m, n \geq N : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon$. Seien $m, n \geq N$, dann

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}.$$ □

Satz 2.35.
Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notwendigerweise eine Nullfolge.

Beweis.
Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt: $\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon$. Speziell mit $n = m \geq N$:

$$|a_n| = \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$ □

Satz 2.36.
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beweis.

Zu $\epsilon > 0$. wähle mit dem Cauchykriterium 2.34 ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $m, n \geq N$ gilt $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon$. Dann

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq |a_m| + |a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq \cdots \leq |a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon$$

nach Dreiecksungleichung, wobei $n \geq m \geq N$. Wieder mit Cauchykriterium folgt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. □

Satz 2.37. (Majorantenkriterium für Reihen)

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, d.h. $|a_n| \leq c_n$ für alle n. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis.

Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

□

Beispiel 2.38. (Darstellungsformel für geometrische Reihen)

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Partialsummen der geometrischen Reihe:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n - q(1 + q + q^2 + ... + q^n) = q^0 - q^{n+1};$$

man bezeichnet einen solchen Term als Teleskopsumme. Wir erhalten:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ für } q \neq 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = n+1 \text{ für } q = 1.$$

Speziell ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$, mit Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$. ◊

Beispiel 2.39.

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2^n+1}\right| \leq \frac{1}{2^n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

◊

Satz 2.40. (Minorantenkriterium für Reihen)

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine gegen ∞ divergente Minorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, d.h. $c_n \leq a_n$ für alle n. Dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Beweis.

Bezeichnen A_n, C_n die zu $\sum a_k, \sum c_k$ gehörigen, n-ten Partialsummen. Sei $M > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $A_n \geq M$ für alle $n \geq N$. Nach Voraussetzung ist $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $C_n \geq M$ für alle $n \geq N$. Damit gilt für alle $n \geq N$, dass $A_n \geq C_n \geq M$. Also ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, d.h. $\lim A_n = \sum a_n = \infty$. □

Beispiel 2.41.

1. Eine wichtige divergente Minorante ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 12} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots .$$

   Wir zeigen per Induktion, dass für die Partialsummen A_k gilt: $A_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Für $n = 1$ ist $A_2 = 1 + \frac{1}{2}$. Gelte die Behauptung also für n. Dann ist

$$A_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

   Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und $(A_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach ∞ divergiert, folgt $\lim A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.
2. Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$.
3. Allgemein folgt aus dem Minorantenkriterium: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ für alle $p \geq 1$. ◊

Satz 2.42. (Leibnitzsches Konvergenzkriterium)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Beweis.

Wir benutzen das Cauchysche Konvergenzkriterium 2.34. Es gilt mit Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k = \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^{j+m} a_{j+m} = (-1)^m \underbrace{\sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j a_{m+j}}_{=A} .$$

A besteht aus $n - m + 1$ Summanden; wir zeigen, dass A für hinreichend große m, n beliebig klein wird.

1. Ist $n - m$ ungerade, d.h. die Anzahl der Summanden von A ist gerade, dann gilt $0 \leq A \leq a_m$:

$$A = \underbrace{a_m - a_{m+1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{m+2} - a_{m+3}}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{a_{n-1} - a_n}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \text{und}$$
$$A = a_m \underbrace{-a_{m+1} + a_{m+2}}_{\leq 0} \underbrace{-a_{m+3} + am + 4}_{\leq 0} - \cdots \underbrace{-a_{n-2} + a_{n-1}}_{\leq 0} \underbrace{-a_n}_{\leq 0} \leq a_m.$$

2. Ist $n - m$ gerade, d.h. die Anzahl der Summanden von A ist ungerade, dann gilt ebenfalls $0 \leq A \leq a_m$:

$$A = \underbrace{a_m - a_{m+1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{m+2} - a_{m+3}}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{a_{n-2} - a_{n-1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_n}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \text{und}$$
$$A = a_m \underbrace{-a_{m+1} + a_{m+2}}_{\leq 0} \underbrace{-a_{m+3} + am + 4}_{\leq 0} - \cdots \underbrace{-a_{n-1} + a_n}_{\leq 0} \leq a_m.$$

3. Sei nun $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| < \epsilon$, falls $k \geq N$. Also

$$\left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k \right| = |A| \leq |a_m| < \epsilon \text{ für } n \geq m \geq N \qquad \text{und} \qquad \left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k \right| = 0 < \epsilon \text{ für } m > n.$$

Also ist das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt, d.h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert. □

Bemerkung 2.43.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert (Leibnitzkriterium), ist aber nicht absolut konvergent: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. ◊

Beispiel 2.44.

Nach Leibnitz 2.42 konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ für alle $p > 0$, sogar absolut für $p > 1$: Sei $q = \frac{1}{2^{p-1}}$, dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right| = 1 + \frac{1}{2^p} + \underbrace{\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}}_{\leq \frac{2}{2^p}} + \underbrace{\frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}}_{\leq \frac{4}{4^p}} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

Da $(\sum\limits_{k=1}^{n} |\frac{(-1)^k}{k^p}|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und $(\sum\limits_{k=1}^{2^n} |\frac{(-1)^k}{k^p}|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, ist $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n^p})_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent. ◊

Satz 2.45. (Wurzelkriterium)

Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Dann gelten:

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut,} \qquad \alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Beweis.

1. Setze $R_n = \{|a_m|^{1/m} \mid m \geq n\}$, dann ist $\alpha = \limsup R_n$. Wegen $\alpha < 1$ ist $\epsilon = \frac{1-\alpha}{2} > 0$, es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\alpha - \epsilon < \sup R_n < \alpha + \epsilon$, falls $n \geq N$. Insbesondere gilt für $q = \alpha + \epsilon < 1$, dass $|a_n| \leq (\sup R_n)^n \leq (\alpha + \epsilon)^n = q^n$ für $n \geq N$. Damit ist $\sum q^n$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum |a_n|$; nach dem Majorantenkriterium 2.37 konvergiert $\sum a_n$ somit absolut.
2. Gelte $\alpha > 1$. Da $\alpha \in \mathrm{HP}((|a_n|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}})$, gibt es eine Teilfolge $(|a_{\sigma_n}|^{1/\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim |a_{\sigma_n}|^{1/\sigma_n} = \alpha > 1$. Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{\sigma_n}|^{1/\sigma_n} > 1$, für alle $n \geq N$ und damit auch $|a_{\sigma_n}| > 1$ für alle $n \geq N$, d.h. $\sup \mathrm{HP}((|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}) > 1$. Dann kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber keine Nullfolge sein; mit Satz 2.35 folgt die Divergenz von $\sum a_n$. □

Bemerkung 2.46.

Ist $\alpha = 1$, dann kann die Reihe konvergieren oder divergieren:

1. Für $a_n = \frac{1}{n}$ ist $|a_n|^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.
2. Für $a_n = \frac{1}{n^2}$ gilt ebenfalls $|a_n|^{1/n} = (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2 \to 1$, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert (absolut) gegen 1. ◊

Satz 2.47. (Quotientenkriterium)

Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle n und $\alpha = \liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, $\beta = \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Dann gelten:

$$\beta < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert;} \qquad \alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Beweis.

Wir zeigen:

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

dann folgt die Behauptung aus dem Wurzelkriterium 2.45. Sei dazu Œ $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \frac{a_{n+1}}{a_n} > \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \epsilon \qquad \text{bzw.} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \epsilon.$$

Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $q = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} = a_n && \Longrightarrow && (q-\epsilon)^{n-N} a_N < a_n \\
\Longrightarrow\quad & (q-\epsilon)\sqrt[n]{(q-\epsilon)^{-N} a_N} < \sqrt[n]{a_n} && \Longrightarrow && \liminf_{n\to\infty}((q-\epsilon)\sqrt[n]{(q-\epsilon)^{-N} a_N}) \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\
\Longrightarrow\quad & q-\epsilon \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} && \Longrightarrow && \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Die Abschätzung für $\limsup$ folgt analog. $\square$

Bemerkung 2.48.

Gilt $\alpha \le 1 \le \beta$, dann gilt wie für das Wurzelkriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kann konvergieren oder divergieren. $\diamondsuit$

Beispiel 2.49. (Exponentialreihe)

Für $x \in \mathbb{R}$ beliebig konvergiert die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: Offenbar ist $\exp(0) = 1$, für $x \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

die Konvergenz der Reihe ergibt sich somit mit dem Quotientenkriterium 2.47. $\diamondsuit$

Bemerkung 2.50.

1. Seien $\sum a_n, \sum b_n$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt: $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$.
2. Es gilt die Dreiecksungleichung: $|\sum a_n| \le \sum |a_n|$.
3. Gilt $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $\sum a_n \le \sum b_n$.
4. Seien $\sum a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann konvergiert auch $\sum a_{\tau(n)}$ mit $\sum a_{\tau(n)} = \sum a_n$. $\diamondsuit$

2.6. Funktionen

Definition 2.51.

Eine Funktion f ist ein Tripel $f = (X, Y, x \mapsto y)$, bestehend aus einer Menge X, dem Definitionsbereich, einer Menge Y, dem Bildbereich und einer Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$, die *jedem* Element aus X *genau ein* Element aus Y zuordnet. Wir schreiben $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$.

$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\}$ heißt das Bild von X unter f; es ist stets $f(X) \subseteq Y$. Die Menge $\Gamma(f) = \{(x, y \in X \times Y) \mid f(x) = y\}$ einer Funktion f heißt der Funktionsgraph zu f.

Sei $X' \subseteq X$, dann heißt $f|_{X'} : X' \to Y$, $x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf X'. Sei $X' \supseteq X$, dann heißt $\tilde{f} : X' \to Y$ mit $\tilde{f}|_X = f$ eine Fortsetzung von f auf X'.

Eine Funktion f heißt injektiv, falls für alle x_1, x_2 mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt, dass $x_1 = x_2$. f heißt surjektiv, falls zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$, d.h. fall $f(X) = Y$. f heißt bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiel 2.52. (Elementare Funktionen)

1. Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ ist weder surjektiv noch injektiv.
2. Die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$ ist bijektiv.
3. Die Betragsfunktion $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|$ ist weder injektiv noch surjektiv.
4. Die Wurzelfunktion $\mathrm{sqrt} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sqrt{x}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

5. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Die Indikatorfunktion $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\chi(x) = 1$ für $x \in A$ und $\chi(x) = 0$ sonst ist weder surjektiv noch injektiv.

6. Die Quotientenfunktion $\mathrm{quot} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. ♢

Bemerkung 2.53.

Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat den gleichen Definitionsbereich und die gleiche Zuordnungsvorschrift wie quot. Die Funktionen sind aber nicht identisch, da sich die Bildbereiche unterscheiden. In der Tat ist f im Gegensatz zu quot auch surjektiv. Alternativ zur Einschränkung des Bildbereichs lässt sich quot auch zu einer bijektiven Abbildung fortsetzen durch $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R} \neq \{0\}$ und $g(0) = 0$: In der Tat gilt $g|_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} = \mathrm{quot}$. ♢

Beispiel 2.54. (Konstruktion reeller Funktionen)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ relle Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren neue Funktionen $f + g, \lambda f, fg : D \to \mathbb{R}$ durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ und $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Sei weiter $D' \subseteq D$ die Menge $\{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$. Dann setzen wir $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ mit $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Speziell lassen sich so Monome $m(x) = x^n = x \cdots x$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ konstruieren. Zusammen mit der Division ergeben sich die rationalen Funktionen $r : D \to \mathbb{R}$ mit $q(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ definieren mit Polynomen p, q und $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$. ♢

Definition 2.55.

Zu Funktionen $f : X_1 \to Y_1$ und $g : X_2 \to Y_2$ mit $f(X_1) \subseteq X_2$ definieren wir die Verkettung oder Komposition $g \circ f$ durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt $f^{-1} : Y \to X$, $y \mapsto x$ mit $f(x) = y$ die Umkehrabbildung.

Bemerkung 2.56.

1. Die Verkettung ist assoziativ, d.h. be geeigneten Definitions- und Bildbereichen gilt für Funktionen f, g, h, dass $f \circ (g \circ h) = (f \circ h) \circ h$.

2. Für die Quadratfunktion $\mathrm{quad} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{quad}(x) = x^2$ und die Wurzelfunktion $\mathrm{sqrt} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{abs} = \mathrm{sqrt} \circ \mathrm{quad}$, denn $\sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Umgekehrt ist $\sqrt{x}^2 = x$ für alle $x \geq 0$.

3. Wählt man $\mathbb{R}_0^+$ als Definitions- und Bildbereich der Funktionen quad, sqrt, dann sind die beiden Funktionen bijektiv und die eine ist jeweils die Umkehrfunktion der anderen; generell gilt $(f^{-1})^{-1} = f$. Speziell ist mit f stets auch f^{-1} bijektiv.

4. Ist $f : X \to Y$ bijektiv, dann ist $f \circ f^{-1} : Y \to Y$ die Identität auf Y und $f^{-1} \circ f$ ist die auf X. ♢

3. Stetigkeit

3.1. Stetigkeit einer Funktion

Definition 3.1.

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und es existiere eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim y_n = a$. Wir schreiben

$$\lim_{x\to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ für alle n und $\lim x_n = a$ gilt: $\lim f(x_n) = c$. Wir nennen c dann den Grenzwert der Funktion f bei a, falls $c \in \mathbb{R}$. Ist hingegen $c = \pm\infty$, so heißt c der uneigentlichen Grenzwert von f in a.

Weitere Bezeichnungen:

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{D\cap(-\infty,a)}(x);$

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{D\cap(a,\infty)}(x).$

Beispiel 3.2.

Betrachte die Heavysidefunktion $H = \chi_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $H(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$. Dann gilt $H|_{\mathbb{R}\cap(-\infty,0)} = H|_{(-\infty,0)} = 0$, d.h. wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (-\infty, 0)$ gegen 0 konvergiert, dann ist $H|_{(-\infty,0)}(x_n) = 0$ für alle n, also $\lim H|_{(-\infty,0)}(x_n) = 0$. Entsprechend gilt wegen $H|_{\mathbb{R}\cap(0,\infty)} = H|_{(0,\infty)} = 1$, dass $\lim H|_{(0,\infty)} = 1$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$, also

$$\lim_{x\nearrow 0} H(x) = \lim_{x\to 0} H|_{(-\infty,0)} = 0, \qquad \lim_{x\searrow 0} H(x) = \lim_{x\to 0} H|_{(0,\infty)} = 1.$$

Damit hat H keinen Grenzwert bei $a = 0$ und ist an dieser Stelle folglich nicht stetig. Wir betrachten dazu die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Klar: $x_n \in D_H = \mathbb{R}$ und $\lim x_n = 0 = a$, aber es ist $\operatorname{HP}(H(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 1\}$; insbesondere ist $(H(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent. ♢

Definition 3.3.

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt f stetig in a, falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

f heißt stetig oder stetig in D, falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Bemerkung 3.4.

Ist also $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ in D, so gilt: $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$. ♢

Satz 3.5.

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiter sei $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

Dann sind auch $f + g$, λf und $f \cdot g$ stetig in a. Im Fall $g(a) \neq 0$ ist weiter $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Beweis.

Mit den Grenzwertsätze 2.10: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim x_n = a$. Da f, g stetig sind, folgen

$$\lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(a) \qquad \text{und} \qquad \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a).$$

Damit gelten:

$$\begin{aligned}\lim((f+g)(x_n)) &= \lim(f(x_n) + g(x_n)) = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = f(a) + g(a)\\ &= f(\lim x_n) + g(\lim x_n) = (f+g)(\lim x_n);\end{aligned}$$

$$\lim((\lambda f)(x_n)) = \lim(\lambda f(x_n)) = \lim \lambda \lim f(x_n) = \lambda f(a) = \lambda f(\lim x_n) = f(\lambda \lim x_n);$$

$$\begin{aligned}\lim((f\cdot g)(x_n)) &= \lim(f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = f(a) \cdot g(a)\\ &= f(\lim x_n) \cdot g(\lim x_n) = (f \cdot g)(\lim x_n).\end{aligned}$$

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weiter eine Folge in D' mit $\lim x_n = a \in D'$, so gilt:

$$\lim\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\right) = \lim\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) = \frac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(\lim x_n)}{g(\lim x_n)} = \left(\frac{f}{g}\right)(\lim x_n). \qquad \square$$

Satz 3.6.

1. Die konstante Funktion und die Identitätsfunktion sind stetig.
2. Alle rationalen Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Beweis.

1. Seien $a, c \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x$. Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim a_n = a$. Dann gelten:
$$f(a_n) = c \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c = f(a), \qquad g(a_n) = a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a = g(a),$$
d.h. $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$ und $\lim g(a_n) = g(\lim a_n)$. Also sind f und g stetig.

2. Als Kombination aus Quotient, Summe und Produkt der konstanten Funktion und der Identität sind damit auch alle rationalen Funktionen stetig. $\square$

Satz 3.7.

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Sei f stetig in $a \in D$ und sei g stetig in $f(a) \in E$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a.

Beweis.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim x_n = a$. Da f stetig in a ist, gilt $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$, und da g stetig in $f(a)$ ist und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E mit Grenzwert $f(a)$, gilt $\lim g(f(x_n)) = g(\lim f(x_n)) = g(f(a))$. Also folgt insgesamt $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(f(a)) = (g \circ f)(a)$. □

Beispiel 3.8.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $|f| = \text{abs} \circ f$ stetig.

Wir müssen dazu zeigen, dass abs stetig ist. Da $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind und gilt $\text{abs}(x) = x$ auf $(0, \infty)$ sowie $\text{abs}(x) = -x$ auf $(-\infty, 0)$, muss nur überprüft werden, dass jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim |x_n| = |\lim x_n| = 0$ erfüllt. Sei dazu $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| = |x_n - 0| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. in der Tat $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. ◊

3.2. Der Zwischenwertsatz

Satz 3.9. (Zwischenwertsatz)

Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis.

Rekursiv durch Intervallhalbierung: Sei $[a_0, b_0] = [a, b]$. Weiter seien $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n]$ schon konstruiert mit $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ und $f(a_k) \leq 0 \leq f(b_k)$ für $k = 1, ..., n$. Weiter sei nun $m = \frac{a_n+b_n}{2}$. Dann können zwei Fälle auftreten: $f(m) \geq 0$, dann setze $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = m$. Ist hingegen $f(m) < 0$, definiere $a_{n+1} = m$ und $b_{n+1} = b_n$. In jedem Fall gelten:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \qquad \text{und} \qquad f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1}).$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und beschränkt, also gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\lim a_n = \xi$ nach Satz 2.6. Wegen $\lim(b_n - a_n) = 0$ folgt auch $\lim b_n = \xi$ und da $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ für alle n, sind $f(\xi) = \lim f(a_n) \leq 0$ und $f(\xi) = \lim f(b_n) \geq 0$, also $f(\xi) = 0$. □

Korollar 3.10.

Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis.

Seien $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann lässt sich die Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ in $x \neq 0$ darstellen als

$$f(x) = x^k \left(\frac{a_0}{x^k} + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x} + a_k \right) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \& \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Insbesondere gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0 < f(b)$, also auch ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $0 = f(\xi)$. □

Korollar 3.11.

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis.

Sei ζ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Setze $g(x) = f(x) - \zeta$ für $f(a) \leq \zeta \leq f(b)$ bzw. $g(x) = \zeta - f(x)$ für $f(b) \leq \zeta \leq f(a)$. Dann erfüllt $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes 3.9, d.h. es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit $g(\xi) = 0$, d.h. $f(\xi) = \zeta$. □

Definition 3.12.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt bzw. nach oben beschränkt bzw. nach unten beschränkt, wenn $f(D)$ beschränkt bzw. nach oben beschränkt bzw. nach unten beschränkt ist.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer. Man sagt, A hat ein Maximum, falls $\sup A \in A$, und ein Minimum, falls $\inf A \in A$. Existieren Maximum bzw. Minimum, schreibt man $\max A$ bzw. $\min A$ statt $\sup A$ bzw. $\inf A$. Man sagt, $f : D \to \mathbb{R}$ hat ein Maximum bzw. hat ein Minimum, falls $f(D)$ ein Maximum bzw. Minimum hat.

Bemerkung 3.13.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt, so existieren $\sup f(D)$ und $\inf f(D) \in \mathbb{R}$ nach dem Vollständigkeitsaxiom 1.12, aber nicht notwendigerweise $\min f(D)$ und $\max f(D)$. ◊

Beispiel 3.14.

1. Seien $D = (0, 1)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ die Identität $f(x) = x$ auf D. Dann ist $f(D) = (0, 1)$ beschränkt, aber $\inf(0, 1) = 0 \notin (0, 1)$ und $\sup(0, 1) = 1 \notin (0, 1)$, also hat f kein Minimum und kein Maximum.
2. Seien $D = [0, 1]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ die Abbildung $f(x) = 2x^2 + H(1-x) - H(x)$. Dann gelten $f(x) = 2x^2$ für $x \in (0, 1)$ sowie $f(0) = 1 = f(1)$, d.h. f hat ebenfalls weder Maximum noch Minimum. ◊

Satz 3.15. (Satz vom Maximum)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und besitzt Maximum und Mininum.

Beweis.

Seien $D = [a, b]$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim f(x_n) = \sup f(D)$. Da $x_n \in D$, gilt $a \leq x_n \leq b$ für alle n. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.18 gibt es eine Teilfolge $(x_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{\sigma_n} \to x \in [a, b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt: $\lim f(x_{\sigma_n}) = f(\lim x_{\sigma_n}) = f(x)$. Da $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sup f(D)$ konvergiert, gilt: $\sup f(D) = f(x) \in \mathbb{R}$. Also ist f nach oben beschränkt und $\sup f(D) = f(x) \in f(D)$, da $x \in D$, d.h. f hat ein Maximum. Für das Minimum argumentieren wir analog. □

Bemerkung 3.16.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und gelte $f(x) > \alpha$ für alle $x \in [a, b]$. Dann bleibt $f(x)$ deutlich von α entfernt, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) > \alpha + \epsilon$ für alle $x \in [a, b]$, denn $\min f([a, b]) = f(x_0)$ für ein $x_0 \in [a, b]$, insbesondere $f(x_0) > \alpha$. Setze nun $\epsilon = \frac{1}{2}(f(x_0) - \alpha)$. ◊

3.3. Verschiedene Arten von Stetigkeit

Definition 3.17.

Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (global) Lipschitz-stetig, wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass

$$\forall x, y \in D : \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

f heißt lokal Lipschitz-stetig, falls es zu jedem $\xi \in D$ ein $\eta > 0$ gibt, so dass f eingeschränkt auf $D \cap (\xi - \eta, \xi + \eta)$ global Lipschitz-stetig ist.

Bemerkung 3.18.

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $x, y \in D$ mit $x \neq y$. Dann gilt: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, d.h. $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L$. Die Sekantensteigungen einer Lipschitz-stetigen Funktion sind also beschränkt. ◊

Lemma 3.19.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Dann ist f stetig.

Beweis.

Gebe es für ein beliebiges $\xi \in D$ stets ein $\eta(\xi) > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle x, y aus $D \cap (\bar{x} - \eta, \bar{x} + \eta)$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to \xi$, d.h. zu $\eta(\xi) > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \eta(\xi)$, falls $n \geq N$, also $|f(x_n) - f(\xi)| \leq L|x_n - \xi|$, falls $n \geq N$, d.h. $\lim |f(x_n) - f(\xi)| = 0$. Also ist f ist stetig in ξ. □

Beispiel 3.20.

1. Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$. Dann gilt für alle $x, y \geq 1$, dass
$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}||\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$
Also ist f global Lipschitz-stetig.

2. Sei f nun auf $(0, \infty)$ definiert. Dann ist f nicht Lipschitz-stetig, denn angenommen, es würde gelten $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für ein $L \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in (0, \infty)$. Wähle $x_n = \frac{1}{n^2}$ und $y_n = \frac{1}{(2n)^2}$. Dann würde gelten:
$$\forall n \in \mathbb{N} : L \geq \frac{|\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}|}{|x_n - y_n|} = \frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right|}{|(\frac{1}{n^2}) - (\frac{1}{4n^2})|} = \frac{2}{3}n,$$
was im Widerspruch zum Archimedischen Prinzip 2.3 steht.

3. Aber: f ist lokal Lipschitz-stetig: Sei $\xi \in (0, \infty)$. Setze $\eta(\xi) = \frac{\xi}{2} > 0$, dann $x > \frac{\xi}{2}$, falls $x \in (\xi - \eta, \xi + \eta)$, also
$$\forall x, y \in (\bar{x} - \eta, \bar{x} + \eta) : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{\bar{x}}{2}}}|x - y|.$$
Typisch: Die lokale Lipschitz-Konstante hängt vom betrachteten Punkt ξ ab; hier: $L(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\xi}{2}}}$.

4. Betrachte f auf dem Intervall $[0, \infty)$, dann ist f nicht lokal Lipschitz-stetig, denn angenommen, zu $\xi = 0$ gibt es ein $\eta(\xi) > 0$ und ein $L > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, falls $x, y \in [0, \eta)$. Wähle $y = 0$, $x_n = n^{-2}$ und $n > \eta^{-1/2}$. Dann ist $x_n = n^{-2} < \eta$, also $|(n^{-2})^{1/2} - 0^{1/2}| \leq L|\frac{1}{n^2}|$ für alle $n > \eta^{-1/2}$, d.h. $n \leq L$ für alle $n > \eta^{-1/2}$, ein Widerspruch.

5. f ist aber Hölder-stetig zum Exponenten $\frac{1}{2}$, denn
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - 2\min\{x, y\} + y = |x - y| \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} = |x - y|^{\frac{1}{2}}.$$ ◊

Definition 3.21.

Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (global) Hölder-stetig, wenn es $L > 0$ und $\alpha \in (0, 1]$ gibt, so dass
$$\forall x, y \in D : \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^{\alpha}.$$
f heißt lokal Hölder-stetig, falls es zu jedem $\xi \in D$ ein $\eta(\xi) > 0$ gibt, so dass f eingeschränkt auf $D \cap (\xi - \eta, \xi + \eta)$ global Hölder-stetig ist.

Bemerkung 3.22.

Wieder gilt: Jede lokal Hölder-stetige Funktion ist insbesondere stetig. ◊

Bemerkung 3.23.

Stetigkeit von f bedeutet: Egal, wie sich Argumente x_n einem Punkt x nähern, die zugehörigen Funktionswerte $f(x_n)$ streben gegen $f(x)$. Geometrisch bedeutet das: Der Abstand $|f(x_n) - f(x)|$ wird beliebig klein, falls der Abstand $|x_n - x|$ klein genug ist. ◊

Satz 3.24. (ϵ-δ-Charakterisierungt der Stetigkeit)

Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $\xi \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, falls x in einer δ-Umgebung von ξ liegt. Als Formel liest sich dies als

$$\forall \epsilon > 0 : \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - \xi| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Beweis.

$\Leftarrow$ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to \xi$. Zeige: $f(x_n) \to f(\xi)$. Sei hierfür $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, falls $|x - \xi| < \delta$. Zu diesem δ gibt es außerdem ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$, falls $n \geq N$, d.h. $|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Also ist f stetig in ξ.

$\Rightarrow$ Sei f stetig in ξ. Angenommen, es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$ existiert mit $|f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon$. Wählt man insbesondere zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in D$ mit dieser Eigenschaft, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in D mit $x_n \to \xi$; da f stetig in ξ ist, folgt $f(x_n) \to f(\xi)$. Gleichzeitig ist $|f(x_n) - f(\xi)| \geq \epsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch. □

Definition 3.25.

Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Als Formel:

$$\forall \epsilon > 0 : \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in D : \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Bemerkung 3.26.

Die Wahl von $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ muss an allen Stellen in D gleichermaßen funktionieren. Speziell sind gleichmäßig stetige Funktionen nach Satz 3.24 stetig. Die Umkehrung ist falsch: ◊

Beispiel 3.27.

$f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist lokal Lipschitz-stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn angenommen, f wäre gleichmäßig stetig. Dann würde zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ existieren mit $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \frac{1}{2}$, falls $|x - y| < \delta$. Wähle $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{2n}$ und $n \geq \frac{1}{\delta}$. Dann ist $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} < \delta$, also $\frac{1}{2} = \epsilon > |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n}| = |n - 2n| = n$ für alle $n > \frac{1}{\delta}$, ein Widerspruch. ◊

Satz 3.28.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis.

Sei f stetig in D. Angenommen, es existiert ein $\epsilon > 0$:, so dass es zu jedem $\delta > 0$ $x, y \in D$ gibt mit $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Insbesondere gibt es Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, da $D = [a, b]$ beschänkt ist, mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.18 erhält man also eine Teilfolge $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\xi \in [a, b]$ mit $x_{\sigma(n)} \to \xi$. Wegen $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| < \frac{1}{\sigma(n)} \to 0$ folgt auch $y_{\sigma(n)} \to \xi$ und wegen der Stetigkeit also $f(x_{\sigma(n)}) \to f(\xi)$ und $f(y_{\sigma(n)}) \to f(\xi)$, also $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \to 0$. Dies widerspricht $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \geq \epsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

3.4. Potenzreihen und deren Konvergenzverhalten

Definition 3.29.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe.

Bemerkung 3.30.

Die Partialsummen einer Potenzreihe sind Polynomfunktionen. Eine Potenzreihe kann also formal als eine Folge von Funktionen aufgefasst werden. Die Reihe muss allerdings nicht notwendig für jedes $x \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert besitzen, d.h. $x \mapsto \sum a_n x^n$ ist nicht unbedingt eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funkion. ♢

Beispiel 3.31.

Die Exponentialreihe exp, die Kosinusreihe cos und die Sinusreihe sin sind gegeben als

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

cos ist eine Potenzreihe im Sinne der Definition, wenn man $a_n = (-1)^n/(2n)!$ für n gerade und $a_n = 0$ für n ungerade wählt. ♢

Bemerkung 3.32. (Definitionsbereich von Potenzreihen)

Die Partialsummen einer Potenzreihe sind stets alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ob der Grenzwert für ein festes $x \in \mathbb{R}$ existiert, testen wir mit dem Wurzelkriterium: Sei $b_n = a_n x^n$. Dann konvergiert $\sum b_n$ absolut, falls $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} < 1$. Weiter gilt $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$. Setze $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ und $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ konvergiert}\}$. Es können drei Fälle auftreten:

1. $\alpha = 0$, dann ist $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = |x|\alpha = 0 < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $D = \mathbb{R}$.
2. $0 < \alpha < \infty$, dann gelten $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = |x|\alpha < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\alpha}$ und $|x|\alpha > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\alpha}$, also $(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) \subseteq D \subseteq [-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$.
3. $\alpha = \infty$, d.h. $\sqrt[n]{|a_n|}$ ist unbeschränkt. Dann ist auch $|x| \sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt, falls $x \neq 0$, also $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \infty > 1$, d.h. $D = \{0\}$. ♢

Definition 3.33.

Wir definieren $R = 0$ für $\alpha = \infty$, $R = \frac{1}{\alpha}$ für $0 < \alpha < \infty$ und $R = \infty$ für $\alpha = 0$ und nennen R den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Bemerkung 3.34.

Es gelten stets $(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R]$ und $0 \in D$, d.h. D ist immer ein nichtleeres Intervall und symmetrisch zur 0 bis auf Randpunkte. Für die Randpunkte ist eine Einzelfallunterscheidung erforderlich. Dabei sind alle Fälle $D = \{0\}$, $D = (-R, R)$, $D = [-R, R)$, $D = (-R, R]$, $D = [R, R]$, $D = \mathbb{R}$ möglich: ♢

Beispiel 3.35.

1. $\sum n^n x^n$ hat den Konvergenzradius $R = 0$, da $\sqrt[n]{n^n} = n \to \infty$.
2. $\sum \frac{1}{n!} x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n!} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$.
3. $\sum 1 \cdot x^n \Rightarrow R = \limsup \sqrt[n]{1} = 1$. Es gilt $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$, falls $|x| < 1$ ($\to$ geometrische Reihe). Da $\sum 1^n$ und $\sum (-1)^n$ divergieren, ist $D = (-1, 1)$. Speziell existiert zu der auf $(-1, 1)$ definierten Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ eine Darstellung als Potenzreihe.
4. $\sum \frac{1}{n} x^n$ hat $R = 1$, denn $\limsup \sqrt[n]{1/n} = \lim 1/\sqrt[n]{n} = 1$. Weiter ist die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergent, d.h. $1 \notin D$, und $\sum \frac{1}{n}(-1)^n$ konvergent nach dem Leibnitzkriterium 2.42, d.h. $-1 \in D$, also $D = [-1, 1)$.
5. $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ hat ebenfalls $R = 1$; weiterhin sind $\sum \frac{1}{n^2}$ und $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergent, also $D = [-1, 1]$. ♢

Satz 3.36. (Cauchy-Produkt von Reihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent und $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Beweis.

Die Koeffizienten c_n lassen sich auch schreiben als $c_n = \sum\{a_k b_l \mid k+l=n\}$, es wird dabei also über alle Indexpaare $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ summiert, die auf der Diagonalen $k+l=n$ liegen. Für die Partialsummen C_N gilt somit: $C_N = \sum\{c_n \mid 0 \le n \le N\} = \sum\{a_k b_l \mid (k,l) \in D_n\}$ mit $D_N = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k+l \le N\}$. Ausmultiplizieren der Partialsummen $A_N = \sum\{a_n \mid 0 \le n \le N\}$ und $B_N = \sum\{b_n \mid 0 \le n \le N\}$ ergibt $A_N B_N = \sum\{a_k b_l \mid (k,l) \in Q_N\}$ mit $Q_N = \{k,l \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \le k,l \le N\}$. Analog gilt für das Produkt der Partialsummen $A_N^* = \sum\{|a_n| \mid 0 \le n \le N\}$ und $B_N^* = \sum\{|b_n| \mid 0 \le n \le N\}$, dass $A_N^* B_N^* = \sum\{|a_k|\,|b_l| \mid (k,l) \in Q_N\}$.

Wir setzen $\lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \ge x\}$, dann ist $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq D_N$ und es folgt $Q_N \backslash D_N \subseteq Q_N \backslash Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$, also gilt $|A_N B_N - C_N| \le \sum\{|a_k|\,|b_l| \mid (k,l) \in Q_N \backslash Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}\} = A_N^* B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \to A_N^* B_N^*$, da nach Voraussetzung die Folge $(A_N^* B_N^*)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergent, also eine Cauchyfolge, ist. Damit erhalten wir, dass $\lim C_N = \lim A_N B_N = \lim A_N \lim B_N$. Dass die Konvergenz von $\sum c_n$ auch tatsächlich absolut ist, folgt aus der Abschätzung $|c_n| \le \sum\{|a_k|\,|b_{n-l}| \mid k = 0, ..., n\}$. $\square$

Bemerkung 3.37.

Das Produkt zweier Potenzreihen ist wieder eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3)x^3 + \cdots . \end{aligned}$$

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, dann sind die Koeffizienten c_n gegeben durch $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$:

$$A_n = a_n x^n,\ B_n = b_n x^n,\ C_n = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} B_k = c_n x^n \quad \overset{(3.36)}{\Longrightarrow} \quad \sum_{k=0}^{n} A_n \sum_{k=0}^{n} C_n = \sum_{k=0}^{n} C_n.$$

Der Konvergenzradius der Produktreihe ist das Minimum der Konvergenzradien der Faktoren. $\diamondsuit$

Bemerkung 3.38.

Die Konvergenz einer Potenzreihe ist gemäß dem Wurzelkriterium 2.45 absolut für $|x| < R$. $\diamondsuit$

Satz 3.39. (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt das Additionstheorem

$$\exp(\alpha + \beta) = \exp(\alpha) \cdot \exp(\beta).$$

Beweis.

Mit dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} \exp(\alpha + \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^{n-k} \beta^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!)} \frac{\beta^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \right) = \exp(\alpha) \cdot \exp(\beta). \end{aligned}$$ $\square$

Korollar 3.40.

1. Es gelten $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$. Es sind $\exp(x) > 1$ für $x > 0$ und $\exp(x) < 1$ für $x < 0$.
3. Bezeichne e die Eulersche Zahl $e = \exp(1)$, dann gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$, dass $\exp(q) = e^q$.
4. exp ist streng monoton wachsend, d.h. für alle $x < y$ gilt $\exp(x) < \exp(y)$.

Beweis.

1. Offenbar ist $\exp(0) = \sum \frac{0^n}{n!} = 1$ und somit folgt $1 = \exp(0) = \exp(-x + x) = \exp(-x)\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aus der Funktionalgleichung, also $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$.
2. Für $x > 0$ ist $\exp(x) = \sum \frac{x^n}{n!} > 0$. Damit gilt auch für $x < 0$, dass $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$. Weiter ist $\exp(x) > \exp(0) = 1$ für positives x und somit auch $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} < 1$.
3. Sei $r = \frac{p}{q}$ für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann gilt $\exp(\frac{p}{q}) = \exp(\frac{1}{q})^p$ durch iteratives Anwenden der Funktionalgleichung und
$$\exp(1) = \exp\left(\frac{q}{q}\right) = \exp\left(\frac{1}{q}\right)^q \qquad \Longrightarrow \qquad \exp\left(\frac{1}{q}\right) = \exp(1)^{\frac{1}{q}},$$
insgesamt also $\exp(\frac{p}{q}) = \exp(1)^{\frac{p}{q}}$.
4. Sei $x < y$, d.h. $0 < \exp(x - y) < 1$, dann $\exp(x) = \exp(y + (x - y)) = \exp(y)\exp(x - y) < \exp(y)$. □

3.5. Konvergenz und Stetigkeit von Funktionenfolgen

Bemerkung 3.41.

$\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ bedeutet: $\exp(x) = \lim\limits_{N\to\infty} f_N(x)$ in $\mathbb{R}$ für jedes einzelne x mit Polynomen
$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{1}{N!}x^N.$$
Wir wollen im Folgenden $\exp = \lim\limits_{N\to\infty} f_N$ als Grenzwert einer Folge von Funktionen einführen. ◊

Definition 3.42.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Funktionen mit gemeinsamer Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$.

Die Folge konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls
$$\forall x \in D : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Bemerkung 3.43.

Ist $\lim f_n = f$ punktweise und sind alle f_n stetig, dann muss die Grenzfunktion f nicht stetig sein. Betrachte dazu $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^n$. Dann sind alle f_n stetig mit $f(x) \to 0$ für alle $x \in [0,1)$ sowie $f(1) = 1$ gilt $f_n \to f$ punktweise auf $[0,1]$. Aber f ist nicht stetig auf $[0,1]$. ◊

Definition 3.44.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Funktionen mit gemeinsamer Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$.

Die Folge konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls
$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in D : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Bemerkung 3.45.

Genau dann konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen ein f, wenn $\sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ◊

Satz 3.46.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Funktionen auf D, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Sind dann alle f_n in $\xi \in D$ stetig, dann ist auch f in ξ stetig.

Beweis.

Sei $\epsilon > 0$. Da $f_n \to f$ gleichmäßig, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und alle $y \in D$ gilt $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Da f_n stetig in ξ, gibt es weiter ein $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$, falls $|x - \xi| < \delta$. Sei nun $|x - \xi| < \delta$. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann:

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\xi)| + |f_N(\xi) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \qquad \square$$

Satz 3.47.

Sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert die Partialsummenfolge gleichmäßig auf $[-r, r]$, falls $r < R$. Speziell ist der Grenzwert $x \mapsto \sum a_n x^n$ stetig auf $(-R, R)$.

Beweis.

Seien $f(x) = \sum a_n x^n$ die Grenzfunktion auf $D = [-r, r]$ und $f_N(x) = \{a_n x^n \mid 0 \leq n \leq N\}$ die Nte Partialsumme. Weiter sei R_0 so gewählt, dass $0 < r < R_0 < R$. Dann sind alle f_N als Polynomfunktionen stetig und da $\sum |a_n| x^n$ den gleichen Konvergenzradius hat wie $\sum a_n x^n$, ist $\sum |a_n| R_0^n = c < \infty$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\,|x^n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{|x|}{R_0} \right)^n R_0^n \\
&\overset{|x|<r}{\leq} \left(\frac{r}{R_0} \right)^N \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R_0^n \underbrace{\left(\frac{r}{R_0} \right)^{n-N}}_{<1, \text{ da } r < R_0} \leq c \left(\frac{r}{R_0} \right)^N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

also auch $\sup\{|f(x) - f_N(x)| \mid |x| \leq r\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f; speziell ist f nach Satz 3.46 stetig. $\square$

3.6. Stetigkeitsverhalten von Umkehrfunktionen

Definition 3.48.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. f heißt monoton wachsend, falls für alle $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$, und streng monoton wachsend, falls für alle $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$. Weiter nennen wir f monoton fallend, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x < y$, und streng monoton fallend, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x < y$.

Bemerkung 3.49.

1. Streng monotone Funktionen sind injektiv: Sei $x \neq y$, Œ $x < y$. Dann ist $f(x) < f(y)$, falls f streng monoton wächst, und $f(x) > f(y)$, falls f streng monoton fällt. In beiden Fällen ist also $f(x) \neq f(y)$.
2. Insbesondere gilt also: $f : D \to f(D)$ streng monoton $\Rightarrow f$ bijektiv.
3. Mit dem Zwischenwertsatz 3.9 kann man leicht zeigen, dass auch die Umkehrung gilt, falls f stetig und auf einem Intervall definiert ist.
4. Ist f umkehrbar und streng monoton, so ist auch f^{-1} streng monoton: Œ sei f streng monoton wachsend, dann
$$y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_2 = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1}(y_2).$$
5. Stetige Funktionen bilden Intervalle auf Intervalle gleichen Typs ab: Nach dem Satz vom Maximum 3.15 gilt $f([a, b]) = [A, B]$ mit $A = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und $B = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Bei allgemeinen Intervalle benutze den Ansatz $(a, b) = \bigcup\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$.
6. Ist f monoton wachsend, so gelten $A = f(a)$ und $B = f(b)$. Fällt f monoton, dann sind $A = f(b)$ und $B = f(a)$. $\Diamond$

Satz 3.50. (Stetigkeit von Umkehrfunktionen)

Sei f auf $[a,b]$ definiert, stetig und streng monoton und seien $A = \min(f(a), f(b))$, $B = \max(f(a), f(b))$. Dann bildet f das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf $[A,B]$ ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ ist ebenfalls stetig mit der gleichen Monotonie wie f.

Beweis.

Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Seien dazu f Œ streng monoton wachsend, $E = [f(a), f(b)]$, $x \in E$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, die gegen y konvergiert. Wir zeigen: $\lim f^{-1}(y_n) = f(y)$. Die Urbildfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt, sonst gäbe es Teilfolgen $(x_{n_\sigma})_{\sigma\in\mathbb{N}}$ und $(x_{m_\sigma})_{\sigma\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n\sigma} \to x_1 \in [a,b]$, $x_{m_\sigma} \to x_2 \in [a,b]$ und $x_1 \neq x_2$, Œ $x_1 < x_2$. Einerseits würde dann wegen der strengen Monotonie von f gelten, dass $f(x_1) < f(x_2)$, und andererseits wegen der Stetigkeit von f, dass $y_{n_\sigma} = f(x_{n_sigma}) \to f(x_1)$ und $y_{m_\sigma} = f(x_{m_\sigma}) \to f(x_2)$; da $y_n \to y$, also $f(x_1) = f(x_2)$, ein Widerspruch. Sei $\xi = \lim x_n$, dann

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \qquad \& \qquad f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(f^{-1}(y_n)) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Insgesamt erhalten wir $\lim f^{-1}(y_n) = \xi = f^{-1}(y)$, d.h. f^{-1} ist stetig in ξ. □

Bemerkung 3.51.

Ist f auf dem offenen Intervall (a,b) definiert, dann ist $f^{-1} : E \to (a,b)$ mit $E = (f(a), f(b))$ ebenfalls stetig. Sei dazu $y \in E$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $[y-\epsilon, y+\epsilon] \subseteq E$. Mit $a = f^{-1}(y-\epsilon)$ und $b = f^{-1}(y+\epsilon)$ folgt $[a,b] \subseteq D$ und $g = f|_{[a,b]} : [a,b] \to E$ ist stetig und streng monoton wachsend. Also ist gemäß Satz 3.50 $g^{-1} = f^{-1}|_{[y-\epsilon,y+\epsilon]}$ stetig. Da y beliebig gewählt war, folgt: f^{-1} ist stetig. Für halboffene Intervalle argumentiert man analog. ♢

Beispiel 3.52.

Die Exponenzialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 3.40 streng monoton wachsend, d.h. $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist nach Bemerkung 3.49 umkehrbar. Die Umkehrfunktion $\exp^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt Logarithmusfunktion und wird mit ln bezeichnet. Diese ist laut Bemerkung 3.51 stetig. ♢

Satz 3.53. (Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion)

Seien $x, y \in (0,\infty)$ beliebig. Dann gilt das Additionstheorem

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Beweis.

Mit der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion 3.39 gilt

$$\ln(x \cdot y) = \ln(\exp(\ln(x))) \cdot \exp(\ln(y)) = \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) = \ln(x) + \ln(y).$$ □

Bemerkung 3.54.

1. Für $a > 0$ definieren wir $\exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a)$, die Exponentialfunktion zur Basis a. Dann ist $\exp_a : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ stetig als Verkettung stetiger Funktionen und außerdem streng monoton, besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $\log_a = \exp_a^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.
2. Es gilt $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$: Sei $f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, dann gelten für beliebiges $x > 0$:

   $$\exp_a(f(x)) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln a} \ln a\right) = x \qquad \& \qquad f(\exp_a(x)) = \frac{\ln(\exp_a(x))}{\ln a} = \frac{\ln(\exp(x \ln a))}{\ln a} = x,$$

   d.h. $\exp_a^{-1} = f$.
3. Seien $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$. Dann gilt aus Stetigkeitsgründen $a^x = \lim a^{r_n}$. ♢

4. Differenzierbarkeit

4.1. Die Ableitung einer Funktion

Definition 4.1.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann heißt f im Punkt $a \in D$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Der Grenzwert $f'(a)$ heißt die Ableitung von f im Punkt a. f heißt differenzierbar oder differenzierbar in D, falls f in jedem $a \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkung 4.2.

1. Der Quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ heißt Differenzenquotient, der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Differenzialquotient.
2. Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(a, f(a))$. Der Differenzialquotient gibt die Steigung der Tangente im Punkt a an.
3. Die Funktionsgleichung der Tangente $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in a lautet $T_a(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. $\Diamond$

Satz 4.3.

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$ sei nicht isoliert, d.h. es gebe eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D \backslash \{a\}$ mit $\lim x_n = a$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in a genau dann differenzierbar, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ und eine in a stetige Funktion $r : D \to \mathbb{R}$ mit $r(a) = 0$ existieren, so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + L(x - a)}_{\text{affin linear}} + \underbrace{(x - a)r(x)}_{\text{Abweichung}}.$$

Beweis.

1. Sei zunächst f in a differenzierbar. Setze $L = f'(a)$ und $r(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ für $x \neq a$ sowie $r(a) = 0$, dann gelten:

$$\lim_{x \to a} r(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0 = r(a), \qquad f(x) = f(a) + L(x - a) + (x - a)r(x).$$

2. Besitze f nun die lokale Darstellung $f(x) = f(a) + L(x - a) + (x - a)r(x)$, dann gilt für $x \neq a$, dass

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L + r(x) \quad \xrightarrow{x \to a} \quad L + r(a) = L.$$

Also ist f in a differenzierbar mit $f'(a) = L$.

Korollar 4.4.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist f in a stetig. Speziell sind differenzierbare Funktionen stetig.

Beweis.

Mit der Charakterisierung aus Satz 4.3 lässt sich f als Komposition stetiger Funktionen schreiben:

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{f(a) + L \cdot (x - a)}_{\text{stetig in } a} + \underbrace{(x - a)}_{\text{stetig in } a} \cdot \underbrace{r(x)}_{\text{stetig in } a}}_{\text{stetig in } a}. \qquad \square$$

4.2. Ableitungsregeln

Satz 4.5. (Ableitungsregeln)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare, reelle Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch $f + g$, λf und $f \cdot g$ in a differenzierbar und es gelten:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \qquad (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Gilt zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Beweis.

Alle Aussagen folgen aus den Grenzwertsätzen:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a);\end{aligned}$$

$$(\lambda f)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lambda f'(a);$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f\cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a}) = g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a);\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)\cdot g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\frac{1}{g(x)\cdot g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Die Quotientenregel folgt aus letzterer Formel mit der Produktregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g^2(a)}. \qquad \square$$

Beispiel 4.6.

1. Die konstante Funktion $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_0(x) = 1$ besitzt in $a \in \mathbb{R}$ die Ableitung $\varphi_0'(a) = 0$, denn

$$\varphi'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi_0(x) - \varphi_0(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1-1}{x-a} = 0.$$

2. Die Identität $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(x) = x$ hat in $a \in \mathbb{R}$ die Ableitung $\varphi_1'(a) = 1$:

$$\varphi_1'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1.$$

3. Mit Induktion und der Produktregel 4.5 folgt für $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = x^n$: $\varphi_n'(a) = na^{n-1}$, $n \geq 1$.
4. Für $\varphi_{-n} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi_{-n}(x) = x^{-n}$, ist nach der Quotientenregel 4.5 $\varphi_{-n}'(a) = -na^{-n-1}$.
5. Mit den Ableitungregeln 4.5 folgt somit, dass alle Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ und alle rationalen Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind. $\diamondsuit$

Satz 4.7. (Kettenregel)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ in a und $g : E \to \mathbb{R}$ in $f(a)$ differenzierbar. Weiter gelte $f(D) \subseteq E$. Dann ist auch die Verkettung $g \circ f$ in a differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis.

Mit der Charakterisierung aus Satz 4.3 gelten

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x)(x-a), \\ g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + r_g(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a)) + (x-a)\underbrace{\left(g'(f(a))r_f(x) + r_g(f(x))(f'(a) + r_f(x)\right)}_{=r_{g\circ f}(x)}. \end{aligned}$$

Für das Restglied $r_{g\circ f}$ gilt im Punkt a:

$$r_{g\circ f}(a) = g'(f(a))\underbrace{r_f(a)}_{=0} + \underbrace{r_g(f(a))}_{=0}(f'(a) + r_f(x) = 0.$$

Außerdem ist $r_{g\circ f}$ stetig in a, da $r_{g\circ f}$ Komposition von in a stetigen Funktionen ist. Mit Satz 4.3 folgt die behauptete Formel $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. □

4.3. Ableitung von Umkehrfunktionen

Satz 4.8. (Ableitung von Umkehrfunktionen)

Seien D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton mit Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$. Ist f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$, so ist f^{-1} in $f(a)$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Beweis.

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)\backslash\{f(a)\}$ mit $y_n \to f(a)$. Weiter sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D\backslash\{a\}$ mit $x_n \to a$ und

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{f'(a)}.$$

Also ist f^{-1} differenzierbar in $f(a)$ mit Ableitung $\frac{1}{f'(a)}$. □

Korollar 4.9.

Seien D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann gilt für alle $y \in f(D)$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beispiel 4.10.

1. Sei $\varphi_{\frac{1}{n}} : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi_{\frac{1}{n}}(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in D\backslash\{0\}$. Dann gilt $\varphi'_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$:

$$\varphi'_{\frac{1}{n}}(x) = (\varphi_n^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'_n(\varphi_n^{-1}(x))} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}.$$

2. Sei $\varphi_{\frac{p}{q}} : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$, $x \in D \setminus \{0\}$. Dann gilt $\varphi'_{\frac{p}{q}}(x) = \frac{p}{q}\varphi_{\frac{p}{q}-1}$:

$$\varphi'_{\frac{p}{q}}(x) = (\varphi_p \circ \varphi_{\frac{1}{q}})'(x) = \varphi'_p(\varphi_{\frac{1}{q}}(x))\varphi'_{\frac{1}{q}}(x) = px^{\frac{p-1}{q}}\frac{1}{q}x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p-q}{q}}. \qquad \diamond$$

4.4. Ableitung von Potenzreihen

Satz 4.11. (Ableitung von Potenzreihen)

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Dann ist f in $(-R, R)$ differenzierbar, die Ableitung ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Beweis.

Sei $f_N(x)$ die Nte Partialsumme zu $f(x)$. Mit Satz 3.47 gilt:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

gleichmäßig auf $[-r, r] \subsetneq (-R, R)$ für jedes $r < R$. Da $f_N(x)$ Polynom, ist außerdem

$$f'_N(x) = \sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) a_{k+1} x^k = g_{N-1}(x).$$

Zum Konvergenzradius von $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$: Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt zunächst für $c_n = \sqrt[n]{n|a_n|}$:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < \infty,$$

da $R > 0 \overset{\text{Def.}}{\iff} \alpha < \infty$; also ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Setze $b_n = \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = c_{n+1}^{\frac{n+1}{n}} = c_{n+1} c_{n+1}^{\frac{1}{n}}$. Dann gilt: $\mathrm{HP}((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathrm{HP}((c_n)_{n\in\mathbb{N}})$, denn für jede beschränkte Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 < A \le d_n < B$ ist $(\ln(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und somit gilt: $\sqrt[n]{d_n} = \exp(\frac{1}{n}\ln(d_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(0) = 1$. Also

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{HP}((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{HP}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \limsup_{n\to\infty} c_n = \alpha,$$

d.h. g hat stets den gleichen Konvergenzradius R wie f. Also folgt: $f'_N = g_{N-1} \xrightarrow{N\to\infty} g$ gleichmäßig auf $[-r, r]$ und punktweise auf $(-R, R)$. Außerdem ist g stetig auf $(-R, R)$. Mit Satz 4.21 folgt: $f' = g$. $\square$

Korollar 4.12.

Jede Potenzreihe ist auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft differenzierbar.

Beispiel 4.13.

1. Für die Ableitung der Exponentialfunktion gilt $\exp'(x) = \exp(x)$:

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

2. Die Ableitung der Logarithmusfunktion ist gemäß Satz 4.8 gegeben als $\ln'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\ln'(x) = (\exp^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1}(x))}\frac{1}{x}.$$

3. Für die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x$ gilt $f'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$:

$$f(x) = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x \ln x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \exp(x \ln x)(\ln x + x \ln'(x)) = x^x(\ln(x) + 1). \qquad \diamond$$

4.5. Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Definition 4.14.

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Man sagt, f hat in $x \in (a, b)$ ein lokales Maximum, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in (a, b)$ mit $|x - y| < \epsilon$. f hat in $x \in (a, b)$ ein lokales Minimum, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, mit $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in (a, b)$ mit $|x - y| < \epsilon$.

Bemerkung 4.15.

An lokalen Extremstellen einer Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, d.h. lokalen Maxima und Minima, ist die Tangente am Funktionsgraphen horizontal, d.h. die Steigung dort beträgt 0: $\Diamond$

Satz 4.16. (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist x ein stationärer Punkt, d.h. es gilt $f'(x) = 0$.

Beweis.

Es gibt $\epsilon > 0$ mit $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq (a, b)$ und $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Also gelten

$$f'_+(x) = \lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0, \qquad f'_-(x) = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

und da f differenzierbar: $0 \leq f'_-(x) = f'(x) = f'_+(x) \leq 0$, also $f'(x) = 0$. $\square$

Bemerkung 4.17.

$f'(x) = 0$ ist notwendig für ein lokales Extremum, aber nicht hinreichend: Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(0) = 0$, aber f besitzt kein Extremum bei $x = 0$. $\Diamond$

Satz 4.18. (Satz von Rolle)

Sind $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$ und f in (a, b) differenzierbar, so gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis.

Ist f konstant, so gilt sogar $f'(x) = 0$ für *alle* $x \in (a, b)$. Sei f also nicht konstant, dann gibt es $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. Ist $f(x_0) > f(a)$, dann nimmt f wegen der Stetigkeit ihr Maximum an. Das Maximum wird nicht in $\{a, b\}$ angenommen, da $f(a) = f(b) < f(x_0)$. Also muss das Maximum in (a, b) angenommen werden, etwa bei ξ. Mit Satz 4.16 folgt: $f'(\xi) = 0$. Falls $f(x_0) < f(a)$, so argumentiert man analog über's Minimum. $\square$

Satz 4.19. (Mittelwertsatz)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis.

Wende den Satz von Rolle 4.18 an auf die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

dann $g(a) = g(b)$, also existiert $\xi \in (a, b)$ mit $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ bzw. $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Korollar 4.20. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Beweis.

Wende den Mittelwertsatz 4.19 an auf die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) :$$

Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = 0$. □

Satz 4.21. (Vertauschung von Limes und Differentiation)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, die *punktweise* gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Konvergiert f'_n *gleichmäßig* auf D gegen eine stetige Funktion g, so ist f auf D differenzierbar mit $f' = g$.

Beweis.

Sei $a \in D$ beliebig. Wir setzen $r(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - g(a)$ für $x \neq a$ und $r(a) = 0$, dann gilt

$$f(x) = f(a) + g(x)(x - a) + r(x)(x - a).$$

Wir müssen nur zeigen, dass r stetig in a ist, dann folgt mit dem Charakterisierungssatz für Ableitungen 4.3 die Behauptung.

Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Wir weisen die Existenz eines $\delta > 0$ nach mit $|r(x)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

1. Da g stetig in a, existiert $\delta > 0$ mit $|g(y) - g(a)| < \frac{\epsilon}{4}$ für alle $y \in D$ mit $|y - a| < \delta$.
2. Da $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|f'_n(y) - g(y)| < \frac{\epsilon}{4}$ für alle $n \geq N_1$ und $y \in D$.
3. Zu $x \in D$ fest mit $|x - a| < \delta$ und $x \neq a$ gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4}|x - a|$ für alle $n \geq N_2$, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.
4. Genauso existiert ein $N_3 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{4}|x - a|$ für alle $n \geq N_3$.

Mit der Dreiecksungleichung gilt nun

$$|r(x)| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a)\right| \leq \left|\frac{f(x) - f_n(x)}{x - a}\right| + \left|\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - g(a)\right| + \left|\frac{f_n(a) - f(a)}{x - a}\right|$$

und der Mittelwertsatz 4.19 liefert $\xi_n \in (a, b)$ mit $|\xi_n - a| < |x - a| < \delta$ und $\frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a} = f'(\xi_n)$. Also

$$|r(x)| \leq \left|\frac{f_n(x) - f(x)}{x - a}\right| + \left|\frac{f_n(a) - f(a)}{x - a}\right| + \left|f'_n(\xi) - g(\xi_n)\right| + \left|g(\xi_n) - g(a)\right| < \epsilon$$

für alle $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$. □

Korollar 4.22.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b) mit $f'(x) = 0$ für alle x. Dann ist f konstant.

Beweis.

Angenommen, es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ und $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dann muss es nach dem Mittelwertsatz 4.19 ein $\xi \in (a, b)$ geben mit $0 \neq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi)$, ein Widerspruch. □

Korollar 4.23. (Lineare skalare Anfangswertprobleme)

Seien $u_\circ, \lambda \in \mathbb{R}$ und $T > 0$. Dann gibt es genau eine auf $[0,T]$ stetige, in $(0,T)$ differenzierbare Abbildung u mit $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$ für alle $t \in (0,T)$ und $u(0) = u_\circ$.

Beweis.

1. Existenz: Setze $u(t) = u_\circ \exp(\lambda t)$, dann ist $\dot{u}(t) = u_\circ \lambda \exp(\lambda t) = \lambda u(t)$.
2. Eindeutigkeit: Sei v eine weitere Lösung, dann gelten für die Funktion

$$w(t) = (u(t) - v(t)) \exp(-\lambda t) = u_\circ - \exp(-\lambda t) v(t),$$

dass $w(0) = u_\circ - \exp(0)v(0) = 0$ und

$$\dot{w}(t) = -(-\lambda) \exp(-\lambda t) v(t) - \exp(-\lambda t) v'(t) = \lambda \exp(-\lambda t) v(t) - \exp(-\lambda t) \lambda v(t) = 0.$$

Mit Korollar 4.22 folgt: w ist konstant auf $[0,T]$ und wegen $w(0) = 0$ ist somit $w(t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$, also $u(t) = v(t)$ für alle $t \in [0,T]$. Also gibt es keine weiteren Lösungen. □

Satz 4.24. (Monotoniekriterium)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gelten:

1. f ist monoton wachsend in $[a,b]$, falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, und streng monoton wachsend in $[a,b]$, falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$.
2. f ist monoton fallend in $[a,b]$, falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, und streng monoton fallend in $[a,b]$, falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis.

Œ gelte $f'(x) \geq 0$ auf (a,b). Seien $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz 4.19

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) \geq 0 \quad \text{für ein } \xi \in (a,b).$$

Wegen $x_1 - x_2 < 0$ folgt $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$, d.h. $f(x_1) \leq f(x_2)$. □

Satz 4.25. (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für ein $x \in (a,b)$. Dann besitzt f in x ein lokales Maximum, falls $f''(x) < 0$, und ein lokales Minimum, falls $f''(x) > 0$.

Beweis.

Œ sei $f''(x) > 0$. Es gilt $f''(x) = \lim\limits_{\xi \to x} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0$, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq (a,b)$ und

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0 \quad \text{für alle } \xi \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \backslash \{x\}.$$

Da $f'(x) = 0$, folgt $f'(\xi) < 0$ für $\xi \in (x - \epsilon, x)$ und $f'(\xi) > 0$ für $\xi \in (x, x + \epsilon)$. Mit dem Monotoniekriterium 4.24 ist f somit streng monoton fallend in $[x - \epsilon, x]$ und streng monoton wachsend in $[x, x + \epsilon]$, d.h. $f(x) < f(y)$ für alle $y \in [x - \epsilon, x + \epsilon] \backslash \{x\}$. Folglich hat f ein lokales Minimum in x. □

Bemerkung 4.26.

$f'(x) = 0$ & $f''(x) \neq 0$ ist eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für das Vorliegen lokaler Extremstellen. Beispielsweise besitzt die Funktion $f(x) = x^4$ in $x = 0$ ein lokales Minimum, aber es gilt $f''(x) = 0$. ◊

Definition 4.27.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.

Bemerkung 4.28.

Konvexität bedeutet also, dass der Graph von $f|_{(x,y)}$ stets unterhalb der Sekante durch die Punkte $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ und $(y, f(y)) \in \mathbb{R}^2$ liegt. $\Diamond$

Satz 4.29. (Charakterisierung der Konvexität)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ ist konvex} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in D : f''(x) \geq 0.$$

Beweis.

1. Gelte $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $f' : D \to \mathbb{R}$ gemäß dem Monotoniekriterium 4.24 monoton wachsend. Seien nun $x, y \in D$, Œ $x < y$, und $\lambda \in (0,1)$, dann gilt für $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, dass $x < z < y$. Nach dem Mittelwertsatz 4.19 gibt es dann $\xi \in (x,z)$ und $\zeta \in (z,y)$ mit
$$\frac{f(z)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi) \leq f'(\zeta) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = \frac{f(y)-f(z)}{\lambda(y-x)},$$
also $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Folglich ist f konvex.
2. Sei umgekehrt f konvex. Gäbe es dann ein $\xi \in D$ mit $f''(\xi) < 0$, dann ist die Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)(x-\xi)$ zweimal differenzierbar mit $\varphi'(\xi) = 0$ und $\varphi''(\xi) < 0$. Nach dem hinreichenden Optimalitätskriterium 4.25 gibt es dann ein $\epsilon > 0$, so dass für $x = \xi - \epsilon$ und $y = \xi + \epsilon$ gilt $(x,y) \subseteq D$ und $\varphi(x) < \varphi(\xi)$ sowie $\varphi(y) > \varphi(\xi)$, d.h.
$$f(\xi) = \varphi(\xi) > \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y)) = \frac{1}{2} f(x) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) f(y).$$
Dies ist ein Widerspruch zur Konvexität von f. Also gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. $\square$

Lemma 4.30. (Youngsche Ungleichung)

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ für alle $x, y \geq 0$.

Beweis.

Œ gelte $x, y > 0$. Für $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt $\ln''(x) = -x^{-2} < 0$, d.h. die Logarithmusfunktion ist konkav nach Satz 4.29 und wir erhalten $\ln(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y$ bzw.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)\right) \geq \exp\left(\frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y\right) = (\exp(\ln x))^{\frac{1}{p}} (\exp(\ln y))^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}}.$$

Die Ungleichung bleibt nach Anwendung der Exponentialfunktion erhalten, da aus $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Monotoniekriterium 4.24 folgt, dass exp monoton wachsend ist. $\square$

Satz 4.31. (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis.

Gelte Œ $x, y \neq 0$. Wir definieren die Komponenten

$$\xi_i = \frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^p}, \quad \zeta_i = \frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{j=1}^n |y_j|^q} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n \zeta_i = 1.$$

Anwendung der Youngschen Ungleichung 4.30 liefert

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n |x_i y_i|}{\left(\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{\frac{1}{p}} \zeta_i^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{p} + \frac{\zeta_i}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und nach Multiplikation mit $\left(\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ ergibt sich die Behauptung. □

Satz 4.32. (Minkowski-Ungleichung)

Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis.

Der Fall $p = 1$ ergibt sich aus der Dreieicksungleichung für Beträge.

Sei also jetzt $p > 1$ und dazu $q = \frac{p}{p-1}$, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir definieren $z_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ für $i = 1, ..., n$, dann gilt mit der Hölder-Ungleichung 4.31:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|\,|z_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i z_i| \\
&\leq \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1-p}{p}}$ ergibt sich die Behauptung. □

Korollar 4.33.

Auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ definiert die Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

eine Norm, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p = 0 &\Rightarrow x = 0, && \text{(Definitheit)} \\
\|\lambda x\|_p &= |\lambda|\,\|x\|_p, && \text{(Skalierbarkeit)} \\
\|x + y\|_p &\leq \|x\|_p + \|y\|_p.. && \text{(Dreiecksungleichung)}
\end{aligned}$$

4.6. Das Newton-Verfahren

Satz 4.34. (Newton-Verfahren)

1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare, konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert genau ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.
2. Erfüllt $x_0 \in [a,b]$ die Bedingung $f(x_0) \geq 0$, dann ist die Newton-Iteration
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.
3. Gelten weiterhin $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K$ für alle $x \in (\xi, b)$, dann sind für jedes $n \geq 1$ die folgenden Fehlerabschätzungen erfüllt:
$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C}|x_n - x_{n-1}|^2$$

Beweis.

1. Nach dem Zwischenwertsatz 3.9 besitzt f mindestens eine Nullstelle.

   Wegen der Konvexität ist $f''(x) \geq 0$, d.h. f' ist auf $[a,b]$ monoton wachsend. Weiter existiert nach dem Satz vom Maximum 3.15 ein $\zeta \in [a,b]$ mit $f(\zeta) = \min f$, speziell $f(\zeta) < 0$. Nach der notwendigen Optimalitätsbedingung 4.16 ist $f'(\zeta) = 0$, falls $\zeta \neq a$, d.h. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \leq \zeta$. Also ist f auf $[a,\zeta]$ monoton fallend und kann dort keine Nullstelle haben; alle Nullstellen von f liegen damit in (ζ, b). Nehmen wir nun an, es gibt dort zwei Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$. Nach dem Mittelwertsatz 4.19 existiert dann ein $z \in (\zeta, \xi_1)$ mit $f'(z) = \frac{f(\xi_1) - f(\zeta)}{\xi_1 - \zeta} = -\frac{f(\zeta)}{\xi_1 - \zeta} < 0$, wegen der Monotonie von f' gilt also $f'(x) > 0$ für alle $x \geq \xi_1$. Damit ist f auf $[\xi_1, b]$ streng monoton wachsend und besitzt dort insbesondere keine Nullstelle, Widerspruch zu $f(\xi_2) = 0$.

2. Sei $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geq 0$, speziell $x_0 \geq \xi$. Wir zeigen induktiv, dass $f(x_n) \geq 0$ und $\xi \leq x_n \leq x_{n-1}$ erfüllt sind; speziell ist die Newton-Iteration dann wohldefiniert, da wie eben gesehen $f'(x) > 0$ für alle $x \geq \xi$. Gelte die Induktionsbehauptung also für ein $n \geq 1$. Aus $x_n \geq \xi$ folgt dann $f'(x_n) \geq f'(\xi) > 0$, also $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$ und daher $x_{n+1} \leq x_n$. Definieren $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ via $\varphi(x) = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)$. Wegen der Monotonie von f' gilt $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_n) \leq 0$ für alle $x \leq x_n$ und da $\varphi(x_n) = 0$, folgt $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \leq x_n$, also insbesondere $0 \leq \varphi(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$. Schließlich folgt mit dem Zwischenwertsatz daraus, dass $\xi \leq x_{n+1}$ gelten muss.

   Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit monoton fallend und durch ξ von unten beschränkt, konveriert nach Satz 2.6 also gegen ein $x^* \in [a,b]$. Wir erhalten $f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*) - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$, d.h. $f(x^*) = 0$. Aus der Eindeutigkeit der Nullstelle folgt dann $\xi = x^*$.

3. Wir haben eben gezeigt, dass $|\xi - x_n| = x_n - \xi \geq x_n - x_{n+1} = |x_{n+1} - x_n|$ erfüllt ist.

   Da f' monoton wächst und $f'(\xi) \geq C$ gilt, folgt $f'(x) \geq C$ für alle $x \geq \xi$, d.h. $f(x) \geq C(x - \xi)$ für $x \geq \xi$ und speziell $|\xi - x_n| \leq \frac{1}{C}f(x_n)$. Zur Abschätzung von $f(x_n)$ definiere die Hilfsfunktion $\psi(x) = f(x) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) - \frac{K}{2}(x - x_{n-1})^2$. Die Ableitungen von ψ erfüllen dann $\psi'(x) = f'(x) - f'(x_{n-1}) - K(x - x_{n-1})$ sowie $\psi''(x) = f''(x) - K$; speziell ist $\psi''(x) \leq 0$ für alle $x \in (\xi, b)$, d.h. ψ' ist monoton fallend in $[\xi, b]$. Wegen $\psi'(x_{n-1}) = 0$ folgt daraus $\psi'(x) \geq 0$ für $x \in [\xi, x_{n-1}]$ und wegen $\psi(x_{n-1}) = 0$ weiter $\psi(x) \leq 0$ für $x \in [\xi, x_{n-1}]$, speziell $\psi(x_n) \leq 0$, d.h. $f(x_n) \leq \frac{K}{2}(x_n - x_{n-1})^2$ und damit $|\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C}(x_n - x_{n-1})^2$. □

Bemerkung 4.35.

1. Das gleiche Resultat erhält man für konkave Funktionen bzw. für den Fall $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$.
2. Laut Fehlerabschätzung quadratische Konvergenzordnung des Newton-Verfahrens vor.
3. Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2$ ist konvex, da $f''(x) = 2$ für alle $x \in [0,2]$, und es gelten $f(0) < 0$ sowie $f(2) > 0$. Die Newton-Iteration konvergiert somit quadratisch gegen $\sqrt{2}$. ◊

4.7. Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz 4.36. (Banachscher Fixpunktsatz)

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Selbstabbildung, d.h. es gelte $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$.
2. Ist f differenzierbar und existiert ein $q \in (0, 1)$ mit $|f'(x)| \leq q$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist ξ eindeutig.
3. Für $x_0 \in [a, b]$ beliebig setzen wir $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ξ.
4. Es gilt die Fehlerabschätzung $|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$.

Beweis.

1. Die Existenz eines Fixpunktes von f wurde bereits in Aufgabe 30 nachgewiesen.
2. Seien $x, y \in [a, b]$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz 4.19 existiert dann ein $\xi \in (x, y)$, so dass gilt $|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)|\,|x - y| \leq q|x - y|$. Nehmen wir nun an, $\zeta \in [a, b]$ wäre ein weiterer Fixpunkt, dann ist $|\xi - \zeta| = |f(\xi) - f(\zeta)| \leq q|\xi - \zeta|$, d.h. $\xi = \zeta$, ein Widerspruch.
3. Es gilt $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n|x_1 - x_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Betrachte die Teleskopsumme $x_{n+1} = x_0 + \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k)$, dann gilt

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k) \leq x_0 + |x_1 - x_0| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = x_0 + \frac{|x_1 q - x_0|}{1-q} < \infty.$$

   Nach dem Majorantenkriterium 2.37 existiert also der Grenzwert $\xi = \lim x_n$ in $[a, b]$. Weiterhin ist $\xi = \lim x_n = \lim f(x_{n-1}) = f(\lim x_{n-1}) = f(\xi)$, d.h. ξ ist der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f.
4. Zur Fehlerabschätzung: Für alle $n \geq 1$ gilt

   $$|\xi - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_{n+k} - x_{n+k-1}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k|x_n - x_{n-1}| = \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \qquad \square$$

Beispiel 4.37.

Uns stehen somit drei verschiedene Verfahren zur Verfügung, irrationale Zahlen wie $\xi = \sqrt{2}$ mit beliebig hoher Genauigkeit anzugeben: Die Intervallschachtelung aus Beispiel 2.1, die Newton-Iteration 4.34 und das Fixpunktverfahren 4.36.

1. Bei der Intervallschachtelung wählen wir die beiden Startschranken $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$. Das Verfahren konvergiert sehr langsam; die Fehlerabschätzung ist erwartungsgemäß strikt, d.h. die Residuen $|\xi - x_n|$ konvergieren mit Ordnung 2^{-n} gegen Null.
2. Bei der Fixpunktiteration betrachten wir die Selbstabbildung $f : [1, 2] \to [1, 2]$ mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$ (die kanonische Abbildung $x \mapsto x^2 - 2 + x$ bildet nicht in das Intervall $[1, 2]$ ab). Die optimale Kontraktionskonstante q ist $\frac{1}{2} = \inf |f'(x)|$. Hier beobachten wir ein schnelleres Abklingen der Residuen, als die Ordnung der Fehlerschranke $q^n \underline{\underline{\ }}\, 2^{-n}$ es suggeriert.
3. Beim Newton-Verfahren wählen wir $f(x) = x^2 - 2$ und die Konstanten $K = C = 2$. Die Fehlerschranken sind dann strikt und die quadratische Konvergenzordnung des Verfahrens führt zu einem sehr schnellen Abklingen der Residuen.

	Intervallschachtelung		Fixpunkt-Iteration		Newton-Iteration	
♯	Fehler	Schranke	Fehler	Schranke	Fehler	Schranke
1	1.6421e-01	2.5000e-01	2.3286e-02	3.1250e-02	2.4531e-03	3.4722e-03
2	3.9214e-02	1.2500e-01	6.6849e-03	1.5625e-02	2.1239e-06	3.0037e-06
3	2.3286e-02	6.2500e-02	1.9468e-03	7.8125e-03	1.5947e-12	2.2555e-12
4	7.9636e-03	3.1250e-02	5.6925e-04	3.9062e-03	1.0000e-16	2.2204e-15
20	1.4341e-07	2.3842e-07	4.8872e-13	2.9802e-08	1.0000e-16	1.0000e-16
40	1.1324e-14	2.2737e-13	1.0000e-16	2.8422e-14	1.0000e-16	1.0000e-16

4.8. Der Satz von Taylor

Bemerkung 4.38.

Für ein Polynom $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ bezeichne $P^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung von P, wobei wir $P^{(0)}(x) = P(x)$ setzen. Dann gilt:

$$\begin{array}{rclcccccccccc}
P^{(0)}(x) & = & a_0 & + & a_1 x & + & a_2 x^2 & + & a_3 x^3 & + & \cdots & + & a_n x^n \\
P^{(1)}(x) & = & & & a_1 & + & 2a_2 x & + & 3a_3 x^2 & + & \cdots & + & n a_n x^{n-1} \\
P^{(2)}(x) & = & & & & & 2a_2 & + & 6a_3 x & + & \cdots & + & n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} \\
P^{(3)}(x) & = & & & & & & & 6a_3 & + & \cdots & + & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) a_n x^{n-3} \\
\vdots & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
P^{(n)}(x) & = & & & & & & & & & & & n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 a_n
\end{array}$$

Also lässt sich P schreiben als

$$P(x) = \frac{P(0)}{0!} x^0 + \frac{P'(0)}{1!} x^1 + \frac{P''(0)}{2!} x^2 + \frac{P'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k. \qquad \diamondsuit$$

Lemma 4.39.

Seien $a < 0 < b$ und $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar $(n \in \mathbb{N}_0)$ mit $F^{(k)}(0) = 0$ für alle $k = 1, ..., n$. Dann gibt es zu jedem $x \in (a, b) \backslash \{0\}$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$F(x) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Beweis.

Setze $G(t) = F(t) - \frac{t^{n+1}}{x^{n+1}} F(x)$, dann gilt nach dem Mittelwertsatz 4.19:

$$\left.\begin{array}{rcl} G(0) & = & 0 \\ G(x) & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \text{ es gibt ein } \xi_1 \text{ zwischen } 0 \text{ und } x \text{ mit } G'(\xi_1) = 0;$$

$$\left.\begin{array}{rcl} G'(0) & = & 0 \\ G'(\xi_1) & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \text{ es gibt ein } \xi_2 \text{ zwischen } 0 \text{ und } \xi_1 \text{ mit } G''(\xi_2) = 0.$$

$$\vdots \quad \text{(Induktion)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} G^{(n)}(0) & = & 0 \\ G^{(n)}(\xi_n) & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \text{ es gibt ein } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } \xi_n \text{ mit } G^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Wegen $G^{(n+1)}(t) = F^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} F(x)$ folgt mit $t = \xi$ die Behauptung. □

Satz 4.40. (Satz von Taylor)

Seien $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann existiert zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x_0 und x, so dass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_{n+1}(x, \xi).$$

P_n heißt das n-te Taylor-Polynom von f zum Entwicklungspunkt x_0 und R_{n+1} das Lagrange-Restglied.

Beweis.

Definiere $g : (a - x_0, b - x_0) \to \mathbb{R}$ durch $g(y) = f(y + x_0)$, dann erfüllt $F : (a - x_0, b - x_0) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(y) = g(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k$$

die Voraussetzungen von Lemma 4.39, d.h. zu jedem $y \neq 0$ existiert ein ζ zwischen 0 und y mit

$$\begin{aligned} f(y+x_0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} y^k &= g(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k = F(y) = \frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} y^{n+1} \\ &= \frac{g^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} y^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\zeta + x_0)}{(n+1)!} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Sei nun $x = y + x_0 \in (a,b)$, dann liegt $\xi = \zeta + x_0$ zwischen x_0 und x und es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \qquad \square$$

Beispiel 4.41.

Seien $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$. Dann gelten

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} \quad (k \geq 1), \qquad f^{(k)}(x_0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad (k \geq 1), \qquad f^{(0)}(x_0) = 0.$$

Also ist das n-te Taylor-Polynom von f zu x_0 gegeben als

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k.$$

Sei nun $x > 0$ mit passender Zwischenstelle ξ zwischen x und x_0, dann gilt für das Restglied:

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x,\xi)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \frac{1}{\xi^{n+1}} (x-1)^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\min\{1,x\}^{n+1}} |x-1|^{n+1} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \quad \text{für } x \in (0,2], \end{aligned}$$

denn $|x-1|^{n+1} \leq 1$, falls $|x-1| \leq 1$, d.h. falls $x \in (0,2]$.

Außerdem konvergiert die Folge $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für $x \in (0,2]$ nach dem Leibnitzschen Konvergenzkriterium 2.42 für jedes $x \in (0,2]$. $\diamondsuit$

Korollar 4.42.

Für $x \in (0,2]$ besitzt der natürliche Logarithmus die Reihendarstellung

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k, \qquad \text{speziell} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$

Bemerkung 4.43.

1. Der Konvergenzradius ist nicht unbedingt größer als 0.
2. Falls die Taylor-Reihe konvergiert, konvergiert sie nicht unbedingt gegen f.
3. Die Taylor-Reihe konvergiert genau dann gegen f, wenn das Restglied in x für $n \to \infty$ verschwindet. $\diamondsuit$

Definition 4.44.

Sei f beliebig oft differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$P_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

4.9. Die Regeln von l'Hopital

Satz 4.45. (l'Hopital)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und $s \in \{a, b\}$. Weiter seien $g(x)$ und $g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$ von 0 verschieden. Dann gelten:

1. Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to s} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to s} g(x)$ und besitzen den Wert 0, dann gilt:
$$L = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert in } \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$
2. Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to s} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to s} g(x)$ und besitzen den Wert $\pm\infty$, dann gilt:
$$L = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert in } \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Beweis.

1. Œ gelte $s = b$. Ist $b \in \mathbb{R}$, dann existiert nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 4.20 zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\xi \in (x, s)$ mit
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(s)}{g(x) - g(s)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \xrightarrow{x\to s} \quad L.$$
Ist $b = +\infty$, dann folgt aus dem eben Gezeigten:
$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} = \frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$
2. Œ gelte wieder $s = b$. Da $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist g nach dem Satz von Rolle 4.18 streng monoton, Œ streng monoton wachsend, und nach Bemerkung 3.49 speziell injektiv. Damit existiert die Umkehrabbildung $\psi = g^{-1} : g(a, b) \to (a, b)$. Für die Verkettung $\phi = f \circ \psi : g(a, b) \to \mathbb{R}$ gilt dann
$$\lim_{y\to+\infty} \phi'(y) = \lim_{y\to+\infty} f'(\psi(y))\psi'(y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{f'(\psi(y))}{g'(\psi(y))} = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$
Mit Lemma 4.46 folgt $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\phi(y)}{y} = L$. Für jede Folge $(x_n)n \in \mathbb{N} \subseteq (a, b)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$ ist also
$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(g(x_n))}{g(x_n)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{F(y)}{y} = L. \qquad \square$$

Lemma 4.46.

Seien $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Gilt dann $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = c$, so auch $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

Beweis.

Œ gelte $c = 0$, andernfalls betrachte die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - cx$. Wegen $\lim f'(x) = 0$ gibt es zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein $x_0 > \max\{a, 0\}$ mit $|f'(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für $x \geq x_0$. Nach dem Mittelwertsatz 4.19 existiert ein $\xi \in \{x_0, x\}$, so dass gilt: $f'(\xi)(x - x_0) = |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}(x - x_0)$ für alle $x \geq x_0$ und damit auch $\frac{|f(x)-f(x_0)|}{x} \leq \frac{\epsilon}{2}\frac{x-x_0}{x} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Für alle $x \geq \max\{x_0, \frac{2|f(x_0)|}{\epsilon}\}$ gilt somit:
$$\frac{|f(x)|}{x} \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{x} + \frac{|f(x_0)|}{x} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square$$

Beispiel 4.47.

Es gelten $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$ und $\lim\limits_{h\to 0} h\ln(h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(h)}{h^{-1}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^{-1}}{-h^{-2}} = \lim\limits_{h\to 0} -h = 0.$ $\Diamond$

5. Integrierbarkeit

5.1. Darboux-Summe und Riemann-Integral

Bemerkung 5.1.

Wir suchen eine Methode, die Fläche F zwischen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse zu bestimmen. Sei etwa $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Wir definieren die Zerlegung der Basisintervalls $[0, 1] = [0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \cup \cdots \cup [\frac{n-1}{n}, 1]$ und die Mittelpunkte der Teilintervalle $m_i = \frac{2i+1}{2n} \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Dann ist F approximativ bestimmt durch die Summe der n Rechtecke mit identischer Breite $\frac{1}{n}$ und individueller Höhe $f(m_i)$. Es gilt also mit den Potenzsummenformeln

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(m_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2i+1)^2}{4n^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2+4i+1}{4n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{2n^3+6n^2+n}{6} + \frac{n^2+n}{2} + \frac{n}{4}\right) = \frac{4n^3+18n^2+11n}{12n^3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich folgende zentrale Fragen:

1. Ist der Grenzwert $\lim \frac{1}{n}(f(m_1) + \cdots + f(m_n))$ ein vernünftiges Flächenmaß?
2. Welche Eigenschaften muss eine Funktion f haben, damit dieser Grenzwert überhaupt existiert?
3. Ist F unabhängig von der Wahl der Zerlegung des Intervalls und der Wahl der Punkte m_i? $\Diamond$

Definition 5.2.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

1. Eine Zerlegung Z von $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge von $[a, b]$ mit $a, b \in Z$. $\mathcal{Z}([a, b])$ bezeichnet die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.
2. $Y \in \mathcal{Z}([a, b])$ heißt feiner als $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$, falls $Y \subseteq Z$. Dann heißt Z gröber als Y.
3. $N : \mathcal{Z}([a, b]) \to \mathbb{N}$ ordnet jeder Zerlegung die um 1 reduzierte Zahl der enthaltenen Punkte zu. Seien $t_0 < \cdots < t_{N(Z)}$ die Elemente von $Z \in \mathcal{Z}$. Dann ist $I_k(Z) = [t_{k-1}, t_k]$ das k-te Teilintervall bzgl. Z.
4. Die Breite von $I_k(Z)$ beträgt $\Delta_k(Z) = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, ..., N(Z)$.
5. Wir setzen $\mathrm{m}(f, S) = \inf\limits_{x\in S} f(x)$ und $\mathrm{M}(f, S) = \sup\limits_{x\in S} f(x)$ für $S \subseteq [a, b]$ sowie
$$F_*(f, Z) = \sum_{k=1}^{N(Z)} \mathrm{m}(f, I_k(Z))\Delta_k(Z), \qquad F^*(f, Z) = \sum_{k=1}^{N(Z)} \mathrm{M}(f, I_k(Z))\Delta_k(Z).$$
$F_*(f, Z)$ wird untere Darboux-Summe und $F^*(f, Z)$ obere Darboux-Summe von f bzgl. Z genannt.
6. Das untere Darboux-Integral $F_*(f)$ und das obere Darboux-Integral $F^*(f)$ von f über $[a, b]$ sind
$$F_*(f) = \sup\{F_*(f, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}, \qquad F^*(f) = \inf\{F^*(f, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}.$$
7. f heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, falls $F_*(f) = F^*(f)$ gilt. Den gemeinsamen Wert nennen wir dann das Riemann-Integral von f; dieses bezeichnen wir mir
$$F(f) = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 5.3.

Nicht jede Funktion ist Riemann-integrierbar: Sei $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ auf $[0, 1]$, d.h. $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann gelten für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$, dass $\mathrm{m}(f, I_k(Z)) = 0$ und $\mathrm{M}(f, I_k(Z)) = 1$, d.h. $F_*(f) = 0 < 1 = F^*(f)$. Also existiert das Riemann-Integral von f über $[0, 1]$ nicht. $\Diamond$

Lemma 5.4.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gelten:

1. Sind $Y, Z \in \mathcal{Z}([a, b])$ mit $Z \subseteq Y$, dann ist $F_*(f, Z) \leq F_*(f, Y) \leq F^*(f, Y) \leq F^*(f, Z)$.
2. Sind $Y, Z \in \mathcal{Z}([a, b])$ zwei Zerlegungen, dann ist $F_*(f, Y) \leq F^*(f, Z)$.
3. Für die Darboux-Integrale ist stets $F_*(f) \leq F^*(f)$ erfüllt.

Beweis.

1. Seien $Z = \{t_0, ..., t_N\}$ mit $t_0 < \cdots < t_N$ und $t_{k_0-1} < t < t_{k_0}$, $Y = Z \cup \{t\}$ eine Verfeinerung von Z um einen Punkt. Dann gilt $\Delta_{k_0}(Y) + \Delta_{k_0+1}(Y) = \Delta_{k_0}(Z)$, also
$$\begin{aligned} F_*(f, Z) - F_*(f, Y) &= \sum_{k=1}^{N(Z)} \mathrm{m}(f, I_k(Z))\Delta_k(Z) - \sum_{k=1}^{N(Y)} \mathrm{m}(f, I_k(Y))\Delta_k(Y) \\ &= \mathrm{m}(f, I_{k_0}(Z))\Delta_{k_0}(Z) - \mathrm{m}(f, I_{k_0}(Y))\Delta_{k_0}(Y) - \mathrm{m}(f, I_{k_0+1}(Y))\Delta_{k_0+1}(Y) \\ &= (\mathrm{m}(f, I_{k_0}(Z)) - \mathrm{m}(f, I_{k_0}(Y)))\Delta_{k_0}(Y) \\ &\quad + (\mathrm{m}(f, I_{k_0}(Z)) - \mathrm{m}(f, I_{k_0+1}(Y)))\Delta_{k_0+1}(Y); \end{aligned}$$
da $I_{k_0}(Y) \subseteq I_{k_0}(Z)$ und $I_{k_0+1}(Y) \subseteq I_{k_0}(Z)$, sind beide Summanden negativ, d.h. $F_*(f, Z) \leq F_*(f, Y)$.

   Die Untersumme wächst also oder bleibt gleich bei Verfeinerung um einen Punkt. Per Induktion zeigt man: Die Untersumme fällt nie bei jeder beliebigen Verfeinerung. Analog wächst die Obersumme nie bei jeder beliebigen Verfeinerung, d.h. $F^*(f, Y) \leq F^*(f, Z)$. Wegen $\mathrm{m}(f, S) \leq \mathrm{M}(f, S)$ für alle $S \subseteq [a, b]$ folgt schließlich, dass $F_*(f, Y) \leq F^*(f, Y)$.
2. Sei $X = Y \cup Z$. Dann ist X eine Verfeinerung von Y und von Z. Mit (1) folgt:
$$F_*(f, Y) \leq F_*(f, X) \leq F^*(f, X) \leq F^*(f, Z).$$
3. Sei $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$. Nach (2) ist dann $F_*(f, Y) \leq F^*(f, Z)$ für alle $Y \in \mathcal{Z}([a, b])$, also
$$F_*(f) = \sup F_*(f, Y) \leq \inf F^*(f, Z) = F^*(f).$$
□

Satz 5.5. (Charakterisierung der Integrierbarkeit)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$f \text{ ist integrierbar} \quad \iff \quad \forall \epsilon > 0 : \exists Z \in \mathcal{Z}([a, b]) : F^*(f) - F_*(f) < \epsilon.$$

Beweis.

1. Sei f integrierbar, d.h. $F^*(f) = F_*(f)$. Dann liefert Satz 1.38 zu $\epsilon > 0$:
$$\exists Z_1 \in \mathcal{Z}([a, b]) : F_*(f, Z_1) > F_*(f) - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \exists Z_2 \in \mathcal{Z}([a, b]) : F^*(f, Z_2) < F^*(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$
   Mit $Z = Z_1 \cup Z_2$ folgt dann:
$$F^*(f, Z) - F_*(f, Z) \leq F^*(f, Z_2) - F_*(f, Z_1) < F^*(f) + \frac{\epsilon}{2} - F_*(f) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
2. Sei umgekehrt $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$ mit $F^*(f, Z) - F_*(f, Z) < \epsilon$, also
$$F^*(f) \leq F^*(f, Z) < F_*(f, Z) + \epsilon \leq F_*(f) + \epsilon.$$
   Es folgt $F^*(f) \leq F_*(f)$ und Lemma 5.4 liefert $F^*(f) = F_*(f)$, also ist f integrierbar. □

Satz 5.6.

Monotone Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.

Beweis.

Wähle die äquidistante Zerlegung $Z_n = \{t_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \mid k = 0, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, dann sind $\Delta_k(Z_n) = \frac{b-a}{n}$ für alle k und $N(Z_n) = n$.

1. Sei f monoton, Œ wachsend. Dann sind $\mathrm{m}(f, I_k(Z_n)) = f(t_{k-1})$ und $\mathrm{M}(f, I_k(Z_n)) = f(t_k)$, also
$$F_*(f, Z_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) \qquad \text{und} \qquad F^*(f, Z_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k).$$
Zu $\epsilon > 0$ wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon$. Die Behauptung folgt mit Satz 5.5 aus
$$F^*(f, Z_n) - F_*(f, Z_n) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon.$$

2. Seien f stetig und $\epsilon > 0$. Da f auf $[a,b]$ nach Satz 3.28 sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit
$$\forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$
f nimmt auf $I_k(Z_n)$ nach dem Satz vom Maximum 3.15 jeweils Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $x_k^{\min}, x_k^{\max} \in I_k(Z_n)$ mit $\mathrm{m}(f, I_k(Z_n)) = f(x_k^{\min})$ und $\mathrm{M}(f, I_k(Z_n)) = f(x_k^{\max})$. Ist nun n so groß gewählt, dass $\Delta_k(Z_n) = \frac{b-a}{n} < \delta$, so folgt $f(x_k^{\max}) - f(x_k^{\min}) < \frac{\epsilon}{b-a}$, also
$$F^*(f, Z_n) - F_*(f, Z_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k^{\max}) - f(x_k^{\min})) < \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon. \qquad \square$$

Satz 5.7. (Numerische Integration)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar. Ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\Delta(Z_n) = \max\{\Delta_k(Z_n \mid k = 1, ..., N(Z)\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und sind $x_k^{(n)}$ beliebige Stützstellen, so gilt:
$$I(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{N(Z_n)} f(x_k^{(n)})\Delta_k(Z_n) \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Sei $\epsilon > 0$. Da f integrierbar ist, existiert nach Satz 5.5 $Y \in \mathcal{Z}([a,b])$ mit $F^*(f, Y) - F_*(f, Y) < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $M = N(Y)$ die Anzahl der Intervalle in Y und $\Delta(f) = \max\{\mathrm{M}(f, [a,b]) - \mathrm{m}(f, [a,b]), 1\}$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\Delta(Z_n) < \frac{\epsilon}{4M\Delta(f)}$ für alle $n \geq N$. Sei $n \geq N$. Setze $Y_n = Y \cup Z_n$. Y_n ist um höchstens M Punkte feiner als Z_n. Da Y_n feiner als Y ist, gilt $F^*(f, Y_n) - F_*(f, Y_n) \leq F^*(f, Y) - F_*(f, Y) < \frac{\epsilon}{2}$. Außerdem ist Y_n feiner als Z_n. Nach der Rechnung im Beweis zu Satz 5.5 gelten weiter
$$F^*(f, Z_n) \leq F^*(f, Y_n) + M\Delta(f)\Delta(Z_n), \qquad F_*(f, Z_n) \geq F_*(f, Y_n) - M\Delta(f)\Delta(Z_n).$$
Damit erhalten wir
$$0 \leq F^*(f, Z_n) - F_*(f, Z_n) \leq F^*(f, Y_n) + \frac{\epsilon}{4} - F_*(f, Y_n) + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$
Aus $\mathrm{m}(f, I_k(Z_n)) \leq f(x_k^{(n)}) \leq \mathrm{M}(f, I_k(Z_n))$ folgt weiter $F_*(f, Z_n) \leq I(f, Z_n) \leq F^*(f, Z_n)$, also
$$\lim_{n\to\infty} F_*(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} F^*(f, Z_n).$$
Schließlich gilt wegen der Integrierbarkeit von f, dass $F_*(f) = F^*(f)$, also
$$0 \leq F^*(f, Z_n) - F^*(f) = F^*(f, Z_n) - F_*(f) \leq F^*(f, Z_n) - F_*(f, Z_n) < \epsilon$$
und damit $\lim_{n\to\infty} I(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} F^*(f, Z_n) = F^*(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Beispiel 5.8. (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ ist stetig, also nach Satz 5.6 integrierbar.

Sei $Z_n = \{t_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \mid k = 0, ..., n\}$ eine äquidistante Zerlegung, dann ist $\Delta(Z_n) = \frac{b-a}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Mit Satz 5.7 lässt sich das Integral von f über $[a, b]$ somit für hinreichend großes n näherungsweise bestimmen durch

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \quad \approx \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t_k^2}{2}\right).$$

Dieser Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine normalverteilte Zufallsvariable x einen Wert zwischen a und b annimmt. ◊

Satz 5.9.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Zerlegungsfolge von $[a, b]$.

Existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für jede Wahl von $x_k^{(n)} \in I_k(Z_n)$ stets

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(Z_n)} f(x_k^{(n)}) \Delta_k(Z_n) = c,$$

erfüllt ist, so ist f integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c$.

Beweis.

Konstruiere zu $Z_n \in \mathcal{Z}([a, b])$ Punkte $\bar{x}_k^{(n)}$ und $\underline{x}_k^{(n)}$ in $I_k(Z_n)$, für die gelten $|\mathrm{M}(f, I_k(Z_n) - f(\bar{x}_k^{(n)})| < \frac{1}{n}$ sowie $|\mathrm{m}(f, I_k(Z_n) - f(\underline{x}_k^{(n)})| < \frac{1}{n}$. Nach Voraussetzung gilt für die Terme

$$I_*(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{N(Z_n)} f(\underline{x}_k^{(n)}) \Delta_k(Z_n), \qquad I^*(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{N(Z_n)} f(\bar{x}_k^{(n)}) \Delta_k(Z_n),$$

dass $I_*(f, Z_n) \to c$ und $I^*(f, Z_n) \to c$ für $n \to \infty$, also $I^*(f, Z_n) - I_*(f, Z_n) \to 0$ sowie $F^*(f, Z_n) - I^*(f, Z_n) \leq \frac{1}{n}(b-a)$ und $F_*(f, Z_n) - I_*(f, Z_n) \leq \frac{1}{n}(b-a)$. Zu $\epsilon > 0$ existieren dann $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|I^*(f, Z_n) - I_*(f, Z_n)| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_1$ und $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ für $n \geq N_2$. Wähle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, dann gilt:

$$|F^*(f, Z_n) - F_*(f, Z_n)| \leq |F^*(f, Z_n) - I^*(f, Z_n)| + |I^*(f, Z_n) - I_*(f, Z_n)| + |I_*(f, Z_n) - F_*(f, Z_n)| < \epsilon.$$

Also f integrierbar. Außerdem gilt für hinreichend großes n:

$$\begin{aligned} c - \frac{\epsilon}{2} &< I_*(f, Z_n) < F_*(f, Z_n) + \frac{\epsilon}{4} < F_*(f) + \frac{\epsilon}{4} = F^*(f) + \frac{\epsilon}{4} < F^*(f, Z_n) + \frac{\epsilon}{4} \\ &< I^*(f, Z_n) + \frac{\epsilon}{4} < I^*(f, Z_n) + \frac{\epsilon}{2} < c + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = c + \epsilon, \end{aligned}$$

und somit $-\frac{3}{4}\epsilon < F_*(f) - c < \frac{3}{4}\epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_*(f) = c.$$

□

5.2. Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 5.10. (Analytische Integration)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf (a, b) differenzierbare Funktion mit integrierbarer Ableitung f'. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Beweis.

Sei $Z_n = \{t_0, ..., t_n\}$ eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$. Dann existieren nach dem Mittelwertsatz 4.19 Zwischenstellen $\xi_k^{(n)}$ zwischen t_{k-1} und t_k mit

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{\Delta_k(Z_n)} \Delta_k(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k^{(n)}) \Delta_k(Z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Definition 5.11.

Seien $F : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. Dann heißt F eine Stammfunktion von f.

Bemerkung 5.12.

Aus Satz 5.10 ergibt sich somit: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad \diamond$$

Beispiel 5.13.

1. Sei F eine Stammfunktion von f, dann ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f für alle $c \in \mathbb{R}$.
2. Sei $f(x) = x^m$. Dann ist eine Stammfunktion F von f gegeben durch $F(x) = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$ für $m \neq -1$ und $F(x) = \ln |x|$ für $m = -1$.
3. Auf diese Weise analytisch berechenbare Integrale sind nach den bekannten Ableitungsformeln z.B.

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a, \quad \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \quad \int_a^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}), \quad \int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = e^b - e^a. \qquad \diamond$$

Satz 5.14. (Linearität des Integraloperators)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und λf integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b (f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Seien $Z_n \in \mathcal{Z}([a, b])$ eine Zerlegungsfolge mit $\Delta(Z_n) \to 0$ und $x_k^{(n)} \in I_k(Z_n)$ beliebig. Mit Satz 5.7 folgen:

$$\begin{aligned} I(f, Z_n) &= \sum_{k=1}^{N(Z_n)} f(x_k^{(n)}) \Delta_k(Z_n) &&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \\ I(g, Z_n) &= \sum_{k=1}^{N(Z_n)} g(x_k^{(n)}) \Delta_k(Z_n) &&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dann gelten auch

$$\begin{aligned} I(f + g, Z_n) = I(f, Z_n) + I(g, Z_n) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x; \\ I(\lambda f, Z_n) = \lambda I(f, Z_n) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit Satz 5.9 ergibt sich: $f + g$ und λf sind integrierbar mit

$$\int_a^b (f + g)(x)\,\mathrm{d}x = c \qquad \text{und} \qquad \int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = d. \qquad \square$$

Bemerkung 5.15.

1. In der Sprache der Linearen Algebra heißt das: Die Menge $\mathcal{I} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}$ bildet mit der üblichen Addition und Multiplikation von Funktionen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ und der Integraloperator $\int : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.
2. Entsprechend ist der Differenzialoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ zwischen den beiden reellen Vektorräumen $\mathcal{D} = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$ und $\mathcal{F} = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$ eine lineare Abbildung gemäß den Ableitungsregeln 4.5. ◊

Bemerkung 5.16.

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist auch fg integrierbar, aber im Allgemeinen gilt

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \lozenge$$

Satz 5.17. (Dreiecksungleichung für Integrale)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $|f|$ integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Es gilt

$$\mathrm{M}(|f|, S) - \mathrm{m}(|f|, S) \leq \mathrm{M}(f, S) - \mathrm{m}(f, S) \qquad \text{für alle } S \subseteq [a,b],$$

wobei Gleichheit nur herrscht, wenn f auf S sein Vorzeichen nicht wechselt. Damit ist nach Satz 5.5

$$F^*(|f|, Z) - f_*(|f|, Z) \leq F^*(f, Z) - f_*(f, Z) < \epsilon,$$

d.h. $|f|$ ist integrierbar. Mit Satz 5.7 und der Dreiecksungleichung für Summen folgt die Behauptung. □

Satz 5.18. (Monotonie des Integraloperators)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Die Hilfsfunktion $h = f - g$ ist integrierbar und es gilt $h > 0$. Dann ist auch $F^*(h, Z) > 0$ für alle Zerlegungen $Z \in \mathcal{Z}([a,b])$, also $F^*(f) > 0$, d.h.

$$0 \leq \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = F^*(h) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Lemma 5.19.

Sind $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\bar{x} \in [a,b]$, so ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \chi_{\{\bar{x}\}}(x)$ integrierbar mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Beweis.

Sei $\epsilon > 0$. Wähle n so, dass $\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $Z_n = \{t_0, ..., t_n\}$ eine äquidistante Zerlegung. Dann ist in jedem Fall $F_*(f, Z_n) = 0$, weiter gilt $F^*(f, Z_n) = \frac{b-a}{n}$, falls $\bar{x} \in (t_k, t_{k+1})$ für ein k und $F^*(f, Z_n) = 2\frac{b-a}{n}$ im Fall $\bar{x} = t_k$ für ein k. Also ist $F^*(f, Z_n) - F_*(f, Z_n) < \epsilon$ und mit Satz 5.5 folgt: f ist integrierbar. Außerdem folgt aus $F_*(f, Z) = 0$ für alle $Z \in \mathcal{Z}([a,b])$, dass $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_*(f) = 0$. □

Korollar 5.20. (Invarianz unter endlichen Mengen)

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$ für alle bis auf endlich viele $x \in [a,b]$. Dann ist auch g integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Seien $x_1, ..., x_n$ diejenigen Stellen x in $[a,b]$ mit $f(x) \neq g(x)$. Dann ist $f(x) = g(x)+h(x)$ für alle $x \in [a,b]$, wobei $h(x) = f(x) - g(x)$ für $x \in \{x_1, ..., x_n\}$ und $h(x) = 0$ sonst. Dann ist $h = \chi_{x_1} + \cdots + \chi_{x_n}$ nach Satz 5.19 integrierbar, also auch $g = f - h$, und es gilt $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$, d.h.

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Satz 5.21. (Intervalladditivität)

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $c \in [a,b]$. Sind $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ integrierbar, so auch f mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Seien $(Z_n^{(1)}) \in \mathcal{Z}([a,c])$ und $(Z_n^{(2)}) \in \mathcal{Z}([c,b])$ Zerlegungsfolgen mit $\Delta(Z_n^{(1)}),\ \Delta(Z_n^{(2)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Setze $Z_n = Z_n^{(1)} \cup Z_n^{(2)} \in \mathcal{Z}([a,b])$ und wähle Stützstellen $x_n^{(k)} \in I_k(Z_n)$, dann gilt nach Satz 5.7:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N(Z_n)} f(x_n^{(k)})\Delta_k(Z_n) &= \sum_{k=1}^{N(Z_n^{(1)})} f(x_k^{(n)})\Delta_k(Z_n^{(1)}) + \sum_{k=1}^{N(Z_n^{(2)})} f(x_{k+N(Z_n^{(1)})}^{(n)})\Delta_k(Z_n^{(2)}) \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

und mit Satz 5.9 folgt, dass f integrierbar ist mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Korollar 5.22.

1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stückweise stetig, d.h. es existiere eine Zerlegung $\{t_0, ..., t_m\} \in \mathcal{Z}([a,b])$ mit $t_0 < ... < t_m$, so dass $f|_{(t_{k-1},t_k)}$ gleichmäßig stetig ist für alle $k = 1, ..., m$. Dann ist f integrierbar und das Integral von f ist die Summe der Teilintegrale.
2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stückweise monoton, d.h. es existiere eine Zerlegung $\{t_0, ..., t_m\} \in \mathcal{Z}([a,b])$ mit $t_0 < ... < t_m$, so dass $f|_{(t_{k-1},t_k)}$ monoton ist für alle $k = 1, ..., m$. Dann ist f integrierbar und das Integral von f ist die Summe der Teilintegrale.

5.3. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Bemerkung 5.23.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wir suchen ein $\xi \in \mathbb{R}$, so dass die Abweichung zwischen ξ und $f(x)$ im Mittel über $x \in [a,b]$ möglichst klein ist:

$$\min_{\xi\in\mathbb{R}} I(\xi) = \int_a^b |f(x) - \xi|^2\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(Extremwertaufgabe)}$$

Nach der notwendigen Optimalitätsbedingung 4.16 lässt sich ξ dann bestimmen via

$$I'(\xi) = -2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\xi(b-a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dass dieser stationäre Punkt tatsächlich ein Minimum ist, folgt aus der hinreichenden Optimalitätsbedingung 4.25: $I''(\xi) = 2(b-a) > 0$.

Geometrisch bedeutet dies, dass die Fläche zwischen ξ und der x-Achse gleich der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse ist. ◊

Beispiel 5.24.

Der Mittelwert der Sinus-Funktion $\sin : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ beträgt Null:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}(-\cos(2\pi) + \cos(0)) = 0. \qquad \Diamond$$

Satz 5.25. (Mittelwertsatz für Integrale)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein Wert $\bar{x} \in [a, b]$, so dass gilt:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Da f stetig ist, gibt es nach dem Satz vom Maximum 3.15 $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ für alle $x \in [a, b]$. Wegen der Monotonie des Integrals 5.18 gilt:

$$\int_a^b f(x_{\min})\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x_{\max})\,\mathrm{d}x$$

und da $x_{\min}, x_{\max}$ konstant sind, folgt

$$(b-a)f(x_{\min}) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)f(x_{\max}) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_{\min}) \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{=\xi} \leq f(x_{\max})$$

nach dem Zwischenwertsatz 3.9 gibt es ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\bar{x}) = \xi$. □

Bemerkung 5.26.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann definieren wir

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \Diamond$$

Korollar 5.27. (lokale Version des Mittelwertsatzes für Integrale)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und stetig in $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s = f(x_0).$$

Beweis.

Mit der Dreiecksungleichung für Integrale 5.17 gilt:

$$\begin{aligned} R(x) &= \left| f(x_0) - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s \right| = \left| \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0) - f(s)\,\mathrm{d}s \right| \\ &= \frac{1}{|x-x_0|}\left| \int_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} f(x_0) - f(x) \right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} |f(x_0) - f(s)|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Da f stetig ist, gibt es dazu ein $\delta > 0$, so dass $|f(x_0) - f(s)| < \epsilon$, falls $|x_0 - s| < \delta$. Ist also $|x - x_0| < \delta$, so folgt:

$$R(x) \leq \frac{\max(x, x_0) - \min(x, x_0)}{|x - x_0|}\epsilon = \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} R(x) = 0. \qquad \square$$

5.4. Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz 5.28. (Hauptsatz der Infinitesimalrechnung)

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Dann ist F stetig. Ist f stetig in $x_0 \in [a, b]$, dann ist F dort differenzierbar mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a, b) und sei eine Fortsetzung von f' auf ganz $[a, b]$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Beweis.

1. Sei $L > 0$ eine obere Schranke für $|f|$. Dann ist f bzgl. L Lipschitz-stetig, denn für $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(s)\,\mathrm{d}s \right| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f(s)|\,\mathrm{d}s \leq L(\max(x, y) - \min(x, y)) = L|x - y|.$$

   Sei nun f zusätzlich stetig in x_0, dann gilt für $x \in [a, b]$, Œ $x > x_0$, dass $[a, x] = [a, x_0] \cup [x_0, x]$. Mit der Intervalladditivität 5.21 folgt:

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

   und der lokale Mittelwertsatz der Integralrechnung 5.27 liefert

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s = f(x_0).$$

2. Da f offenbar eine Stammfunktion von f' ist, folgt die Behauptung aus dem Satz zur analytischen Integration 5.10. Beachte dabei, dass die Wahl der Randwerte bei der Fortsetzung von $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ nach der Invarianz des Integrals unter endlichen Mengen 5.20 keinen Einfluss auf den Wert des Integrals hat. $\square$

Bemerkung 5.29.

Ist f nicht stetig in x_0, so muss F nicht differenzierbar in x_0 sein. Betrachte zum Beispiel die Heavyside-Funktion $H = \chi_{\mathbb{R}^+}$ aus Beispiel 3.2: Diese ist in $x_0 = 0$ unstetig und F hat die Darstellung $F(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $F(x) = x$ sonst. Also ist F keine Stammfunktion von f. $\Diamond$

Definition 5.30.

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, falls f' existiert und stetig ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^n((a, b)) &= \{f : (a, b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar auf } (a, b)\}, \\ \mathcal{C}^n([a, b]) &= \{f \in \mathcal{C}^n(a, b) \mid \text{ alle Ableitungen sind gleichmäßig stetig auf } (a, b)\}. \end{aligned}$$

Außerdem definieren wir $\mathcal{C}^\infty((a, b)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n((a, b))$ sowie $\mathcal{C}^\infty([a, b]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n([a, b])$.

Bemerkung 5.31.

1. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, dann kann f stetig auf $[a, b]$ fortgesetzt werden.
2. Offensichtlich gilt: $\mathcal{C}^0((a, b)) \supseteq \mathcal{C}^1((a, b)) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^\infty((a, b))$, Gleiches gilt für Intervalle $[a, b]$. $\Diamond$

Beispiel 5.32.

1. Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ liegt in $\mathcal{C}^\infty((0, 2))$, aber f ist nicht gleichmäßig stetig, d.h. $f \notin \mathcal{C}^\infty([0, 2])$.
2. Sei f eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, dann ist $f \in \mathcal{C}^\infty((-R, R))$ nach Korollar 4.12. $\Diamond$

Bemerkung 5.33.

1. Die $\mathcal{C}^n$-Funktionenräume sind reelle Vektorräume. Nach Bemerkung 5.15 sind der Integraloperator $I : \mathcal{C}^0([a, b]) \to \mathcal{C}^1([a, b])$ und der Differenzialoperator $D : \mathcal{C}^1([a, b]) \to \mathcal{C}^0([a, b])$, gegegen durch
$$(If)(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad (Df)(x) = f'(x)$$
lineare Abbbildungen.
2. Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 5.28 gelten weiterhin:
$$(D \circ I)(f) = f \qquad \text{und} \qquad (I \circ D)(f) = f - f(a).$$
3. Die Abbildungen D und I sind allerdings nicht bijektiv und somit auch nicht invers zueinander: Die Abbildung D ist nicht injektiv, stattdessen ist
$$\mathrm{Kern}(D) = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b]) \mid D(f) = 0\} = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b]) \mid f \text{ ist konstant}\}.$$ $\Diamond$

Satz 5.34. (partielle Integration)

Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) differenzierbar und u', v' integrierbar sowie auf $[a, b]$ fortsetzbar. Dann gilt:
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis.

Wende den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 5.28 an auf die Funktion $f = u \cdot v$:
$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a).$$ $\square$

Beispiel 5.35.

Wir bestimmen das Integral der Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x)$ über dem Intervall $[0, \pi]$. Es gilt mit $u(x) = x$ und $v(x) = \sin(x)$:
$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cos x\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + u(\pi)v(\pi) - u(0)v(0)\\ &= -\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\Big|_0^\pi = -2.\end{aligned}$$ $\Diamond$

Satz 5.36. (Substitutionsregel)

Sei $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ stetig, differenzierbar auf (a, b) und integrierbar fortsetzbar auf $[a, b]$. Sei f weiter stetig auf $[\alpha, \beta]$. Dann gilt:
$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Beweis.

Da f stetig ist, folgt mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 5.28, dass die Funktion

$$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \qquad F(s) = \int_\alpha^s f(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar ist mit $F' = f$. Sei $g = F \circ u$. Dann ist g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) mit $g'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$, weiter ist $f \circ u$ integrierbar, da f stetig, und u' ist nach Voraussetzung integrierbar fortsetzbar, d.h. g' ist integrierbar fortsetzbar. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung erhalten wir:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = g(b) - g(a) = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

Beispiel 5.37.

Wir suchen das Integral der Funktion $\phi(x) = x\sqrt{1-x^2}$ über $[0, 1]$. Setze $u(x) = 1 - x^2$ auf $[0, 1]$ und $f(x) = \sqrt{x}$ auf $u([0, 1]) = [0, 1]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} f(s)\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^1 s^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \qquad \Diamond\end{aligned}$$

Bemerkung 5.38.

Die Substitutionsregel wird oft mit einer invertierbaren Transformation u benutzt:

$$\int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \Diamond$$

Beispiel 5.39.

Wir berechnen die Fläche des Halbkreises, also das Integral von $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ über $[-1, 1]$. Wir substituieren mit $u(x) = \sin(x)$ mit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Auf diesem Intervall ist die Sinus-Funktion streng monoton wachsend, also invertierbar. Mit dem Additionstheorem $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(-1)}^{u^{-1}(+1)} f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Bei der Auswertung des letzten Integrals haben wir von der partiellen Integration und erneut vom Additionstheorem Gebrauch gemacht:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \qquad \Diamond$$

5.5. Uneigentliche Integrale

Definition 5.40.

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar und sei $g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[R, b]$ mit $-\infty < R < b$ integrierbar. Wir setzen

$$\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{-\infty}^b g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to-\infty}\int_{-R}^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

sofern diese Grenzwerte existieren, und nennen sie dann uneigentliches Integral von f bzw. von g.

Beispiel 5.41.

Wir berechnen folgendes uneigentliches Integral:

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-2n}-e^0) = \frac{1}{2}. \qquad \Diamond$$

Definition 5.42.

Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ für jedes $a < c < b$ über $[c,b]$ integrierbar und sei $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ für jedes $a < c < b$ über $[a,c]$ integrierbar. Wir setzen

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{c\searrow a}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{c\nearrow b}\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

sofern diese Grenzwerte existieren, und nennen sie dann uneigentliches Integral von f bzw. von g.

Beispiel 5.43.

$f : x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$ ist auf $[0,1]$ unbeschränkt, also nicht im eigentlichen Sinne integrierbar. Wir können aber das uneigentliche Integral von f über $[0,1]$ bestimmen:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\searrow 0} 2(\sqrt{1}-\sqrt{\epsilon}) = 2. \qquad \Diamond$$

Definition 5.44.

Sei $f : [a,b]\backslash\{c\}$ auf jedem Intervall $[a, c-\epsilon]$ mit $0 < \epsilon < a-c$ und $[c+\epsilon, b]$ mit $[0 < \epsilon < b-c]$ integrierbar. Wir setzen

$$\mathrm{CH}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\searrow 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

sofern dieser Grenzwert existiert, und nennen diesen dann den Cauchyschen Hauptwert von f

Beispiel 5.45.

Die Funktion $fx \mapsto \frac{1}{x}$ ist über $[-1,1]$ nicht uneigentlich integrierbar, denn es gelten

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\searrow 0}(\ln(1)-\ln(\epsilon)) = \lim_{\epsilon\searrow 0}(-\ln(\epsilon)) = +\infty,$$
$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\nearrow 0}\int_{-1}^\epsilon \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\nearrow 0}(\ln|\epsilon|-\ln(1)) = \lim_{\epsilon\nearrow 0}(\ln(-\epsilon)) = -\infty.$$

Aber der Cauchysche Hauptwert von f existiert:

$$\mathrm{CH}\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\searrow 0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\Big(\ln(1)-\ln(\epsilon)+\ln(\epsilon)-\ln(1)\Big) = 0. \qquad \Diamond$$

Definition 5.46. (Eulersche Integraldarstellung der Γ-Funktion)

Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ist gegeben als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung 5.47.

Die Gamma-Funktion ist wohldefiniert, d.h. das Integral existiert für alle $x > 0$ im uneigentlichen Sinne: Es ist

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Für $x \geq 1$ ist der erste Summand stetig und beschränkt, also klassisch integrierbar. Für $x < 1$ existiert das uneigentliche Integral nach Aufgabe 55:
$$0 \leq \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} < \infty.$$
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach Aufgabe 39, dass $\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{x-1}t^2 = 0$, d.h. es gibt ein $t_0 > 1$ mit
$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{t_0} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t < \infty. \qquad \Diamond$$

Definition 5.48.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt logarithmisch konvex, wenn für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt $f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$.

Bemerkung 5.49.

f ist genau dann logarithmisch konvex, wenn $\ln f$ konvex ist, denn Anwendung der exp-Funktion liefert

$$\ln f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}. \quad \Diamond$$

Satz 5.50. (Eigenschaften der Γ-Funktion)

1. Es gelten $\Gamma(1) = 1$ und $x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$ für alle $x \in (0, \infty)$. (Funktionalgleichung)
2. Γ ist logarithmisch konvex.

Beweis.

1. Zunächst ist $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}|_0^\infty = 1$. Weiter liefert partielle Integration
$$\Gamma(x + 1) = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \int_a^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} -t^x e^{-t}\Big|_a^b + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$
2. Zu $x, y > 0$ und $\lambda \in (0, 1)$ setzen wir $p = \frac{1}{\lambda}$ und $q = \frac{1}{1-\lambda}$, dann gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und die Hölder-Ungleichung 43 liefert mit $f(t) = t^{(x-1)/p} e^{-t/p}$ und $g(t) = t^{(y-1)/q} e^{-t/q}$:
$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \int_a^b f(t) \cdot g(t)\,\mathrm{d}t \leq \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \left(\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g(t)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}. \qquad \square\end{aligned}$$

Bemerkung 5.51.

Per Induktion folgt aus der Funktionalgleichung, dass $\Gamma(n + 1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Man kann die Γ-Funktion also als Expansion der Fakultät auf die Menge der reellen Zahlen auffassen. $\Diamond$

Satz 5.52. (Bohr)

Die Γ-Funktion ist die einzige logarithmisch konvexe Funktion, welche die Funktionalgleichung erfüllt.

Beweis.

Sei $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ logarithmisch konvex mit $f(1) = 1$ und $f(x+1) = xf(x)$ für alle $x > 0$. Dann gilt $f(x+n) = f(x)x(x+1)\cdots(x+n-1)$ für alle $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, es genügt folglich zu zeigen, dass $f(x) = \Gamma(x)$ für alle $x \in (0,1)$ erfüllt ist.

Sei also $x \in (0,1)$ und sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann liefert die logarithmische Konvexität:

$$f(n+x) = f((1-x)n + x(n+1)) \le f(n)^{1-x} f(n+1)^x = f(n)^{1-x} f(n)^x n^x = (n-1)!\, n^x,$$
$$f(n+1) = f(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \le f(n+x)^x f(n+1+x)^{1-x} = f(n+x)(n+1)^{1-x}.$$

Zusammen ergibt sich mit $f(n+1) = n!$, dass $n!\,(n+x)^{x-1} \le f(n+x) \le (n-1)!\, n^x$ bzw.

$$\underbrace{\frac{n!\,(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}}_{=a_n(x)} \le F(x) \le \underbrace{\frac{(n-1)!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}}_{=b_n(x)}.$$

Wegen $\frac{b_n(x)}{a_n(x)} = \frac{(n+x)n^x}{n(n+x)^x} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt, dass f eindeutig bestimmt ist durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$ □

Satz 5.53. (Gaußsche Limesdarstellung der Γ-Funktion)

Für alle $x > 0$ lässt sich die Γ-Funktion darstellen als

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, x^n}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Beweis.

Für $x = 1$ ist die Formel offenbar richtig; für $x \in (0,1)$ folgt die Behauptung wegen $\lim \frac{n}{x+n} = 1$ aus dem eben Gezeigten. Es bleibt zu zeigen: Gilt die Formel für ein $x > 0$, dann auch für $x+1$. Dies ist der Fall, denn mit der Funktionalgleichung erhalten wir

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x+1}}{(x+1)\cdots((x+1)+n)}.$$ □

Korollar 5.54.

Die Funktion $x \mapsto \exp(-x^2)$ ist über ganz $\mathbb{R}$ integrierbar mit Integralwert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Beweis.

Mit der Substitution $x \mapsto \sqrt{x}$ erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \int_a^b e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

denn aus den beiden Darstellungen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\sqrt{n}}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\cdots(n+\frac{1}{2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\sqrt{n}}{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots((n+1)-\frac{1}{2})}$$

erhalten wir mit dem Wallisschen Produkt, vgl. Aufgabe 60,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\frac{1}{2}} \frac{(n!)^2}{(1-\frac{1}{4})(4-\frac{1}{4})\cdots(n^2-\frac{1}{4})} = 2 \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}} = \pi$$ □

5.6. Unbestimmte Integrale

Bemerkung 5.55.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und seien $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f, d.h. $F' = f = G'$. Dann ist $(F - G)' = 0$, d.h. $F - G$ ist konstant nach Satz 4.22. Zwei Stammfunktionen auf einem Intervall unterscheiden sich also höchstens um eine Konstante. Wir setzen $F \sim G :\Leftrightarrow F - G$ ist konstant. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, d.h.

$$F \sim F; \qquad F \sim G \Rightarrow G \sim F, \qquad F \sim G \text{ und } G \sim H \Rightarrow F \sim H.$$

$[F] = \{G \mid G \sim F\}$ heißt die Äquivalenzklasse von F. ◊

Definition 5.56.

Die Äquivalenzklasse der Stammfunktionen von f nennen wir unbestimmtes Integral und schreiben

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{oder} \qquad \int f.$$

Bemerkung 5.57.

Bezeichne A die Menge der stetigen Funktionen $\mathcal{C}^0([a, b])$ und B die Menge der Äquivalenzklassen $\{\int f \mid f \in A\}$.

1. Dann ist $[F]_a^b = F(b) - F(a)$ für $F \in B$ wohldefiniert, d.h. für alle $G \in [F]$ ist $[G]_a^b = [F]_a^b$:

$$G \in [F] \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : G = F + c \quad \Longrightarrow \quad [G]_a^b = G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = [F]_a^b.$$

2. Auf B definieren wir den Ableitungsoperator $D : B \to A$ durch $D[F] = F'$. Dann ist D wohldefiniert:

$$G \in [F] \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : G = F + c \quad \Longrightarrow \quad D[G] = G' = F' = D[F].$$

3. Ebenso definieren wir den Integraloperator $I : A \to B$ durch $I(f) = \int f$.

Wir erhalten so eine neue Formulierung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung 5.28: ◊

Satz 5.58. (algebraische Version des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung)

Die Operatoren $I : A \to B$ und $D : B \to A$ sind linear und invers zueinander.

Beweis.

D ist linear, denn $D[\alpha F + \beta G] = (\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha D[F] + \beta D[G]$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $F, G \in B$. Ebenso ist I linear, denn $I(\alpha f + \beta g) = \int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g = \alpha I(f) + \beta I(g)$ für alle $f, g \in A$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Beachte dabei, dass die Vektorraumoperationen auf A kanonisch gegeben (und wohldefiniert) sind via $[\alpha F] = \alpha[F]$ sowie $[F + G] = [F] + [G]$ für $F, G \in B$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Weiterhin sind $(I \circ D)[F] = I(D[F]) = I(F') = [F]$ für $[F] \in B$, da F eine Stammfunktion von F' ist, und $(D \circ I)(f) = D[I(f)] = I(f)' = f$ für $f \in A$, da $I(f)$ eine Stammfunktion von f ist. □

6. Fourier-Reihen

6.1. Periodische Funktionen

Definition 6.1.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt L-periodisch, falls es ein $L > 0$ gibt mit $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6.2.

Jede L-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lässt sich in eine 2π-periodische Funktion $F : x \mapsto f(\frac{L}{2\pi}x)$ transformieren. Wir werden daher ab jetzt nur noch 2π-periodische Funktionen betrachten. ◊

Definition 6.3.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt (reellwertiges) trigonometrisches Polynom der Ordnung n, falls reelle Zahlen $a_0, ..., a_n$ und $b_1, ..., b_n$ existieren mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Bemerkung 6.4.

Die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms sind eindeutig bestimmt durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}x.$$

Da für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(lx) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx) = 0 \qquad (k \neq l), \qquad &&\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(kx) = \pi \qquad (k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}),\\
&\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx) = 0 \qquad (k \neq l), \qquad &&\int_0^{2\pi} \sin(lx)\sin(lx) = \pi \qquad (l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}),
\end{aligned}$$

erhalten wir durch Einsetzen der trigonometrischen Darstellung von f nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx)) \cos(kx)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{n} (a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx)) \cos(kx)\mathrm{d}x \right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos(kx)\mathrm{d}x + \sum_{l=0}^{n} a_l \int_0^{2\pi} \cos(lx)\cos(kx)\mathrm{d}x + \sum_{l=0}^{n} a_l \int_0^{2\pi} \sin(lx)\cos(kx)\mathrm{d}x \right) = a_k
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{n} (a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx)) \sin(kx)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{n} (a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx)) \sin(kx)\mathrm{d}x \right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\mathrm{d}x + \sum_{l=0}^{n} a_l \int_0^{2\pi} \cos(lx)\sin(kx)\mathrm{d}x + \sum_{l=0}^{n} a_l \int_0^{2\pi} \sin(lx)\sin(kx)\mathrm{d}x \right) = b_k.
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind die trigonometrischen Polynome 2π-periodisch. $\Diamond$

Definition 6.5.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt (komplexwertiges) trigonometrisches Polynom der Ordnung n, falls komplexe Zahlen $a_0, ..., a_n$ und $b_1, ..., b_n$ existieren mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Bemerkung 6.6.

Unter Ausnutzung der Formeln

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

lässt sich ein trigonometrisches Polynom f auch schreiben als

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) - \frac{ib_k}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx})\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2} - \frac{ib_k}{2}\right)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2} + \frac{ib_k}{2}\right)e^{-ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \end{aligned}$$

wenn man setzt

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \qquad (k \geq 1).$$

◊

Definition 6.7.

Seien $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\varphi = u + iv$ $(u, v : [a,b] \to \mathbb{R})$. Dann heißt φ komplexwertig integrierbar, falls u, v (reellwertig) integrierbar sind, und wir setzen in dem Fall

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b v(x)\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 6.8.

Wir können die Koeffizienten c_k damit auch als komplexwertige Integrale schreiben:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x - i\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(kx) - i\sin(kx)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\frac{1}{2}e^{ikx} + \frac{1}{2}e^{-ikx} - \frac{1}{2}e^{ikx} + \frac{1}{2}e^{-ikx}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

für alle $k > 0$ und analog

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x + i\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(kx) + i\sin(kx)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\frac{1}{2}e^{ikx} + \frac{1}{2}e^{-ikx} + \frac{1}{2}e^{ikx} - \frac{1}{2}e^{-ikx}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

für alle $k < 0$. ◊

Definition 6.9.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion und auf $[0, 2\pi]$ integrierbar. Dann setzen wir

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x, \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad\qquad \mathcal{F}_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

c_k heißt der k-te Fourier-Koeffizient von f und $\mathcal{F}_f$ die Fourier-Reihe von f.

Bemerkung 6.10.

Selbst im Falle der Konvergenz einer Fourier-Reihe muss nicht gelten $\mathcal{F}_f = f$. Gibt es aber zu einem 2π-periodischen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Folge $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und konvergiert die Reihe sogar gleichmäßig, dann stimmt sie mit der Fourier-Reihe $\mathcal{F}_f$ überein: Wegen

$$\int_0^{2\pi} \gamma_l e^{i(l-k)x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \gamma_k \; l = k \\ 0 \; l \neq k \end{cases}$$

gilt mit Lemma 6.11:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l e^{ilx} \right) e^{-ikx} \mathrm{d}x \overset{\text{glm.}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \gamma_l e^{i(l-k)x} \mathrm{d}x = \gamma_k. \qquad \diamond$$

Lemma 6.11. (Vertauschung von Limes und Integration)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge ist der Grenzwert f laut Satz 3.46 stetig, also integrierbar. Mit der Dreiecksungleichung für Integrale 5.17 folgt:

$$\left| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \,\mathrm{d}x \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x_- f_n(x)| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

6.2. Der Innenproduktraum $\mathscr{L}_2$

Satz 6.12.

Auf dem Vektorraum $\mathscr{L}_2 = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ aller stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x \qquad (f, g \in \mathscr{L}_2)$$

ein Skalarprodukt, d.h. für alle $f, g, h \in \mathscr{L}_2$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

$$\begin{aligned} \langle f, \lambda_1 g + \lambda_2 h \rangle &= \lambda_1 \langle f, g \rangle + \lambda_2 \langle f, h \rangle, && \text{(Linearität)} \\ \langle \lambda_1 f + \lambda_2 g, h \rangle &= \overline{\lambda_1} \langle f, h \rangle + \overline{\lambda_2} \langle g, h \rangle, && \text{(Sesquilinearität)} \\ \langle f, g \rangle &= \overline{\langle g, f \rangle}, && \text{(Symmetrie)} \\ f \neq 0 &\Rightarrow \langle f, f \rangle > 0.. && \text{(positive Definitheit)} \end{aligned}$$

Beweis.

1. Für alle $f, g, h \in \mathscr{L}_2$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

$$\begin{aligned}\langle f, \lambda_1 g + \lambda_2 h\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}(\lambda_1 g(x) + \lambda_2 h(x))\mathrm{d}x = \frac{\lambda_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x + \frac{\lambda_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}h(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1\langle f, g\rangle + \lambda_2\langle f, h\rangle;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 f + \lambda_2 g, h\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)}h(x)\mathrm{d}x = \frac{\overline{\lambda_1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}h(x)\mathrm{d}x + \frac{\overline{\lambda_2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(x)}h(x)\mathrm{d}x \\ &= \overline{\lambda_1}\langle f, h\rangle + \overline{\lambda_2}\langle g, h\rangle;\end{aligned}$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)\overline{g(x)}}\mathrm{d}x = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(x)}f(x)\mathrm{d}x} = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

2. Offenbar ist $\langle \cdot, \cdot\rangle$ positiv, denn sei $f \in \mathscr{L}_2$, dann gilt

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x \geq 0.$$

3. Weiterhin ist $\langle \cdot, \cdot\rangle$ definit, denn sei $f \neq 0$, d.h. es gibt ein $x_0 \in [0, 2\pi]$ mit $f(x_0) \neq 0$, Œ $x_0 \in (0, 2\pi)$. Da f stetig, gibt es dazu ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in [0, 2\pi]$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$. Dann ist aber

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2\pi}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} |f(x)|^2\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2\pi}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \left|\frac{1}{2}f(x_0)\right|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon}{2}|f(x_0)| > 0. \quad \square$$

Bemerkung 6.13.

$\langle \cdot, \cdot\rangle$ definiert eine Norm auf $\mathscr{L}_2$ via $\|f\| = \langle f, f\rangle$. Der Raum $\mathscr{L}_2$ ist bzgl. dieser Norm nicht vollständig, denn die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_2$, gegeben durch $f_n(x) = (\frac{x}{2\pi})^n$, konvergiert gegen die unstetige Funktion $f = \chi_{\{2\pi\}}$, $f(x) = 0$ für $x \in [0, 2\pi)$ und $f(2\pi) = 1$. $\Diamond$

Bemerkung 6.14.

Wir definieren in $\mathscr{L}_2$ die Funktionenfolge $e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Diese bildet ein Orthonormalsystem, d.h. für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

δ heißt das Kronecker-Symbol. Für die Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f \in \mathscr{L}_2$ gilt dann

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{ikx}}f(x)\mathrm{d}x = \langle e_k, f\rangle, \qquad k \in \mathbb{Z}. \qquad \Diamond$$

Lemma 6.15.

Seien $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ die Fourier-Koeffizienten zu $f \in \mathscr{L}_2$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Beweis.

Definiere $g = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k$, dann $\langle e_k, g\rangle = c_k = \langle e_k, f\rangle$ für alle k und damit

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k\langle f, e_k\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2, \qquad \langle g, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\langle e_k, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2 &= \langle f-g, f-g\rangle = \langle f,f\rangle - \langle f,g\rangle - \overline{\langle f,g\rangle} + \langle g,g\rangle \\ &= \|f\|^2 - 2\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2.\end{aligned}$$

□

Korollar 6.16. (Bessel-Ungleichung)

Sei $f \in \mathscr{L}_2$ mit Fourier-Koeffizienten $c_k = \langle e_k, f\rangle$. Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Nach 6.15 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung. □

6.3. Konvergenzverhalten von Fourier-Reihen

Definition 6.17.

Seien $f \in \mathscr{L}_2$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_2$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-f_n(x)|^2\mathrm{d}x = 0.$$

Bemerkung 6.18.

1. Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_2$ gleichmäßig gegen ein $f \in \mathscr{L}_2$, dann auch im quadratischen Mittel.

   Die Umkehrung ist falsch; Konvergenz im quadratischen Mittel bedingt nicht einmal punktweise Konvergenz.

2. Genau dann konvergiert die Fourier-Reihe $\mathcal{F}_f$ eines $f \in \mathscr{L}_2$ im quadratischen Mittel gegen f, wenn bei der Bessel-Ungleichung 6.16 sogar Gleichheit gilt. Man spricht dann davon, dass die Vollständigkeitsrelation erfüllt ist. ◊

Lemma 6.19.

Sei $f \in \mathscr{L}_2$ reellwertig, so dass $f|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist, d.h. stückweise konstant. Dann konvergiert $\mathcal{F}_f$ im quadratischen Mittel gegen f.

Beweis.

1. Sei zunächst $f = \chi_{[0,a)}$ eine charakteristische Funktion, d.h. $h(x) = 1$ für $x \in [0,a)$ und $h(x) = 0$ sonst. Die Fourier-Koeffizienten c_k für f lauten dann

$$c_0 = \frac{a}{2\pi}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{i}{2\pi k}(e^{-ika}-1) \qquad (k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}).$$

Für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist damit

$$
\begin{aligned}
|c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2k^2}|e^{-ika}-1|^2 = \frac{1}{4\pi^2k^2}|\cos(-ka)+i\sin(-ka)-1|^2 = \frac{1}{4\pi^2k^2}|\cos(ka)-i\sin(ka)-1|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2k^2}\Big(\cos^2(ka)-2\cos(ka)+1+\sin^2(ka)\Big) = \frac{1-\cos(ka)}{2\pi^2k^2}.
\end{aligned}
$$

Unter Ausnutzung der Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12},$$

vgl. Aufgabe 62, rechnen wir nach, dass die Vollständigkeitsrelation erfüllt ist:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 &= |c_0|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}|c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\frac{1-\cos(ka)}{2\pi^2k^2} = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1-\cos(ka)}{\pi^2k^2} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\cos(ka)}{k^2} = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{(\pi-a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right) \\
&= \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = \|f\|^2.
\end{aligned}
$$

Also konvergiert $\mathcal{F}_f$ im quadratischen Mittel gegen f.

2. Sei nun $f|_{[0,2\pi]}$ eine beliebige Treppenfunktion, d.h. es existieren Konstanten $\gamma_1,\dots,\gamma_r \in \mathbb{C}$ und $a_1,\dots,a_r \in [0,2\pi]$ mit

$$f_j(x) = \begin{cases} 1 & x\in[0,a_j) \\ 0 & x\in[a_j,2\pi] \end{cases} \quad ; \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{r}\gamma_r f_j(x) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Zu $g\in\mathscr{L}_2$ bezeichne $\mathcal{F}_g^{(n)}$ die n-te Partialsumme der Fourier-Reihe $\mathcal{F}_g$ von g. Dann gilt:

$$\|f-\mathcal{F}_f^{(n)}\| = \left\|\sum_{j=1}^{r}\gamma_j f_j - \sum_{j=1}^{r}\gamma_j\mathcal{F}_{f_j}^{(n)}\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{r}\gamma_j(f_j-\mathcal{F}_{f_j}^{(n)})\right\| \le \sum_{j=1}^{r}|\gamma_j|\left\|f_j-\mathcal{F}_{f_j}^{(n)}\right\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Satz 6.20. (Hauptsatz der Fourier-Theorie)

Sei $f\in\mathscr{L}_2$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe $\mathcal{F}_f$ von f im quadratischen Mittel gegen f.

Beweis.

Œ sei f reellwertig und gelte $\|f\|_\infty \le 1$. Zu vorgebenem $\epsilon > 0$ wähle 2π-periodische Funktionen $\varphi,\psi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, so dass $\varphi|_{[0,2\pi]}$ und $\psi|_{[0,2\pi]}$ Treppenfunktionen sind, $-1\le\varphi\le f\le\psi\le 1$ gilt und

$$\int_0^{2\pi}(\psi(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{4}\epsilon^2$$

erfüllt ist. Definiere $g = f-\varphi$, dann $\|g\|_\infty^2 \le \|\psi-\varphi\|_\infty^2 \le 2(\psi-\varphi)$ und damit

$$\|g\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(x)|^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\psi(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x \le \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Nach Lemma 6.19 gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit

$$\forall n\ge N : \|\varphi-\mathcal{F}_\varphi^{(n)}\| \le \frac{\epsilon}{2};$$

für $n\ge N$ gilt damit

$$\|f-\mathcal{F}_f^{(n)}\| = \|(\varphi+g)-(\mathcal{F}_\varphi^{(n)}+\mathcal{F}_g^{(n)})\| \le \|\varphi-\mathcal{F}_\varphi^{(n)}\| + \|g-\mathcal{F}_g^{(n)}\| \le \frac{\epsilon}{2}+\|g\| \le \epsilon. \qquad \square$$

Beispiel 6.21.

1. Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & x \in (0, 2\pi] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe $\mathcal{F}_f$ von f hat die Gestalt

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{e^{ikx}}{2i} - \frac{e^{-ikx}}{2i} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k};$$

sie konvergiert im quadratischen Mittel und punktweise gegen s, nicht aber gleichmäßig, da die Grenzfunktion f unstetig ist.

2. Wir betrachten die Fourier-Reihe der 2π-periodischen, stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

f besitzt die Darstellung

$$\frac{(\pi - x)^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{ikx}}{k^2} \qquad (x \in [0, 2\pi]).$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium gleichmäßig und stimmt nach Bemerkung 6.10 somit mit der Fourier-Reihe $\mathcal{F}_f$ überein. $\diamondsuit$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Mengen und Abbildungen)

Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie:

1. Für Teilmengen $X, Y \subseteq B$ gilt $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
2. Für eine Teilmenge $U \subseteq A$ ist $f(A \setminus U) \supseteq f(A) \setminus f(U)$.
3. Widerlegen Sie die umgekehrte Inklusion $f(A \setminus U) \subseteq f(A) \setminus f(U)$ durch ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 2. (Aussagenlogik)

Seien A, B Aussagen. Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die folgenden Äquivalenzen:

1. $A \Rightarrow B \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ (Kontrapositionsprinzip)
2. $A \Rightarrow B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \wedge (\neg B)) \Rightarrow (A \wedge (\neg A))$ (Kontradiktionsprinzip)

Aufgabe 3. (Mechanische Anwendung von Definitionen)

a) Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *dummbrumm*, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x - 3)/4 = m$. Die Zahl heißt *brummdumm*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 2n - 5$.

b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *schnickschnack*, falls $f(x)$ dummbrumm ist für alle x, die brummdumm sind. Die Funktion heißt *schnackschnick*, falls $f(x)$ brummdumm ist für alle x, die dummbrumm sind.

c) Sei F die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : F \to F$ heißt *pingpong*, wenn für jede schnackschnick Funktion f das Bild $T(f)$ auch schnackschnick ist. Die Funktion T heißt *pongping*, falls das Bild von schnickschnack Funktionen schnickschnack ist.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

1. Beweisen Sie: Wenn x dummbrumm ist, dann ist x brummdumm.
2. Gilt auch die Umkehrung des Satzes?

3. Zeigen Sie mit (1), dass f schnackschnick ist, wenn f schnickschnack ist.
4. Zeigen Sie anhand des Beispiels $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$, dass die Umkehrung von (3) falsch ist.
5. Untersuchen Sie, ob die Funktion $T : F \to F$, $T(f) = 2f + 1$, pingpong oder pongping ist.
6. Zeigen Sie, dass die Verkettung von zwei pingpong Funktionen wieder pingpong ist.

Aufgabe 4. (Eine Knobelaufgabe)

Sherlock Holmes hat drei Tatverdächtige: den "Napoleon des Verbrechens" Professor Morarty, dessen rechte Hand Colonel Moran und den Erpresser Mister Milverton. Seine Ermittlungen ergeben: Wenn sich Morarty oder Milverton als Täter herausstellen, dann ist der Colonel unschuldig. Sind aber Moran oder Morarty unschuldig, dann muss Milverton der Täter sein. Schließlich ist Moran Mittäter, sollte sich der Professor als schuldig erweisen.

1. Formulieren Sie die drei Ermittlungsergebnisse in der Sprache der Aussagenlogik. Führen Sie dazu die folgenden Grundaussagen ein:
   - A: Professor Morarty ist schuldig;
   - B: Colonel Moran ist schuldig;
   - C: Mister Milverton ist schuldig.
2. Ermitteln Sie durch logische Schlüsse, wer schuldig und wer unschuldig ist.
3. Verifizieren Sie ihre Schlussfolgerungen durch eine Wahrheitstabelle.

Aufgabe 5. (Injektivität & Surjektivität)

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

1. Ist die Verkettung $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.
2. Sind $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann ist g injektiv.

Aufgabe 6. (Ungleichungen)

Seien $a, b, c, d \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab, \qquad \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd, \qquad \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc.$$

Hinweis: Um die dritte Ungleichung zu zeigen, wählen Sie in der zweiten $d = \frac{a+b+c}{3}$ und lösen geschickt auf.

Aufgabe 7. (Arithmetisches, geometrisches & harmonisches Mittel)

Seien $a_1, ..., a_n$ strikt positive Zahlen, $n \geq 2$. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \cdots a_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}\right)^n.$$

Aufgabe 8. (Eine Knobelaufgabe)

Max und Moritz zerreißen die Schulordnung. Max zerreißt jedes Stück, das ihm in die Hände fällt, in drei Fetzen, Moritz in fünf. Als der Lehrer Lempel die beiden erwischt, verlangt er von ihnen, die Schulordnung wieder zusammenzukleben. Widerwillig fügen sie sich der Anweisung. Zusammen finden sie einhundert Papierfetzen. Kann die zusammengeklebte Schulordnung vollständig sein?

Aufgabe 9. (Potenzsummenformeln)

Aus der Vorlesung kennen Sie die Gaußsche Summationsformel

$$S_1(n) := \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

1. Beweisen Sie per Induktion die Quadratsummenformel

$$S_2(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

2. Leiten Sie eine entsprechende Formel für Kubiksummen $S_3(n) := \sum_{k=1}^{n} k^3$ her.

   Hinweis: Machen Sie den *heuristischen* Ansatz $S_3(n) = a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$ und bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0, ..., a_4$ als Lösung eines LGS (linearen Gleichungssystems). Beachten Sie: Damit haben Sie noch nicht bewiesen, dass die entstehende Summationsformel gilt, da a priori nicht klar ist, dass sich die Summe überhaupt als Polynom vierten Grades in n darstellen lässt. Stattdessen haben Sie gezeigt: *Wenn* eine solche Polynomdarstellung möglich ist, *dann* mit den von Ihnen ermittelten Koeffizienten $a_0, ..., a_4$. Vervollständigen Sie den Beweis daher, indem Sie wie gewohnt die ermittelte Formel per Induktion beweisen.

Aufgabe 10. (Binomischer Lehrsatz)

Wir definieren die Fakultät $n!$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ als $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ sowie $0! = 1$. Weiter definieren wir für $n, k \in \mathbb{N}_0$ den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ und setzen $\binom{n}{k} = 0$ für $k < 0$.

1. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$ gelten $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

3. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten von $(x+y)^n$ der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks entsprechen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Aufgabe 11. (Körperaxiome)

1. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$. Beweisen Sie die Bruchregeln

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

   Hinweis: Geben Sie bei jedem Beweisschritt an, welche der folgenden Eigenschaften eines Körpers Sie benutzt haben: Assoziativität von + (A1), Kommutativität von + (A2), Existenz der Null (A3), Existenz der additiv Inversen (A4), Assoziativität von $\cdot$ (M1), Kommutativität von $\cdot$ (M2), Existenz der Eins (M3), Existenz der multiplikativ Inversen (M4), Distributivität (D).

2. Betrachten Sie die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

   Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

Aufgabe 12. (Vollständige Induktion)

Kommentieren Sie den Beweis von folgendem Satz: *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis: (per Induktion über Pferdegruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$).

Induktionsanfang ($n = 1$): Es ist offensichtlich, dass in einer Menge mit nur einem Pferd alle Pferde in dieser Menge dieselbe Farbe haben.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass in jeder Menge mit n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n + 1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die – aufgrund der Induktionsvoraussetzung – alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n + 1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen.

Aufgabe 13. (Mächtigkeit von Mengen)

1. Zeigen Sie, dass $(-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind, d.h. dass eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen existiert.
2. Zeigen Sie: Eine beliebige Menge M ist nie gleichmächtig wie ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$.

   Hinweis: Führen Sie die Annahme, es existierte eine surjektive Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$, mit Hilfe der speziellen Menge $\{m \in M \mid m \notin f(m)\} \in \mathcal{P}(M)$ zu einem Widerspruch.

Aufgabe 14. (Schranken)

1. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A \ \& \ b \in B\}$.

   Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist, und bestimmen Sie das Supremum von $A + B$.
2. Bestimmen Sie, falls existent, Maximum, Minimum, Supremum und Infimum von $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 15. (Allgemeine Potenzsummenformel)

Für beliebiges $p \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $S_p(n) := \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$.

1. Bestimmen Sie $S_0(n)$ und beweisen Sie die rekursive Potenzsummenformel

$$S_{p-1}(n) = \frac{1}{p}(n+1)^p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k} S_k(n) - \frac{1}{p} \qquad (p \geq 2).$$

   Hinweis: Vereinfachen Sie den Term $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)^p - k^p$ und wenden Sie anschließend den Binomischen Lehrsatz an.
2. Berechnen Sie mit der Formel S_1, S_2, S_3, S_4. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 9.
3. Zeigen Sie, dass der in Aufgabe 9 vorgestellte, heuristische Ansatz immer zum Ziel führt, d.h. dass die p-te Potenzsumme stets als ein Polynom $(p + 1)$-ten Grades in der Variablen n dargestellt werden kann.

Aufgabe 16. (Eine Knobelaufgabe)

An einer Tafel stehen die Zahlen 1,2,...,137. In jedem Schritt darf man zwei beliebige Zahlen wegwischen und stattdessen die Summe der beiden weggewischten Zahlen anschreiben. Wir führen so viele Schritte durch, bis nur noch eine Zahl übrig ist.

Welche Werte kann diese letzte Zahl annehmen?

Aufgabe 17. (quadratische Gleichungen)

1. Seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_2 \neq 0$. Zeigen Sie:
$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2} \text{ oder } x = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}.$$

2. Zu $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ bezeichne $T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k)$ die Formel
$T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k)$: "Die Gleichung $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ besitzt genau k reelle Lösungen".
Bestimmen Sie zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Menge $M_k = \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \mid T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k)\}$.

Aufgabe 18. (Rechnen mit komplexen Zahlen)

1. Zeigen Sie: $(\frac{3}{2} + 2i)^2 = 3(\frac{3}{2} + 2i) - \frac{25}{4}$.
2. Betrachten Sie die reelle, rekursive Zahlenfolge $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ und $a_n = 3a_{n-1} - \frac{25}{4}a_{n-2}$ für $n \geq 2$.
Beweisen Sie:
$$a_n = \mathrm{Re}\Big(\Big(1 - \frac{1}{4}i\Big)\Big(\frac{3}{2} + 2i\Big)^n\Big).$$
3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der komplexen Gleichungen $z - |z| = 1 + 2i$ und $|z| - z = 1 + 2i$.
4. Finden Sie alle komplexen Zahlen, welche konjugiert zu ihrem Quadrat sind.

Aufgabe 19. (Grenzwerte von Folgen)

Verifizieren Sie die Grenzwerte folgender Folgen:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Aufgabe 20. (Anwendung der Grenzwertsätze)

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$. Überprüfen Sie die folgende Argumentation auf Stichhaltigkeit und das Ergebnis auf Korrektheit:

Induktives Anwenden des ersten Grenzwertsatzes ergibt
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0.$$
Insbesondere existieren die Grenzwerte der einzelnen Summandenfolgen $(\frac{N}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ *für* $N = 1, 2, \ldots$ *und somit ist* $\lim a_n = 0$.

Aufgabe 21. (Konvergenzgeschwindigkeit)

Um ein Maß dafür zu erhalten, wie schnell eine Folge konvergiert, führen wir auf der Menge der reellen Zahlenfolgen die folgende Relation ein:
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists k, K > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N : k\,|a_n| \leq |b_n| \leq K\,|a_n|.$$
Wir sagen, eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert mit Rate* $\alpha > 0$, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$, und nennen α dann die Konvergenzordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
2. Zeigen Sie, dass die Konvergenzordnung einer Nullfolge eindeutig bestimmt ist.
3. Zeigen Sie, dass die folgenden Zahlenfolgen Nullfolgen sind, und bestimmen Sie ihre Konvergenzordnungen:
$$a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}, \qquad b_n = \frac{1 + \sqrt{n}}{n^3}, \qquad c_n = \frac{\sqrt[5]{n^4}}{n + 4}, \qquad d_n = \frac{3}{\sqrt{2n^2 - 1}}, \qquad e_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}.$$

Aufgabe 22. (Die Eulersche Zahl e)

1. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bilden:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!\,n},$$

   Der Grenzwert $\lim a_n = \lim b_n$ wird mit e bezeichnet und Eulersche Zahl genannt.

2. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $c_n = (1+\frac{1}{n})^n$, ebenfalls gegen e konvergiert.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und $c_n \leq a_n$ gilt, die Folge also speziell beschränkt durch e ist und damit konvergiert. Weisen Sie anschließend nach, dass $\lim c_n \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Aufgabe 23. (Konvergenz von Reihen)

1. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+(-1)^n}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte, sofern existent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (x \in \mathbb{R}).$$

   Hinweis: Schreiben Sie die ersten beiden Reihen als Teleskopsummen. Für die dritte vervollständigen Sie die Argumentation in Beispiel 2.33.

3. Zeigen Sie, dass für die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ gilt: $\zeta(s)$ konvergiert $\Leftrightarrow s > 1$.

Aufgabe 24. (Paradoxon des Zenon von Elea (495-435 v.Chr.))

Der griechische Held Achilles veranstaltet einen Wettlauf mit einer (ziemlich schnellen) Schildkröte. Er kann zehnmal schneller laufen als die Schildkröte und gibt ihr deshalb einen Vorsprung von zehn Ellen. Achilles und die Schildkröte starten zur selben Zeit. Hat Achilles die ersten 10 Ellen durcheilt, so ist die Schildkröte um eine Elle vorangekommen. Hat Achilles diese Elle zurückgelegt, beträgt der Vorsprung der Schildkröte noch 1/10 Ellen. Bringt Achilles diese Strecke hinter sich, hat die Schildkröte immer noch einen Vorsprung von 1/100 Ellen etc. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, aber er wird nie Null. Deshalb, so argumentiert Zenon, kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.

1. Berechnen Sie mit der Formel "Geschwindigkeit = zurückgelegte Strecke pro Zeit", wie lange es dauert, bis Achilles die Schildkröte eingeholt hat, und welche Strecke die beiden dann zurückgelegt haben, wenn Achilles' Geschwindigkeit zehn Ellen pro Sekunde beträgt.
2. Schreiben Sie die von Achilles zurückgelegte Strecke gemäß der Argumentation von Zenon als unendliche Reihe und lösen Sie den scheinbaren Widerspruch durch Berechnung von deren Grenzwert auf.

Aufgabe 25. (Fibonacci-Folge und Goldener Schnitt)

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert via $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ $(n \geq 0)$. Zeigen Sie:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}} = 1.$$

Der Wert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wird als der Goldene Schnitt bezeichnet.

Aufgabe 26. (Innenprodukträume)

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definiert eine Norm auf X.

   Hinweis: Benutzen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.*

2. Es gilt der Satz des Pythagoras: $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ gilt für alle $x, y \in X$.
3. Es gilt die Parallelogrammregel $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ für alle $x, y \in X$.

Aufgabe 27. (Der Hilbertsche Folgenraum ℓ^2)

Bekanntlich bildet die Menge der Folgen $\mathcal{A} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}\}$ mit den Operationen $\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\otimes : \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\lambda \otimes (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum a_n^2 < \infty\} \subseteq \mathcal{A}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{A}$ ist, d.h. dass die Nullfolge in ℓ^2 liegt und für alle Folgen $a, b \in \ell^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten $a \oplus b \in \ell^2$ sowie $\lambda \otimes a \in \ell^2$.
2. Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2}$ mit $\langle a, b\rangle_{\ell^2} = \sum a_n b_n$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 definiert.

   Bemerkung: ℓ^2, versehen mit diesem Skalarprodukt, wird der Hilbertsche Folgenraum genannt.

3. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $a, b \in \ell^2$ die folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,|b_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Aufgabe 28. (Eine Knobelaufgabe)

Eine Rennschnecke kriecht über ein beliebig elastisches Gummiband. Sie startet an einem Ende und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von zehn Zentimetern pro Minute. Jede Minute wird das Band um einen Meter gleichmäßig über die gesamte Länge gedehnt. Die Anfangslänge des Bandes beträgt einen Meter.

1. Zeigen Sie, dass die Schnecke innerhalb einer endlichen Zeitspanne das gegenüber liegende Ende des Bandes erreicht.
2. Berechnen Sie, wie lange die Schnecke zur Überquerung des Bandes benötigt. Wie groß muss die Geschwindigkeit der Schnecke sein, um das Band innerhalb eines Tages zu überqueren?

   Hinweis: Zur Beantwortung können Sie technische Hilfsmittel wie einen programmierbaren Taschenrechner benutzen.

3. Recherchieren Sie die Bedeutung der Euler-Mascheronischen Konstante. Berechnen Sie mit dieser näherungsweise erneut die Ergebnisse aus (2). Vergleichen Sie die Resultate.

Aufgabe 29. (Funktionsgrenzwerte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \quad (n, m \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 + 3x}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \quad (a_n, b_m \neq 0).$$

Aufgabe 30. (Konsequenzen der Stetigkeit)

1. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f = g$ auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $f = g$ gilt auf ganz $\mathbb{R}$.
2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = cx$.
3. Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Selbstabbildung, d.h. es gelte $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass ein $\xi \in [a, b]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$.

Aufgabe 31. (Lipschitz-, Hölder- & gleichmäßige Stetigkeit)

1. Zeigen Sie, dass Lipschitz-stetige Funktionen Hölder-stetig sind, Hölder-stetige Funktionen gleichmäßig stetig und gleichmäßig stetige Funktionen stetig.
2. Überprüfen Sie die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf den Definitionsbereichen $D_1 = [1, \infty)$ und $D_2 = [0, \infty)$ auf Lipschitz-Stetigkeit, Hölder-Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Stetigkeit.

Aufgabe 32. (Eine Knobelaufgabe)

Jeder von n Abgeordneten in einem Parlament hat höchstens drei Feinde, wobei Feindschaften immer in beide Richtungen gelten: Ist ein Abgeordneter der Feind eines anderen, dann auch umgekehrt.

Kann man die Abgeordneten so auf zwei Häuser aufteilen, dass jeder Abgeordnete in seinem Haus höchstens einen Feind hat?

Aufgabe 33. (Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen)

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Produktformel, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$
2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$
3. Beweisen Sie für $x, y \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ die folgende Summenformnel für die Tangensfunktion:
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$
4. Zeigen Sie, dass alle $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Halbwinkelformel genügen:
$$1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

Aufgabe 34. (Differenzierbarkeit)

Ermitteln Sie die natürlichen Definitionsbereiche und die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f_(x) = (x^x)^x, \qquad f_2(x) = x^{(x^x)}, \qquad f_3(x) = \sqrt[x]{\ln x}, \qquad f_4(x) = \ln(\ln(x^2 + x + 1)).$$

Aufgabe 35. (Unkontrollierte Oszillationen)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

1. Für $n = 0$ ist f_n im Punkt $x = 0$ nicht stetig.
2. Für $n = 1$ ist f_n im Punkt $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.
3. Für $n = 2$ ist f_n im Punkt $x = 0$ differenzierbar, aber f_n' ist in x nicht stetig.
4. Für $n = 3$ ist f_n im Punkt $x = 0$ stetig differenzierbar.

Aufgabe 36. (Differenzenquotient und Differenzialquotient)

Zu gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}$ sei $f : [x_0, x_0 + 1] \to \mathbb{R}$ eine im Punkt x_0 *linksseitig differenzierbare* Funktion, d.h. für alle Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [x_0, x_0 + 1]$ mit $t_n \to x_0$ konvergiere der Differenzenquotient $\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}$ in $\mathbb{R}$ gegen den gleichen Wert. Weiter sei $f(x_0) > 0$.

Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $x_n = \left(\frac{f(x_0+\frac{1}{n})}{f(x_0)}\right)^n$, konvergiert, und bestimme den Grenzwert.

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe der logarithmierten Folge $y_n = \ln x_n$.

Aufgabe 37. (Logarithmisches Differenzieren)

Seien $f_1, ..., f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f_i(x) \neq 0$ für alle i und alle x. Zeigen Sie:

$$\frac{(f_1 \cdots f_n)'}{f_1 \cdots f_n} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_n'}{f_n}.$$

Aufgabe 38. (Ableitung von Umkehrfunktionen)

1. Zeigen Sie, dass für die Arcussinus-Funktion $\arcsin = \sin^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gilt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Zeigen Sie, dass für die Arcustangens-Funktion $\arctan = \tan^{-1} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + e^x$ invertierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe 39. (Regeln von l'Hopital)

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + \arctan x} \qquad \lim_{x\to 1} \sin(\pi x) \ln|1 - x|, \qquad \lim_{n\to\infty} n^{(n^{-\frac{1}{2}})},$$

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x}{x}.$$

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.
3. Weisen Sie nach, dass die Folgen $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{\ln(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Wachstumsraten besitzen.

Aufgabe 40. (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)

1. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f'(x) \le \lambda x$ auf $[0, 1]$ für ein $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $f \le 0$ auf $[0, 1]$ erfüllt ist.
2. Zeigen Sie: Für differenzierbares $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\xi = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x + 1) - f(x) = \xi$.
3. Überprüfen Sie, ob das folgende Randwertproblem eine Lösung $f \in \mathcal{C}^1([1, 3], \mathbb{R})$ besitzt:

$$f'(x) = f^2(x) + 4 \qquad \text{für } x \in (1, 3), \qquad f(1) = 1, \qquad f(3) = 6.$$

Aufgabe 41. (Satz von Taylor)

1. a) Zeigen Sie, dass für die n-te Ableitung der Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan(x)$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos^n(f(x)).$$

   b) Berechnen Sie die Taylorreihe T_f um $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $|x| \le 1$ gilt $T_f(x) \to f(x)$.

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Aufgabe 42. (Integration mittels Darboux-Summen)

Bestimmen Sie mittels Darbouxscher Summation das Integral der Cosinus-Funktion über $[0, x]$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)}$.

Aufgabe 43. (Hölder-Ungleichung für Integrale)

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Aufgabe 44. (Minkowski-Ungleichung für Integrale)

Seien $p \in [1, \infty)$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

$$\Big(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Aufgabe 45. (Opialsche Ungleichung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) = 0$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| \,\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 46. (Integrale elementarer Funktionen)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(x)} \cos(x) \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 47. (Stammfunktionen elementarer Funktionen)

Bestimmen Sie für geeignete Definitionsbereiche folgende Stammfunktionen:

$$\int \ln |x| \,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin^2(x) \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\ln |x|}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 48. (Logarithmisches Integrieren)

Sei $f \in \mathcal{C}^0([a, b], (0, \infty))$. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln f(x) \Big|_a^b.$$

Aufgabe 49. (Riemann-Lemma)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \to \pm\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x = 0.$$

Aufgabe 50. (Rotationskörper)

Rotiert der Graph einer stetigen Funktion $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[0,\infty))$ um die x-Achse, so entsteht ein dreidimensionaler Körper, dessen Volumen und Oberfläche gegeben sind durch die Formeln

$$V = \pi \int\limits_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x, \qquad O = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche einer Kugel vom Radius R durch Rotation eines Kreisbogens um die x-Achse.

Aufgabe 51. (Taylorformel mit Integralrestglied)

Seien $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$ und $\xi \in (a,b)$. Zeigen Sie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \int\limits_{\xi}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \,\mathrm{d}y.$$

Leiten Sie daraus die Lagrangesche Restglieddarstellung her:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-\xi)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für ein } \zeta \in (\xi, x).$$

Aufgabe 52. (Satz von Fejér)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und gelte $g(x+1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\int\limits_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x$ und wenden Sie den Mittelwertsatz an.

Aufgabe 53. (Trapez-Regel)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar mit $|f''(x)| \leq M$ für alle $x \in (a,b)$ und seien $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$. Zeigen Sie:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2}f(x_n)\right) + R(h),$$

wobei sich das Restglied $R(h)$ abschätzen lässt durch $R(h) \leq \frac{1}{12}(b-a)Mh^2$; es liegt also quadratische Konvergenz vor.

Aufgabe 54. (Anwendung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung)

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g, h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung von F.

Aufgabe 55. (Uneigentliche Integrale)

Überprüfen Sie, für welche $s \geq 0$ die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 56. (Cauchyscher Hauptwert)

Seien der Integrand $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$ und die Transformation $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = x^3$ für $x \leq 0$ und $\varphi(x) = x^2$ für $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass für alle $a < 0 < b$ gilt

$$\mathrm{CH}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \mathrm{CH}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Der Cauchysche Hauptwert ist also nicht verträglich mit der Substitutionsregel.

Aufgabe 57. (Vertauschung von Limes und Integral)

1. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = n\sin(nx)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{n}]$ und $f_n(x) = 0$ sonst gegen eine Grenzfunktion konvergiert, dass Integration und Grenzwertbildung aber nicht vertauschen, d.h.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{n}$ für $x \in [0, n]$ und $f_n(x) = 0$ sonst gleichmäßig konvergent ist, dass aber dennoch gilt
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Ist die Folge $f_n(x) = \frac{x}{n^2}\exp(-\frac{x}{n})$ $(x > 0)$ gleichmäßig konvergent? Vertauschen Limes und Integral?

Aufgabe 58. (Integral-Vergleichskriterium für Reihen)

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ eine monoton fallende Funktion. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert} \quad\Longleftrightarrow\quad \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 59. (Euler-Mascheronische Konstante)

Zeigen Sie: Die harmonische Reihe und der natürliche Logarithmus haben die gleiche Wachstumsrate:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 60. (Wallis'sche Produktformel)

Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$ den Grenzwert $\frac{\pi}{2}$ besitzt.

Hinweis: Weisen Sie nach, dass für $A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ gilt $1 = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$.

Aufgabe 61. (Weierstraßsches Konvergenzkriterium)

Seien $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x)| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ konvergiert absolut und gleichmäßig auf } D.$$

Aufgabe 62. (Trigonometrische Reihen)

1. Seien $\epsilon \in (0, \pi)$ und $D = [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} \text{gleichmäßig auf } D, \qquad \text{speziell} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Folgern Sie mit Satz 4.21 daraus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x - \pi}{2}^2 - \frac{\pi^2}{12} \text{ gleichmäßig auf } \mathbb{R}, \qquad \text{speziell} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 63. (Fourier-Reihen)

1. Berechnen Sie die Fourier-Reihe $\mathcal{F}_f$ der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (0, \pi] \\ +1 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

2. Konvergiert $\mathcal{F}_f$ punktweise, gleichmäßig, im quadratischen Mittel gegen f?

Aufgabe 64. (Funktionswerte der Riemannschen ζ-Funktion)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Index

Literaturverzeichnis

[1] Alber, H.-D.: *Analysis I.* Lecture Notes Darmstadt University, 2008.

[2] Albrecht, E.: *Analysis 1 und 2.* Vorlesungsskript Universität Saarbrücken, 2006.

[3] Balser, W.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Ulm, 2009.

[4] Baum, H.: *Analysis I & II.* Vorlesungsskript Universität Berlin, 2007.

[5] Blatter, C.: *Analysis I.* 151, Springer-Verlag, 2nd ed., 1977.

[6] Busam, R.: *Analysis I & II.* Vorlesungsskript Universität Heidelberg, 2007.

[7] Busam, R. & Schraudner, M.: *Analysis I Übungen.* Vorlesungsskript Universität Heidelberg, 2006.

[8] Denk, R. & Racke, R.: *Kompendium der Analysis, Band 1.* Vieweg+Teubner Verlag, 2011.

[9] Ebeling, W.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Hannover, 2003.

[10] Ferus, D.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Technische Universität Berlin, 2007.

[11] Forster, O.: *Analysis 1.* Vieweg+Teubner Verlag, 10th ed., 2011. doi:10.1007/978-3-8348-8139-7.

[12] Freistühler, H.: *Analysis I und II.* Vorlesungsskript Universität Konstanz, 2013.

[13] Grothmann, R.: *Analysis I & II.* Vorlesungsskript Universität Eichstätt-Ingolstadt, 2011.

[14] Gubisch, M.: *Problemlösungsstrategien.* Vorlesungsskript Universität Konstanz, 2011.

[15] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Vieweg + Teubner, 17th ed., 2009.

[16] Hörmann, G. & Langer, D.: *Analysis I.* Lecture Notes Vienna University, 2008.

[17] Knauf, A.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Erlangen-Nürnberg, 2011.

[18] Königsberger, K.: *Analysis 1.* Springer-Lehrbuch, 6th ed., 2013.

[19] Kuwert, E.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Freiburg, 2007.

[20] Lembcke, J.: *Elemente der Analysis I, II, III.* Vorlesungsskript Universität Erlangen-Nürnberg, 2006.

[21] Maier, H.: *Analysis I & II.* Vorlesungsskript Universität Ulm, 2005.

[22] Müller, D.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Kiel, 2010.

[23] Müller-Stach, S.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Mainz, 2004.

[24] Rannacher, R.: *Analysis 1.* Vorlesungsskript Universität Heidelberg, 2010.

[25] Riemenschneider, O.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Hamburg, 2004.

[26] Seiler, J.: *Analysis I.* Vorlesungsskript Universität Konstanz, 2008.

[27] Timmann, S.: *Repetitorium der Analysis, Teil 1.* Binomi Verlag, 2nd ed., 2003.

[28] Walter, W.: *Analysis 1.* Springer-Lehrbuch, 7th ed., 2009.