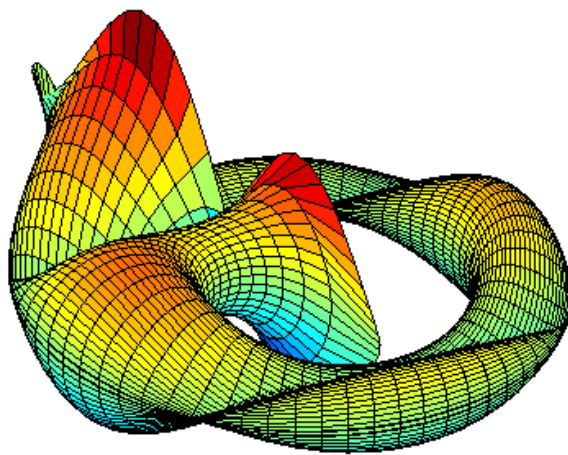


Skriptum zur Vorlesung

Analysis II

Private Mitschrift



Mehrdimensionale Differenzial- & Integralrechnung

gelesen von

Prof. Dr. Michael Junk

Martin Gubisch

Konstanz, Sommersemester 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Topologie des \mathbb{R}^n	3
1.1	Einführung in die mehrdimensionale Analysis	3
1.2	Normen und Metriken	5
1.3	Topologie metrischer Räume	6
1.4	Topologische Räume	7
1.5	Folgen und Konvergenz	9
1.6	Stetigkeit	11
1.7	Kompaktheit	13
1.8	Der Zwischenwertsatz	16
2	Mehrdimensionale Differenzierbarkeit	16
2.1	Richtungsableitungen	16
2.2	Das totale Differenzial	18
2.3	Ableitungsregeln	20
2.4	Der Mittelwertsatz	21
2.5	Der Satz von Taylor	23
2.6	Ableitung von Umkehrfunktionen	24
2.7	Der Satz über implizite Funktionen	26
2.8	Optimalitätsbedingungen	27
2.9	Extrema unter Nebenbedingungen	29
3	Kurven und Flächen	30
3.1	Kurvenparametrisierungen	30
3.2	Geometrie von Kurven	32
3.3	Parametrisierung von Flächen	33
3.4	Wegintegrale und 1-Formen	35
3.5	Exaktheitskriterien für 1-Formen	37
4	Mehrdimensionale Integration	40
4.1	Das Riemann-Integral	40
4.2	Der Reduktionssatz	42
4.3	Der Transformationsatz	44
4.4	Oberflächenintegrale	47
4.5	Integration über Mannigfaltigkeiten	48
4.6	Die Integralsätze von Gauß und Stokes	49
	Übungsaufgaben	53
	Index	69
	Literaturverzeichnis	71

1. Topologie des \mathbb{R}^n

1.1. Einführung in die mehrdimensionale Analysis

Bemerkung 1.1.

Gegenstand der mehrdimensionalen Analysis ist die Untersuchung von Funktionen $f : D \rightarrow E$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^m$ auf *Stetigkeit*, *Differenzierbarkeit* und *Integrierbarkeit*.

Seien A_1, \dots, A_n Mengen. Wir definieren das **kartesische Produkt** $A = A_1 \times \dots \times A_n$ dieser Mengen als

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Die Elemente $a = (a_1, \dots, a_n)$ von A heißen **n -Tupel**. Weiter schreiben wir $A^n = A \times \dots \times A$ (n mal).

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

1. **Stetigkeit.** Funktionswerte $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^m$ sind beliebig nahe benachbart, wenn die zugehörigen Argumente $x, y \in \mathbb{R}^n$ nahe genug benachbart sind.
2. **Differenzierbarkeit.** Für $x \in \mathbb{R}^n$ hinreichend nahe an $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sind die Funktionswerte $f(x) \in \mathbb{R}^m$ beliebig gut durch eine *affin lineare Funktion* annäherbar, genauer gibt es eine lineare Abbildung $L(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass $L(x_0)x + f(x_0)$ nahe bei $f(x)$ liegt, falls x nahe genug bei x_0 ist.
3. **Integrierbarkeit.** Sei $m = 1$, dann gibt das Integral von f über einer beschränkten Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ das Volumen zwischen A und $f(A)$ an. \diamond

Bemerkung 1.2.

Sei jetzt $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Bekanntlich ist f gerade durch jene Werte festgelegt, die f auf dem Definitionsbereich D annimmt, also durch unendlich viele Zahlen. Damit können wir in der Praxis eine Funktion durch Berechnung aller Funktionswerten nur in seltenen Fällen erfassen.

Legen wir über D jedoch ein *Gitter* G , so erlangen wir durch Berechnung derjenigen Werte, die f auf den endlich vielen *Gitterpunkten* annimmt, schon mal einen ersten Eindruck von f . Ist die Funktion darüber hinaus genügend *glatt*, dann können wir durch ein hinreichend feines Gitter die Funktion so beliebig nahe approximieren, indem wir die Eckpunkte einer *Gittermasche* aus G verbinden und so statt des interessierenden *Graphen* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times \mathbb{R}$ von G eine *Facettenstruktur* erhalten, die diesem beliebig nahe kommt.

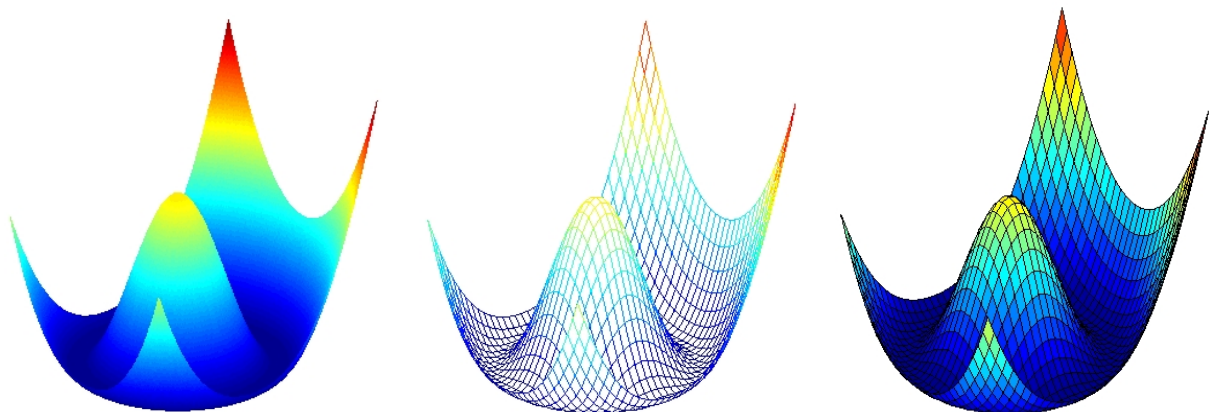


Fig. 1: Der Graph der kontinuierlichen Funktion Γ_f (links), die Auswertung der Funktion auf einem Gitter $G \subseteq D$ sowie die Approximation von Γ_f durch ebene Flächen über den Gittermaschen.

Was gewinnen wir dabei? Indem wir Γ_f durch endlich viele, affine Ebenen approximieren, kennen wir mit den berechneten Gitterpunkten schon näherungsweise den ganzen Graphen. Im Gegensatz zum Graphen allgemeiner Funktionen sind affine Ebenen nämlich durch drei *Werte* schon festgelegt: Durch einen *Stützvektor* und zwei linear unabhängige *Spannvektoren*, die in der Ebene liegen. Auf diese Weise lässt sich der gesamte approximative Graph durch endlich viele Werte beschreiben und damit beispielsweise numerisch bestimmen. \diamond

Bemerkung 1.3.

Interessieren wir uns für eine lokale Umgebung $U \subseteq D$ eines einzelnen Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dann ist es günstig, eine affine Ebene zu betrachten, in welcher der Punkt $P = (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ liegt und die nahe bei P möglichst wenig von Γ_f abweicht. Geometrisch ist klar, dass dies die eindeutig bestimmte **Tangentialebene** an P sein muss.

Im Eindimensionalen war das die Tangente

$$t \mapsto \tan_x(t) = f(x) + f'(x)(t - x),$$

also eine affin lineare Abbildung. Den mehrdimensionalen Fall wollen wir auf den Eindimensionalen zurückführen. Wir wählen dazu die Gerade $G_1 : t \mapsto (x, y) + t(1, 0)$, d.h. G_1 verläuft in U parallel zur x -Achse durch (x, y) . Setzt man $g_1(t) = f((x, y) + t(1, 0))$, dann liefert g_1 die Funktionswerte von f entlang dieser Geraden. Der Clou: g_1 ist eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ! Bestimmen wir nun nach altbewährter Methode die Ableitung $g'_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann beschreibt

$$t \mapsto \tan^1_{(x,y)}(t) = f(x, y) + g'_1(0)(t - x)$$

eine Tangente an P .

Analog definieren wir $g_2(t) = f((x, y) + t(0, 1))$ und $t \mapsto \tan^2_{(x,y)}(t) = f(x, y) + g'_2(0)(t - y)$.

Dann beschreibt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g'_1(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g'_2(0) \end{pmatrix} \right\}$$

einen affinen, zweidimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^3 : Die Tangentialebene an f im Punkt P . Wir erhalten für diese die Parametrisierung $\text{Tan}_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\text{Tan}_{(x,y)}(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g'_1(0) \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g'_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \\ f(x, y) + g'_1(0)u + g'_2(0)v \end{pmatrix}$$

beziehungsweise die Funktionsgleichung $\tan_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tan_{(x,y)}(u, v) = f(x, y) + g'_1(0)(u - x) + g'_2(0)(v - y). \quad \diamond$$

Beispiel 1.4.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 5 \exp(-x^2 - (y - 2)^2) + x^2 + (y - 2)^2$$

und definieren die Geraden $g_1(t) = f(x + t, y)$ und $g_2(t) = f(x, y + t)$ mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} g'_1(0) &= -10x \exp(-x^2 - (y - 2)^2) + 2x, \\ g'_2(0) &= -10(y - 2) \exp(-x^2 - (y - 2)^2) + 2(y - 2). \end{aligned}$$

Für die beiden Punkte $P_1 = (-\frac{1}{2}, 1)$ und $P_2 = (0, 2)$ ergeben sich dann die folgenden Tangentialebenen:

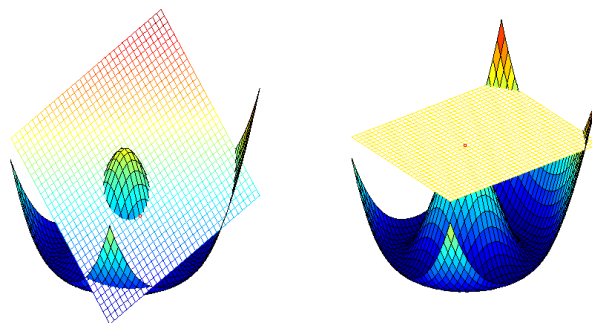


Fig. 3: Der Graph der Funktion f und die Tangentialebenen an den Punkten P_1 und P_2 .

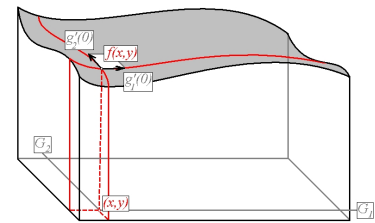


Fig. 2: Der Graph der Funktion f und die die Tangentialebene aufspannenden Vektoren am Punkt $P = (x, y, f(x, y))$.

1.2. Normen und Metriken

Bemerkung 1.5.

Sowohl das Konzept der Stetigkeit als auch das der Differenzierbarkeit basiert auf dem Begriff des *Abstandes*. Im \mathbb{R}^1 wurde dazu die Betragsfunktion eingeführt; der Abstand zwischen zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ wurde definiert als $|x - y|$. Im Mehrdimensionalen werden dagegen je nach Situation verschiedenen Abstandsbegriffe verwendet. \diamond

Definition 1.6.

Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einer **Norm** auf V versteht man eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\|\cdot\|$ ist **definit**, d.h. für $x \in V$ gilt $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
2. $\|\cdot\|$ ist **multiplikativ**: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$.
3. Es gilt die **Dreiecksungleichung**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$.

$\|x\|$ heißt die **Länge** des Vektors $x \in V$ und das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt ein **normierter Vektorraum**.

Bemerkung 1.7.

Eine Norm ist stets eine **positive Funktion**, d.h. für alle $x \in V$ gilt $\|x\| \geq 0$:

$$0 = \|0\| = \|x - x\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = \|x\| + |-1| \|x\| = 2\|x\| \implies \|x\| \geq 0. \quad \diamond$$

Beispiel 1.8.

1. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Wir versehen V mit einer Vektorraumstruktur, d.h. definieren eine Addition und eine skalare Multiplikation auf V :

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Auf dem Vektorraum V definieren wir dann die folgenden Normen:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

$\|\cdot\|_1$ heißt **1-Norm**, $\|\cdot\|_2$ **euklidische Norm**, $\|\cdot\|_p$ **p-Norm** ($1 \leq p < \infty$) und $\|\cdot\|_\infty$ **Maximumsnorm** oder **Supremumsnorm**. Dabei gilt $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$.

2. Wir versehen den Raum $V = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen mit den Strukturen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Dann wird V zu einem normierten Raum via den Normen

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

$\|\cdot\|_1$ heißt **\mathcal{L}^1 -Norm**, $\|\cdot\|_2$, **\mathcal{L}^2 -Norm**, $\|\cdot\|_p$ **\mathcal{L}^p -Norm** ($1 \leq p < \infty$) und $\|\cdot\|_\infty$ **\mathcal{L}^∞ -Norm**. Wieder gilt $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$. \diamond

Bemerkung 1.9.

Durch den Längenbegriff $\|\cdot\|$ auf V wird eine Abstandsfunktion $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ induziert via der Zuordnung $d(x, y) = \|x - y\|$. Der Abstand zwischen x und y ist in dem Fall also die Länge des Differenzvektors $x - y$. \diamond

Definition 1.10.

Sei X eine beliebige Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto d(x, y)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. d ist **definit**, es gilt also $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. d ist **symmetrisch**, d.h. $d(x, y) = d(y, x)$ gilt für alle $x, y \in X$.
3. d genügt der **Dreiecksungleichung** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) , bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X . Man nennt $d(x, y)$ den **Abstand** oder die **Distanz** der Punkte x, y bzgl. der Metrik d .

Bemerkung 1.11.

1. Abstände sind nie negativ: Für alle $x, y \in X$ gilt

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \quad \implies \quad 0 \leq d(x, y).$$

2. Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $d(x, y) = \|y - x\|$. Dann ist (V, d) ein metrischer Raum:

- a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|y - x\| = 0 \Leftrightarrow y - x = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- b) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$.
- c) $d(x, z) = \|z - x\| = \|(z - y) + (y - x)\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = d(y, z) + d(x, z)$.

3. Nicht jeder metrische Raum beruht auf einem normierten Vektorraum: Sei etwa $X \neq \emptyset$ eine Menge, dann ist $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x, x) = 0$ eine Metrik, die von keiner Norm induziert wird. Die Metrik ist also der allgemeinere Begriff; aus einer Norm kann eine

4. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Wir setzen $d(x, y) = \frac{\|y-x\|}{1+\|y-x\|}$, d.h. $d(x, y) \approx \|y - x\|$, falls y nahe bei x , und $d(x, y) \approx 1$, falls $\|y - x\|$ groß ist. \diamond

1.3. Topologie metrischer Räume**Definition 1.12.**

Sei (X, d) metrischer Raum. Für $x_0 \in X$ und $r > 0$ heißt $B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ **offene Kugel** mit **Mittelpunkt** x_0 und **Radius** r bzgl. der Metrik d .

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** des Punktes $x \in X$, falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$.

Bemerkung 1.13.

1. Insbesondere ist $B_\epsilon(x)$ selbst stets eine Umgebung von x , die **ϵ -Umgebung**.
2. **Einheitskugeln**, d.h. Kugeln mit Radius 1, bzgl. der euklidischen Metrik sind *rund*. Im Allgemeinen hängt die Form der Einheitskugeln jedoch von der gewählten Metrik ab; bzgl. der Supremumsnorm sind sie beispielsweise quadratisch bzw. würfelförmig. \diamond

Satz 1.14. (Hausdorffsches Trennungsaxiom)

In metrischen Räumen gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten x, y stets Umgebungen U von x und V von y , die **punktfremd** sind, d.h. $U \cap V = \emptyset$.

Beweis.

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte, d.h. $\epsilon = d(x, y) > 0$. Seien datz $U = B_{\frac{\epsilon}{4}}(x)$ und $V = B_{\frac{\epsilon}{4}}(y)$. Angenommen, $U \cap V \neq \emptyset$, d.h. es gibt ein $z \in U \cap V$. Dann gilt $\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$, ein Widerspruch. \square

Definition 1.15.

Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes (X, d) heißt **offen**, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$, d.h. falls U eine Umgebung aller ihrer Punkte ist.

Bemerkung 1.16.

1. *Offene Kugeln* sind offen im Sinne dieser Definition: Sei $B_r(x_0)$ eine Kugel und sei $x \in B_r(x_0)$, d.h. es gelte $d(x, x_0) < r$. Dann ist $\epsilon = r - d(x, x_0) > 0$. Zu zeigen ist, dass $B_\epsilon(x) \subseteq B_r(x_0)$. Sei dazu $y \in B_\epsilon(x)$. Dann gilt: $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \epsilon = d(x_0, x) + r - d(x_0, x) = r$, also $y \in B_r(x_0)$.
2. In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, d.h. mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, gilt: (a, b) ist offen, denn $(a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$.
3. $(a, b]$ ist nicht offen, denn für jedes $\epsilon > 0$ ist $B_\epsilon(b) = (b - \epsilon, b + \epsilon) \not\subseteq (a, b]$, d.h. $(a, b]$ ist keine Umgebung von b . Gleiches gilt für linksseitig oder beidseitig abgeschlossenen Intervalle $[a, b)$ bzw. $[a, b]$. \diamond

Satz 1.17. (Grundeigenschaften offener Mengen)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O} = \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen}\}$ das zugehörige System bzgl. d offener Mengen. Dann gelten:

1. $X \in \mathcal{O}$ und $\emptyset \in \mathcal{O}$: Die leere Menge und der ganze Raum sind offen.
2. Sind $U, V \in \mathcal{O}$, dann auch $U \cap V \in \mathcal{O}$: Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen.
3. Ist $(U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{O}$ für eine beliebige Indexmenge I , dann ist auch $\bigcup\{U_i \mid i \in I\}$ offen: Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

Beweis.

1. Angenommen, $\emptyset \notin \mathcal{O}$, dann gibt es ein $x \in \emptyset$ mit $B_\epsilon(x) \not\subseteq \emptyset$ für alle $\epsilon > 0$, ein Widerspruch. Außerdem ist $X \in \mathcal{O}$, denn es gilt $B_1(x) \subseteq X$ für alle $x \in X$.
2. Sei $x \in U \cap V$. Da U und V offen sind, gibt es Kugeln $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U$ und $B_{\epsilon_2}(x) \subseteq V$. Wir setzen $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dann gilt $B_\epsilon(x) \subseteq U \cap V$, denn für alle $y \in B_\epsilon(x)$ ist $d(y, x) < \epsilon \leq \epsilon_1$, d.h. $y \in B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U$, und $d(y, x) < \epsilon \leq \epsilon_2$, d.h. $y \in B_{\epsilon_2}(x) \subseteq V$. Damit ist $y \in U \cap V$.
3. Sei $x \in \bigcup\{U_i \mid i \in I\}$, dann gilt $x \in U_j$ für ein $j \in I$. Da $U_j \in \mathcal{O}$, gibt es dazu ein $\epsilon > 0$, so dass gilt $B_\epsilon(x) \subseteq U_j \subseteq \bigcup\{U_i \mid i \in I\}$. \square

Bemerkung 1.18.

1. Vereinigungen und Schnitte über beliebige Indexmengen sind wie folgt definiert:

$$x \in \bigcup_{i \in I} U_i \iff \exists j \in I : x \in U_j \quad \text{und} \quad x \in \bigcap_{i \in I} U_i \iff \forall j \in I : x \in U_j.$$

2. Die Aussage $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O} \implies \bigcap\{U_i \mid i \in I\} \in \mathcal{O}$ ist im Allgemeinen falsch: Sei etwa $J_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcap\{J_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0\} = [0, 0]$ nicht offen. \diamond

1.4. Topologische Räume**Definition 1.19.**

Sei X eine Menge. Ein System \mathcal{O} von Teilmengen von X heißt eine **Topologie** von X , falls gelten:

1. $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.
2. Sind $U, V \in \mathcal{O}$, dann auch $U \cap V \in \mathcal{O}$.
3. Sind $U_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, dann auch $\bigcup\{U_i \mid i \in I\} \in \mathcal{O}$.

(X, \mathcal{O}) heißt **topologischer Raum**; Elemente $O \in \mathcal{O}$ heißen **offene Mengen**.

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $A^c = X \setminus A$ offen ist.

Bemerkung 1.20.

1. Alle Konzepte in metrischen Räumen, die mit offenen Mengen definiert werden können, lassen sich auf topologische Räume verallgemeinern.
2. Eine *abgeschlossene Kugel* $A = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ ist abgeschlossen im Sinne der Definition: Seien $x \in A^c$ und $\epsilon = \frac{1}{2}(d(a, x) - r)$, dann gilt für $y \in B_\epsilon(x)$, dass

$$\begin{aligned} d(a, y) &= d(a, y) - d(x, y) + d(x, y) \geq d(a, x) - d(x, y) > d(a, x) - \epsilon \\ &= d(a, x) - \frac{1}{2}(d(a, x) - r) = \frac{r}{2} + \frac{d(a, x)}{2} \geq r, \end{aligned}$$

d.h. $y \notin A$ bzw. $y \in A^c$. Damit ist A^c offen, also A selbst abgeschlossen.

3. In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ abgeschlossen im Sinne der Definition, denn $[a, b]$ lässt sich schreiben als abgeschlossene Kugel $\{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{1}{2}(a+b)| \leq \frac{1}{2}(b-a)\}$.
4. Eine nicht-offene Menge muss nicht unbedingt abgeschlossen sein: Beispielsweise ist $(0, 1]$ nicht offen, aber auch nicht abgeschlossen, da $\mathbb{R} \setminus (0, 1] = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ nicht offen ist: $\mathbb{R} \setminus (0, 1]$ ist keine Umgebung von 0.
5. X und \emptyset sind offen und abgeschlossen, denn $\emptyset^c = X$ ist offen, also \emptyset abgeschlossen, und $X^c = \emptyset$ ist offen, d.h. X abgeschlossen. \diamond

Definition 1.21.

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt ein **Randpunkt** von Y , wenn in jeder Umgebung von x sowohl ein Punkt von Y als auch ein Punkt von Y^c liegt. Die Menge aller Randpunkte wird als **Rand** ∂Y bezeichnet.

$Y^\circ = Y \setminus \partial Y$ wird das **Innere** von Y und $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$ der **Abschluss** von Y genannt.

Seien $x_0 \in X$ und $r > 0$. Dann heißt $S_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x_0, x) = r\}$ die **Sphäre** der Kugel $B_r(x_0)$.

Bemerkung 1.22.

1. Es gilt stets $\partial B_r(x_0) \subseteq S_r(x_0)$. Wir zeigen hierfür: Der Abstand zwischen einem Randpunkt und x_0 beträgt r . Sei dazu $x \in \partial B_r(x_0)$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existieren dann $y \in B_r(x_0) \cap B_\epsilon(x)$ und $z \in B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0)^c$. Es gilt $d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x) < r + \epsilon$ und weiter

$$r \leq d(x_0, z) \leq d(x_0, x) + d(x, z) < d(x_0, x) + \epsilon,$$

d.h. $d(x_0, x) \geq r - \epsilon$ bzw. $r - \epsilon \leq d(x_0, x) \leq r + \epsilon$. Damit ist $d(x_0, x) = r$, d.h. $x \in S_r(x_0)$.

2. Die Umkehrung $\partial B_r(x_0) \supseteq S_r(x_0)$ hingegen ist im Allgemeinen falsch: Angenommen, für beliebiges $x \in X$ mit $x \in S_r(x_0)$, d.h. $d(x_0, x) = r$, würde gelten:

$$\forall \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0) \neq \emptyset, \quad B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0)^c \neq \emptyset.$$

Sei nun $X = \mathbb{N}$ mit $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ sowie $d(x, x) = 0$. Dann sind $B_1(1) = \{1\}$ und $B_\epsilon(5) = \{5\}$ für alle $\epsilon < 1$. Nun ist $5 \in S_1(1)$, aber $B_\epsilon(5) \cap B_1(1) = \emptyset$, ein Widerspruch.

3. In normierten Vektorräumen gilt auch $S_r(a) \subseteq \partial B_r(a)$. \diamond

Beispiel 1.23.

1. In der Betragsmetrik auf \mathbb{R} gilt $\partial(a, b] = \partial(a, b) = \partial[a, b) = \partial[a, b] = \{a, b\}$.
2. Weiter ist $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
3. Schließlich gilt $\partial\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 > 0\} = \{0\}$. \diamond

Satz 1.24.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind Y° offen und $\bar{Y}, \partial Y$ abgeschlossen.

Beweis.

1. Sei $x_0 \in Y \setminus \partial Y$, dann existiert $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x_0) \cap Y^c = \emptyset$, denn andernfalls wäre x_0 ein Randpunkt von Y . Mit diesem ϵ gilt dann auch, dass $B_\epsilon(x_0) \cap \partial Y = \emptyset$, denn wäre $y \in B_\epsilon(x_0) \cap \partial Y$, so läge ein Punkt von Y^c in $B_\epsilon(x_0)$, da $B_\epsilon(x_0)$ dann auch Umgebung von y wäre, was nicht sein kann. Also ist $B_\epsilon(x_0) \subseteq Y \setminus \partial Y$, d.h. $Y \setminus \partial Y$ ist offen.
2. Aus der Definition des Randes folgt: $\partial Y = \partial Y^c$. Nach (1) ist $Y^c \setminus \partial Y^c$ offen. Wir erhalten:

$$\bar{Y} = Y \cup \partial Y = (Y^c)^c \cup \partial Y^c = X \setminus (Y^c \setminus \partial Y^c) \text{ ist abgeschlossen.}$$

3. Es gilt $\partial Y = (Y \cup \partial Y) \setminus (Y \setminus \partial Y)$. Also ist $X \setminus \partial Y = (\partial Y)^c = (Y \cup \partial Y)^c \cup (Y \setminus \partial Y)$ offen als Vereinigung zweier offener Mengen, d.h. ∂Y selbst ist abgeschlossen. \square

1.5. Folgen und Konvergenz**Definition 1.25.**

Seien (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ heißt **konvergent** gegen $x_0 \in X$, wenn gilt:

Zu jeder Umgebung U von x_0 existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Wir schreiben in dem Fall $\lim x_n = x_0$ und nennen x_0 den **Grenzwert** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 1.26.

Da jede Umgebung von x_0 eine offene Kugel $B_\epsilon(x_0)$ enthält und jede offene Kugel $B_\epsilon(x_0)$ auch eine Umgebung von x_0 ist, folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \iff \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in B_\epsilon(x_0). \quad \diamond$$

Satz 1.27. (Charakterisierung von abgeschlossenen Mengen)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ gilt dann:

$$A \text{ ist abgeschlossen} \iff \text{für jede konvergente Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ gilt: } \lim x_n \in A.$$

Beweis.

- \Rightarrow Angenommen, $x = \lim x_n \notin A$, d.h. $x \in A^c$. Da A^c offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq A^c$. Desweiteren gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\epsilon(x)$ für alle $n \geq N$, Widerspruch zu $x_n \in A$.
- \Leftarrow Wir zeigen: A^c ist offen. Angenommen, A^c wäre nicht offen. Dann gibt es $x \in A^c$, so dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt $B_\epsilon(x) \not\subseteq A^c$. Insbesondere ist $B_{1/n}(x) \not\subseteq A^c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ und es gilt $\lim x_n = x$. Nach Voraussetzung folgt daraus: $x \in A$, ein Widerspruch. Also ist A^c offen. \square

Definition 1.28.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ heißt eine **Cauchyfolge**, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

(X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ in X konvergent ist.

Einen vollständigen *normierten* Raum nennen wir **Banachraum**.

Bemerkung 1.29.

Wie in \mathbb{R} gilt: Konvergente Folgen sind stets Cauchyfolgen. Die Umkehrung gilt nicht immer: Sei etwa $X = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, versehen mit der Metrik

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Sei $f_n(x) = nx$ für $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ und $f_n(x) = \operatorname{sgn}(x)$ sonst. Dann ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X , denn $d(f_n, f_m) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Angenommen, konvergiert bzgl. d gegen ein $f \in X$, dann müsste für alle $x \neq 0$ gelten $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ sowie $f(0) = 0$. Diese Funktion ist aber kein Element aus X . Also ist X kein Banachraum. \diamond

Satz 1.30.

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ nichtleer und $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$. Dann gilt:

$$\operatorname{diam}(A) < \infty \iff A \text{ liegt in einer Kugel.}$$

In dem Fall heißt A **beschränkt**; $\operatorname{diam}(A)$ nennen wir den **Durchmesser** von A .

Beweis.

\Rightarrow Sei A beschränkt. Wähle einen beliebigen Punkt $x_0 \in A$ und $\epsilon = \operatorname{diam}(A) + 1$, dann gilt für alle $x \in A$: $d(x_0, x) < \sup\{d(u, v) \mid u, v \in A\} + 1 = \epsilon$, also $A \subseteq B_\epsilon(x_0)$.

\Leftarrow Sei $A \subseteq B_r(x_0)$. Seien $x, y \in A$. Dann gilt:

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r \implies \operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \leq 2r. \quad \square$$

Satz 1.31. (Schachtelungsprinzip)

Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $X \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ mit $A_k \neq \emptyset$, A_k abgeschlossen, $\operatorname{diam}(A_k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gibt es genau einen Punkt $x \in X$, der in *allen* A_k liegt.

Beweis.

1. Zur Eindeutigkeit: Wären zwei verschiedene Punkte $x, y \in A_k$ für alle k , dann würde stets gelten $\operatorname{diam}(A_k) \geq d(x, y) > 0$, was im Widerspruch zu $\operatorname{diam}(A_k) \rightarrow 0$ steht.
2. Zur Existenz: Wir wählen eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A_n$. Wegen $\operatorname{diam}(A_n) \rightarrow 0$ gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(A_N) < \epsilon$. Dann gilt $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(A_N) < \epsilon$, falls $m, n \geq N$, da $A_n, A_m \subseteq A_N$, also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit folgt: es gibt ein $x \in X$ mit $\lim x_n = x$. Außerdem ist $x_n \in A_k$ für alle $n \geq k$; da A_n abgeschlossen, folgt mit Satz 1.27: $x \in A_k$ für jedes k . \square

Satz 1.32. (Konvergenz in \mathbb{R}^n)

Eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, wenn sie komponentenweise bzgl. $|\cdot|$ konvergiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \iff \forall i = 1, \dots, n : \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

Beweis.

1. Gelte $\|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0$. Wegen $\forall i : |x_i^{(k)} - x_i| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty$ folgt dann auch $|x_i^{(k)} - x_i| \rightarrow 0$ für alle i .
2. Gelte $|x_i^{(k)} - x_i| \rightarrow 0$ für alle i , dann gibt es zu $\epsilon > 0$ Indizes N_1, \dots, N_n mit $|x_i^{(k)} - x_i| < \epsilon$ für $k \geq N_i$. Wähle $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, dann ist

$$\forall k > N : \|x^{(k)} - x\|_\infty = \max\{|x_i^{(k)} - x_i| : i = 1, \dots, n\} < \epsilon \implies \|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0. \quad \square$$

Korollar 1.33. (Vollständigkeit des \mathbb{R}^n)

$(\mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum, d.h. ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R}^n , so konvergiert sie in \mathbb{R}^n .

Beweis.

Wegen $|x_i^{(k)} - x_i| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty$ sind auch alle Komponentenfolgen $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, wenn $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist. Wegen der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ konvergieren die Komponentenfolgen, mit Satz 1.32 konvergiert also auch $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. \square

Bemerkung 1.34. (Intervalle im \mathbb{R}^n)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\begin{aligned} [a, b] &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n], \\ (a, b) &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n), \\ (-\infty, b] &= (-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2] \times \cdots \times (-\infty, b_n] \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

- (a, b) und $[a, b]$ sind beschränkt: Setze $x_0 = \frac{a+b}{2}$ und $r = \|x_0\|_\infty + 1$, dann gilt $(a, b) \subseteq [a, b] \subseteq B_r(x_0)$.
- (a, b) ist offen: Für $x \in (a, b)$ gilt $x_i \in (a_i, b_i)$, $i = 1, \dots, n$. Da die Intervalle (a_i, b_i) alle offen sind, gibt es $\epsilon_i > 0$ mit $B_{\epsilon_i}(x_i) \subseteq (a_i, b_i)$. Setze $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$, dann ist $B_\epsilon(x) \subseteq (a, b)$.
- $[a, b]$ ist abgeschlossen: Es gilt

$$[a, b]^c = ([a_1, b_1]^c \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times [a_2, b_2]^c \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) \cup \cdots \cup (\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times [a_n, b_n]^c).$$

Endliche Vereinigung offener Mengen ist offen. Also ist $[a, b]^c$ offen und $[a, b]$ damit abgeschlossen. \diamond

1.6. Stetigkeit**Definition 1.35.**

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume, $a \in X$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt **stetig in a** , falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus X mit $\lim x_n = a$ stets gilt $\lim f(x_n) = f(a)$. und wir schreiben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ist f in jedem Punkt $a \in X$ stetig, so nennen wir f **stetig auf X** .

Bemerkung 1.36.

Durch Ersetzen von Termen der Form $|\alpha - \beta|$ durch $d_X(\alpha, \beta)$ bzw. $d_Y(\alpha, \beta)$ lassen sich viele Stetigkeitsergebnisse aus dem Eindimensionalen auf metrische Räume übertragen:

- Verkettung stetiger Funktionen:** Seien X, Y, Z metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig in $a \in X$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig in $f(a) \in Y$. Dann ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig in a .
- ϵ - δ -Charakterisierung der Stetigkeit:** Seien X, Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $a \in X$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } a \quad \iff \quad \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\epsilon(f(a)). \quad \diamond$$

Satz 1.37. (topologische Charakterisierung der Stetigkeit)

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Dann gelten:

- f ist genau dann stetig in $a \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq V$ gibt.
- f ist genau dann stetig auf X , wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subseteq Y$ selbst eine offene Menge in X ist.

Beweis.

1. \Rightarrow Seien f stetig in $a \in X$ und V eine Umgebung von $f(a)$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(a)) \subseteq U = B_\epsilon(f(a))$. Dann ist U eine Umgebung von a mit $f(U) \subseteq B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$.
 \Leftarrow Sei $\epsilon > 0$. $V = B_\epsilon(f(a))$ ist Umgebung von $f(a)$. Also gibt es eine Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq V$. Dazu gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq U$. Damit ist $f(B_\delta(a)) \subseteq f(U) \subseteq V = B_\epsilon(f(a))$.
2. \Rightarrow Seien $V \subseteq Y$ offen und $a \in f^{-1}(V)$. Da V eine Umgebung von $f(a)$ ist und f stetig in a ist, gibt es eine Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq V$. Also ist $U \subseteq f^{-1}(V)$, d.h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung aller zugehörigen Punkte $a \in f^{-1}(V)$, d.h. $f^{-1}(V)$ ist offen.
 \Leftarrow Seien $a \in X$ und V eine Umgebung von $f(a)$. Dann ist $U = f^{-1}(V)$ offen und es gilt $a \in U$, d.h. U ist eine Umgebung von a . Nach (1) ist f dann stetig. \square

Bemerkung 1.38.

1. Diese Charakterisierung der Stetigkeit kann in topologischen Räumen zur Definition benutzt werden: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann heißt f **stetig**, falls für alle $O \in \mathcal{O}_Y$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.
2. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wie in \mathbb{R} definieren wir:
 - a) f ist **Lipschitz-stetig**, falls ein $L > 0$ existiert mit $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ für alle $x, y \in X$.
 - b) f ist **Hölder-stetig**, falls ein $L > 0$ und ein $\alpha \in (0, 1]$ existieren mit $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)^\alpha$ für alle $x, y \in X$. \diamond

Beispiel 1.39.

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Wir definieren $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ via $f(x) = d(x_0, x)$. Dann ist f Lipschitz-stetig, denn für $L = 1$ gilt wegen der Dreiecksungleichung:

$$|f(x) - f(y)| = |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y) = L d(x, y). \quad \diamond$$

Satz 1.40. (Stetigkeit linearer Abbildungen)

Für normierte Vektorräume $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ und lineare Abbildungen $A : V \rightarrow W$ gilt:

$$A \text{ ist stetig} \iff A \text{ ist Lipschitz-stetig} \iff \exists C > 0 : \forall x \in V : \|Ax\|_W \leq C \|x\|_V.$$

Beweis.

1. Gelte $\|Ax\|_W \leq C \|x\|_V$ für alle $x \in V$. Dann ist $\|Ax - Ay\|_W = \|A(x - y)\|_W \leq C \|x - y\|_V$ für alle $x, y \in V$, d.h. A ist Lipschitz-stetig zur Konstante C .
2. Sei A Lipschitz-stetig zur Konstante $C > 0$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\epsilon}{C+1}$. Sei nun $\|x - y\|_V < \delta$. Dann ist $\|Ax - Ay\|_W \leq C \|x - y\|_V < C\delta = \frac{C}{C+1}\epsilon < \epsilon$. Also ist A stetig.
3. Sei A stetig. Zu $\epsilon = 1$ existiert dann ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in V$ mit $\|x\|_V = \|x - 0\|_V < \delta$ gilt $\|Ax\|_W = \|Ax - A0\|_W < \epsilon$. Dann ist $\|A(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_V})\|_W < 1$, da $\|\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_V}\|_V = \frac{\delta}{2} < \delta$, und wir erhalten $\|Ax\|_W < \frac{2}{\delta} \|x\|_V$, also $\|Ax\|_W \leq C \|x\|_V$ mit Konstante $C = \frac{2}{\delta}$ für alle $x \in V$. \square

Bemerkung 1.41.

Für eine stetige lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ definiert man $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_W : \|x\|_V \leq 1\}$. Dann ist $\|A\|$ die kleinstmögliche Konstante $C > 0$ mit $\|Ax\|_W \leq C \|x\|_V$. Weiter definiert $\|\cdot\| : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(V, W)$ aller stetigen linearen Abbildungen von V nach W . Es gilt:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W = \sup_{\|x\|_V = 1} \|Ax\|_W = \sup_{\|x\|_V < 1} \|Ax\|_W = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}. \quad \diamond$$

Bemerkung 1.42.

Nach Satz 1.32 ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann stetig, wenn all ihre Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Es genügt also, die Stetigkeit von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ nachweisen zu können. \diamond

Beispiel 1.43.

1. Sei $c \in \mathbb{R}$. Die **konstante Funktion** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ ist Lipschitz-stetig, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x) - f(y)| = 0 \leq \|x - y\|_\infty$.
2. Die **Summenfunktion** $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $S(x, y) = x + y$ ist Lipschitz-stetig: S ist linear und für $z \in \mathbb{R}^2$ gilt $|S(z)| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \leq 2\|z\|_\infty$.
3. **Produkte** sind *lokal* Lipschitz-stetig und damit insbesondere stetig: Sei $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $P(x, y) = x \cdot y$. Dann gilt

$$|P(u) - P(v)| = |u_1u_2 - v_1v_2| = |u_1(u_2 - v_2) + v_2(u_1 - v_1)| \leq |u_1| |u_2 - v_2| + |v_2| |u_1 - v_1|.$$

Also gilt für alle $u, v \in B_R(0)$, dass $|P(u) - P(v)| \leq 2R\|u - v\|_\infty$.

4. Zusammen erhalten wir: **Linearkombinationen** stetiger Funktionen sind stetig, denn sie sind Verkettungen stetiger Funktionen: $\alpha f + \beta g = S(P(\alpha, f), P(\beta, g))$.
5. Seien $k \leq n$ und $s \in \{1, \dots, n\}^k$. Dann definiert s eine **Selektion** $\Pi_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ via der Zuordnung $\Pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{s_1}, \dots, x_{s_k})$. Π_s ist stetig, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|\Pi_s(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$. Beispielsweise ist $\Pi_{(1,2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1, x_1)$.
6. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein **Multiindex**. Dann definiert α ein **Monom** $M_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ via $x \mapsto x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Auch Monome sind stetig. Zum Beispiel ist $x_2 \cdot x_4^2 = M_{(0,1,0,2,0)}(x) = P(\Pi_{(2)}(x), P(\Pi_{(4,4)}(x)))$ stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Alternativ kann man auch $M_{1,0,1,0,2}(x) = P(P(\Pi_{(1,3)}(x)), P(\Pi_{(5,5)}(x)))$ als Darstellung wählen.
7. **Polynome** $x \mapsto \sum \{c_\alpha x^\alpha \mid \alpha \in A\}$ mit endlichem $A \subseteq \mathbb{N}_0^n$ und $c_\alpha \in \mathbb{R}$ sind stetig, da mehrfache Linearkombination von Monomen.
8. **Rationale Funktionen** $x \mapsto P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P, Q sind stetig auf ihrem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R}^{n(Q)} \mid Q(x) \neq 0\}$, denn sie lassen sich schreiben als $x \mapsto [P \circ (Q, h \circ R)](x)$, wobei $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ repräsentiert. \diamond

Beispiel 1.44.

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (e^{-x_3} \sin(x_1^2 + x_2^2), \arctan(x_2))$ ist stetig, denn es sind

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-x_3} \sin(x_1^2 + x_2^2) = [P \circ (\exp \circ P \circ (-1, \Pi_{(3)}), \sin \circ P)](x), \\ f_2(x) &= \arctan(x_2) = (\arctan \circ \Pi_{(2)})(x_2). \end{aligned}$$

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + 2x_2^2} & (x_1, x_2) \neq 0 \\ 1 & (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig: Für $x \neq 0$ ist f eine Verkettung stetiger Funktionen, aber nach dem Satz von l'Hopital gelten $f(x, 0) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$ und $f(0, x_2) \rightarrow \frac{1}{2}$ für $x_2 \rightarrow 0$. Die Funktion besitzt also auch keine stetige Fortsetzung in 0. \diamond

1.7. Kompaktheit**Definition 1.45.**

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$, I eine Indexmenge, $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ ein System offener Teilmengen von X . \mathcal{U} heißt **offene Überdeckung** von A , falls $A \subseteq \bigcup \{U_i \mid i \in I\}$. Wir sagen, \mathcal{U} enthält eine **endliche Überdeckung**, wenn es eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ gibt mit $A \subseteq \{U_i \mid i \in I_0\}$. A heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Bemerkung 1.46.

Für beschränkte, abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ gelten wichtige Sätze:

1. Bolzano-Weierstraß: Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $[a, b]$.
2. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist sogar gleichmäßig stetig.
3. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Kompakte Mengen sind eine mehrdimensionale Verallgemeinerung solcher Intervalle, auf denen diese Resultate ebenfalls gelten. \diamond

Satz 1.47.

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A beschränkt und abgeschlossen.

Beweis.

1. A ist beschränkt: Wähle $x_0 \in X$. Dann gilt $X = \bigcup \{B_n(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$, d.h. $\mathcal{U} = \{B_n(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene Überdeckung von A . Da A kompakt ist, enthält \mathcal{U} eine endliche Überdeckung von A , d.h. es gibt ein endliches $I \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup \{B_n(x_0) \mid n \in I\}$. Sei $N = \max\{n \mid n \in I\}$, dann ist $A \subseteq B_N(x_0)$, also beschränkt.
2. A ist abgeschlossen: Seien $x \in A^c$ und $U_n = \{y \in X \mid d(x, y) > \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Jedes U_n ist offen, denn $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(y) = d(x, y)$ ist stetig und $(\frac{1}{n}, \infty)$ ist offen in \mathbb{R} , also ist auch $U_n = f^{-1}((\frac{1}{n}, \infty))$ offen als Urbild einer offenen Menge. Außerdem folgt aus $x \in A^c$, dass $A \subseteq X \setminus \{x\} = \bigcup \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, d.h. $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene Überdeckung von A . Da A kompakt ist, existiert ein endliches $I \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup \{U_n \mid n \in I\} = U_N$ mit $N = \max I$. Da $A \subseteq U_N$, gilt $d(x, y) > \frac{1}{N}$ für alle $y \in A$, d.h. $B_{1/N}(x) \subseteq A^c$, d.h. A^c ist offen und A damit abgeschlossen. \square

Satz 1.48. (Bolzano-Weierstraß)

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ kompakt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A . Dann existiert eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt in A konvergiert.

Beweis.

Angenommen, keine Teilfolge konvergiert in A , d.h. zu jedem $a \in A$ existiert ein Radius $\epsilon_a > 0$, so dass $\#\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_{\epsilon_a}(a)\} < \infty$ gilt. Da $A \subseteq \bigcup \{B_{\epsilon_a}(a) \mid a \in A\}$, ist $\mathcal{U} = \{B_{\epsilon_a}(a) \mid a \in A\}$ eine offene Überdeckung von A . Da A kompakt ist, existiert ein endliches $I \subseteq A$ mit $A \subseteq \bigcup \{B_{\epsilon_a}(a) \mid a \in I\}$. Also ist $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in \bigcup \{B_{\epsilon_a}(a) \mid a \in I\}\}$; da letztere Menge endlich ist, ist dies ein Widerspruch. \square

Satz 1.49.

Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist auch $f(K) \subseteq Y$ kompakt, d.h. Bilder kompakter Mengen sind kompakt.

Insbesondere gilt: Eine stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in K$ mit $f(x_{\min}) = \inf\{f(x) \mid x \in K\}$ und $f(x_{\max}) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$.

Beweis.

Sei $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ eine in Y offene Überdeckung von $f(K)$. Da f stetig ist, ist $V_i = f^{-1}(U_i)$ offen in X und $K \subseteq \bigcup \{V_i \mid i \in I\}$, d.h. $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ ist eine offene Überdeckung von K . Damit existiert eine endliche Indexmenge $I_0 \subseteq I$ mit $K \subseteq \bigcup \{V_i \mid i \in I_0\}$. Dann ist auch $f(K) \subseteq \bigcup \{U_i \mid i \in I_0\}$, d.h. \mathcal{U} enthält eine endliche Überdeckung. Also ist $f(K)$ kompakt.

Speziell für $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gilt: $f(K)$ ist kompakt, speziell beschränkt, d.h. Infimum und Supremum existieren in \mathbb{R} . Konstruiere Folgen in $f(K)$, die gegen das Infimum bzw. Supremum konvergieren. Da $f(K)$ abgeschlossen ist, gehören die Grenzwerte zu $f(K)$. \square

Satz 1.50.

Sind (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, X kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis.

Sei $\epsilon > 0$. Zu jedem $x \in X$ gibt es dann ein $\delta_x > 0$, so dass $f(B_{\delta_x}) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. $\mathcal{U} = \{B_{\delta_x/2}(x) \mid x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung von X , also gibt es ein endliches $I_0 \subseteq X$ mit $X \subseteq \{B_{\delta_x/2}(x) \mid x \in I_0\}$. Setze $\delta = \min\{\delta_x/2 \mid x \in I_0\}$. Seien dazu $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$. Dann gibt es ein $x_0 \in I_0$ mit $x \in B_{\delta_x/2}(x_0)$, d.h. $d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \delta + (\delta_{x_0}/2) \leq \delta_{x_0}$, also $x, y \in B_{\delta_{x_0}}(x_0)$. Da $f(B_{\delta_{x_0}}(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$, folgt $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), f(y)) \leq 2\frac{\epsilon}{2}$. Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt: Ist $d(x, y) < \delta$, dann ist $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Damit ist f gleichmäßig stetig. \square

Satz 1.51. (Heine-Borel)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Dann ist K kompakt.

Beweis.

Da K beschränkt ist, gilt $K \subseteq [a, b]$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}^n$. Da $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, ist K als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt. \square

Bemerkung 1.52.

Das Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt: Angenommen, es gäbe eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ von $[a, b]$, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Wir zerlegen $[a, b]$ durch Seitenhalbierung in 2^n Teilintervalle, dann existiert mindestens ein Teilintervall, das sich nicht durch endlich viele U_i überdecken lässt. Wir iterieren diesen Prozess und erhalten so eine Folge $[a^k, b^k] \subseteq [a, b]$, $\text{diam}([a^k, b^k]) \rightarrow 0$, von Teilintervallen, von denen keines sich durch endlich viele U_i überdecken lässt. Andererseits existiert nach dem Schachtelungsprinzip 1.31 genau ein $x_0 \in [a, b]$, das in allen $[a^k, b^k]$ enthalten ist und zu diesem muss ein Index $i_0 \in I$ existieren mit $x_0 \in U_{i_0}$, ein Widerspruch. \diamond

Satz 1.53.

Seien $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_\infty$ zwei Normen auf \mathbb{R}^n . Dann sind $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent, d.h. es gibt Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit $C_1\|x\|_* \leq \|x\|_\infty \leq C_2\|x\|_*$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis.

1. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Wir zeigen, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e^{(i)} \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e^{(i)}\| \leq \sum_{i=1}^n \|e^{(i)}\| \cdot \max_{i=1, \dots, n} |x_i| = c_2 \|x\|_\infty.$$

Speziell ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig als Funktion von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, denn mit Lipschitz-Konstante c_2 gilt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq c_2 \|x - y\|_\infty$. Die $\|\cdot\|_\infty$ -Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, daher nimmt die stetige Funktion $\|\cdot\|$ ihr Minimum auf K an, d.h. es gibt ein $x_{\min} \in K$ mit $\|x_{\min}\| = \inf\{\|x\| \mid x \in K\}$. Wegen $\|x_{\min}\|_\infty = 1$ ist $x_{\min} \neq 0$. Wähle $c_1 = \|x_{\min}\|$. Dann gilt für beliebiges $x \neq 0$:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \inf\{\|y\| \mid y \in K\} = \|x_{\min}\| = c_1 \quad \implies \quad \|x\| \geq c_1 \|x\|_\infty.$$

2. Wähle $C_1 = \frac{c_1^*}{c_2^*}$ und $C_2 = \frac{c_2^*}{c_1^*}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$C_1 \|x\|_* = \frac{c_1^*}{c_2^*} \|x\|_* \leq c_1^* \|x\|_\infty \leq \|x\|_* \leq c_2^* \|x\|_\infty = \frac{c_2^*}{c_1^*} \|x\|_* \leq C_2 \|x\|_*. \quad \square$$

Bemerkung 1.54.

Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit etc. sind auf \mathbb{R}^n also unabhängig von der gewählten Norm. \diamond

1.8. Der Zwischenwertsatz

Definition 1.55.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Gibt es offene, disjunkte, nicht-leere Mengen $A, B \subset X$ mit $X = A \cup B$, so heißt X **unzusammenhängend**, andernfalls **zusammenhängend**.

Beispiel 1.56.

- $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ mit $|\cdot|$ -Metrik ist unzusammenhängend, denn beide Intervalle sind offen (und zugleich abgeschlossen) in X .
- $X = \mathbb{Q}$ mit $|\cdot|$ -Metrik ist unzusammenhängend: Die Mengen $U = (-\infty, \sqrt{2})$ und $V = (\sqrt{2}, \infty)$ sind offen in \mathbb{R} , d.h. $A = \mathbb{Q} \cap U$ und $B = \mathbb{Q} \cap V$ sind offen in \mathbb{Q} . Weiter sind A, B nichtleer und es gilt $X = A \cup B$.
- $X = [a, b]$ mit $|\cdot|$ -Metrik ist zusammenhängend, denn angenommen, X wäre unzusammenhängend, d.h. $X = A \cup B$ mit $A, B \subseteq X$ offen, $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \neq \emptyset$. (E sei $b \in B$. Da $A \neq \emptyset$ beschränkt ist und $[a, b]$ abgeschlossen, liegt $\sup A$ in $[a, b]$. Sei dazu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $\lim x_n = \sup A$. Da A abgeschlossen ist als Komplement der offenen Menge B , folgt $\sup A \in A$. Also ist $\sup A < b$, da $b \in B$. Nun ist $A \cap B = \emptyset$, d.h. $(\sup A, b] \subseteq B$ und $\sup A = \lim(\sup A + \frac{1}{n}) \in B$, da $B = X \setminus A$ abgeschlossen ist als Komplement einer offenen Menge. Es folgt $\sup A \in A \cap B$, ein Widerspruch. \diamond

Bemerkung 1.57.

Eine metrischer Raum (X, d) ist genau dann zusammenhängend, wenn \emptyset und X die einzigen Teilmengen von X sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind. \diamond

Satz 1.58. (Zwischenwertsatz)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, X zusammenhängend und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch $(f(X), d_Y)$ zusammenhängend.

Beweis.

Angenommen, $f(X)$ ist unzusammenhängend. Dann gibt es eine Teilmenge $\emptyset \subsetneq A \subsetneq f(X)$, die zugleich offen und abgeschlossen in Y ist. Wegen der Stetigkeit von f ist dann auch $f^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in X , außerdem gilt $\emptyset \subsetneq f^{-1}(A) \subsetneq X$, d.h. X ist unzusammenhängend. \square

Bemerkung 1.59.

$X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X ein Intervall ist:

- Sei X kein Intervall, dann gibt es $u, w \in X$ und $v \notin X$ mit $u < v < w$. Also lässt sich X darstellen als $X = ((-\infty, v) \cap X) \cup ((v, \infty) \cap X)$, die disjunkte Vereinigung zweier in X offener, nichtleerer Intervalle.
- Angenommen, X ist ein unzusammenhängendes Intervall. Dann ist $X = A \cup B$ mit $A, B \subseteq X$ offen, $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \neq \emptyset$. Seien $a \in A$ und $b \in B$, dann ist $[a, b] \subseteq X$, da X ein Intervall ist, und $[a, b] = ([a, b] \cap A) \cup ([a, b] \cap B)$ ist die Vereinigung zweier in $[a, b]$ offener disjunkter, nichtleerer Mengen, ein Widerspruch.

Ist also $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $f([a, b])$ ein Intervall, d.h. f nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an: $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$. \diamond

2. Mehrdimensionale Differenzierbarkeit

2.1. Richtungsableitungen

Bemerkung 2.1.

Wir untersuchen das *Änderungsverhalten* einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in der Nähe eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir f längs aller *Raumrichtungen* $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\|_2 = 1$, d.h. die Funktionswerte von f entlang der Geraden $t \mapsto x + t\xi$. Definiere dazu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ via $g(t) = f(x + t\xi)$. Dann entspricht das Verhalten von g bei $t = 0$ dem Verhalten von f bei x in Richtung ξ . \diamond

Beispiel 2.2.

Wir betrachten den **Paraboloid** $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$.

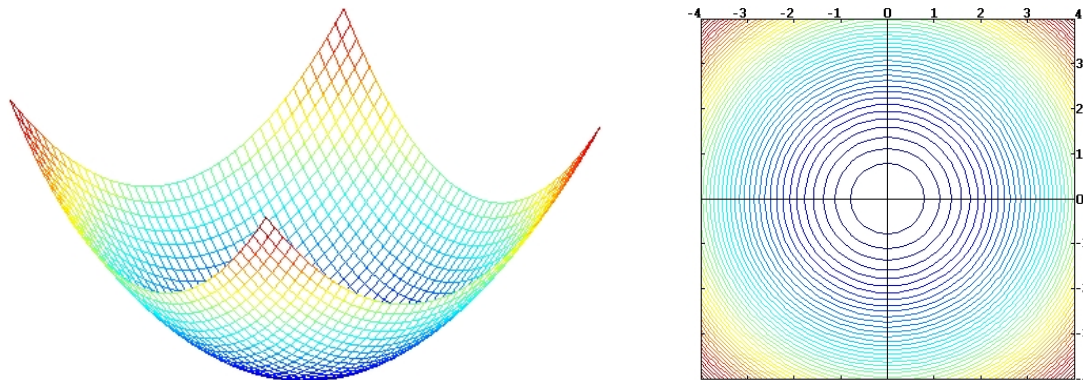


Fig. 4: Die Funktion lässt sich visualisieren durch ihren **Graph** $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ oder durch ihre **Höhenlinien** $N_f(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}$, d.h. die Schnitte durch Γ_f bei $x_3 = c$.

Die Untersuchung von f in Richtungsableitungen liefert:

$$g(t) = (x_1 + t\xi_1)^2 + (x_2 + t\xi_2)^2, \quad g'(t) = 2(x_1 + t\xi_1)\xi_1 + 2(x_2 + t\xi_2)\xi_2, \quad g''(t) = 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2.$$

Wir erhalten:

1. Wegen $g''(t) = 2\|\xi\|_2^2 = 2$ ist f in jedem $x \in \mathbb{R}^2$ und in allen Raumrichtungen konvex.
2. Es gilt $g'(0) = 2\langle x, \xi \rangle$. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt $2|\langle x, \xi \rangle| \leq 2\|x\|_2\|\xi\|_2 = 2\|x\|_2$, wobei Gleichheit gilt für $x = \pm \frac{x}{\|x\|_2}$.
 - a) Die Änderung von f in x ist also maximal in Richtung des steilsten Abstieges $\xi = +\frac{x}{\|x\|_2}$.
 - b) Die Änderung ist minimal in Richtung $\xi = -\frac{x}{\|x\|_2}$, der Richtung des steilsten Abstiegs.
 - c) In Richtung $\frac{\pm(x_1, -x_2)}{\|x\|_2}$ ist $g'(0) = 0$, d.h. die Funktionswerte ändern sich in diese Richtungen nicht.
3. Wegen $\langle x, \xi \rangle = \|x\|_2\|\xi\|_2 \cos \angle(x, \xi)$ erhalten wir: Die Änderung von f ist extrem, wenn ξ parallel zu x bzw. orthogonal zu der zu x gehörigen Höhenlinie verläuft, und 0, wenn ξ orthogonal zu x bzw. parallel zur zugehörigen Höhenlinie verläuft. \diamond

Definition 2.3.

Seien U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\|_2 = 1$.

Existiert der Wert $g'(0) = \frac{d}{dt}f(x + t\xi)|_{t=0}$, so nennt man den Wert die **Richtungsableitung** von f im Punkt x in Richtung ξ und schreibt $D_\xi f(x) = g'(0)$.

Für die Koordinatenrichtungen $\xi = e^{(i)}$ nennt man $D_\xi f(x)$ auch i -te **partielle Ableitung** von f an der Stelle x und schreibt $\partial_i f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = D_{e^{(i)}} f(x)$.

f heißt in x **partiell differenzierbar**, falls $\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)$ existieren.

Bemerkung 2.4.

1. Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$, d.h. es gilt $x + t\xi \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Also ist $g(t) = f(x + t\xi)$ definiert für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.
2. Es ist $\partial_i f(x) = \frac{d}{dt}f(x_1, \dots, t, \dots, x_n)|_{t=x_i}$. t ist die Variable, nach der differenziert und für die anschließend der Wert x_i eingesetzt wird. Die Werte $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ werden als fest gewählte Konstanten behandelt.
3. Für $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ setzen wir $D_\xi f(x) = (D_\xi f_1(x), \dots, D_\xi f_m(x))$. \diamond

Beispiel 2.5.

Wir betrachten die Richtungsableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \sin(x_1 x_2)$. Es gilt für eine beliebige Richtung $\|\xi\|_2 = 1$:

$$\begin{aligned} D_\xi f(x) &= \left. \frac{d}{dt} f(x + t\xi) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (x_1 + t\xi_1) \sin((x_1 + t\xi_1)(x_2 + t\xi_2)) \right|_{t=0} \\ &= \xi_1 \sin((x_1 + t\xi_1)(x_2 + t\xi_2)) \\ &\quad + (x_1 + t\xi_1) \cos((x_1 + t\xi_1)(x_2 + t\xi_2)) (\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1) \Big|_{t=0} \\ &= \xi_1 \sin(x_1 x_2) + x_1 \cos(x_1 x_2) (\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1), \end{aligned}$$

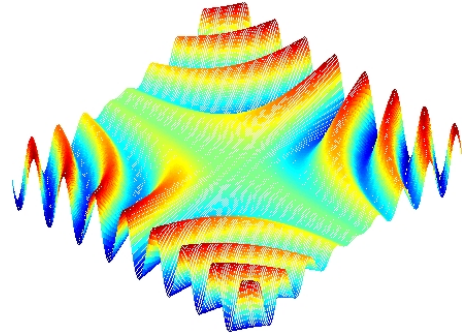


Fig. 5: Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x_1 \sin(x_1 x_2)$.

Speziell die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) &= \sin(x_1 x_2) + x_1 x_2 \cos(x_1 x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) &= x_1^2 \cos(x_1 x_2). \end{aligned} \quad \diamond$$

2.2. Das totale Differenzial**Definition 2.6.**

Seien U, V endlichdimensionale, normierte Vektorräume, Ω eine offene Teilmenge von U , $x \in \Omega$ und $\Omega_x = \{h \in U \mid x + h \in \Omega\}$. Dann heißt $f : \Omega \rightarrow V$ **in x differenzierbar**, falls es ein $A(x) \in \mathcal{L}(U, V)$ und eine in $0 \in \Omega_x$ stetige Abbildung $r(x, \cdot) : \Omega_x \rightarrow V$ mit $r(x, 0) = 0$ gibt, so dass für alle $h \in \Omega_x$ gilt:

$$f(x + h) = f(x) + A(x)h + \|h\|r(x, h).$$

f heißt **in Ω differenzierbar**, falls f in allen $x \in \Omega$ differenzierbar ist. $A(x)$ wird auch mit $f'(x)$, der **ersten Ableitung** von f , oder $df(x)$, dem **totalen Differenzial** von f , an der Stelle x bezeichnet.

Bemerkung 2.7.

1. Die Definition ist nur sinnvoll, wenn die lineare Abbildung $A(x)$ eindeutig bestimmt ist.

Angenommen, es existieren lineare Abbildungen $A_1(x), A_2(x)$ und Restfunktionen $r_1(x, \cdot), r_2(x, \cdot)$ mit

$$\forall h \in \Omega_x : f(x + h) = f(x) + A_1(x)h + \|h\|r_1(x, h) = f(x + h) = f(x) + A_2(x)h + \|h\|r_2(x, h).$$

Dann ist $\frac{1}{\|h\|}(A_1(x) - A_2(x))h = r_2(x, h) - r_1(x, h)$. Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$, also auch $B_\epsilon(0) \subseteq \Omega_x$, d.h. für jedes $y \in \partial B_1(0)$ gilt $h_n = \frac{1}{n}y \in \Omega_x$, falls $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist. Da $\frac{h_n}{\|h_n\|} = y$, gilt dann $(A_1(x) - A_2(x))y = 2_2(x, h_n) - r_1(x, h_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, also $A_1(x)y = A_2(x)y$ auf $\partial B_1(0)$ und damit $A_1(x) = A_2(x)$ auf U .

2. Ist $f : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung, so ist f' eine (im Allgemeinen nichtlineare) Abbildung $\Omega \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$ mit $x \mapsto f'(x) : U \rightarrow V$.

3. Speziell im Fall $U = V = \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{L}(U, V) \cong \mathbb{R}$, indem die lineare Abbildung $x \mapsto \lambda \cdot x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ identifiziert wird. Die übliche Ableitung $f'(x) \in \mathbb{R}$ einer in x differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann also als lineare Abbildung $f'(x) : h \mapsto f'(x)h$ aufgefasst werden. \diamond

Beispiel 2.8.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $A \in \mathcal{L}(U, V)$, und $f : U \rightarrow V$ gegeben durch $f(x) = Ax$. Dann gilt $f(x + h) = A(x + h) = Ax + Ah = f(x) + Ah + \|h\| \cdot 0$, d.h. f ist in jedem $x \in U$ differenzierbar mit vom betrachteten Punkt x unabhängiger Ableitung $f'(x) = A$. \diamond

Satz 2.9.

Seien U, V endlichdimensionale normierte Vektorräume, Ω eine offene Teilmenge von U und $f : \Omega \rightarrow V$ in $x \in \Omega$ differenzierbar. Dann ist f in x stetig.

Beweis.

Als lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen ist $A(x)$ stetig und es gilt $A(x)0 = 0$, also

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} A(x)h + \lim_{h \rightarrow 0} \|h\|r(x,h) = f(x). \quad \square$$

Satz 2.10.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x . Dann existieren alle Richtungsableitungen von f in x und für $\xi \in \partial B_1(0)$ gilt

$$D_\xi f(x) = f'(x)\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x).$$

Insbesondere ist f in x partiell differenzierbar.

Beweis.

Da f in x differenzierbar ist, gilt $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \|h\|r(x,h)$ für eine geeignete Restfunktion r . Wähle die speziellen Inkrementvektoren $h = \epsilon e_i$, $i = 1, \dots, n$, dann ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon e_i) - f(x)}{\epsilon} = f'(x)e_i.$$

Also ist f partiell differenzierbar in x mit $\partial_i f(x) = f'(x)e_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Weiter gilt

$$f'(x)\xi = f'(x)(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 f'(x)e_1 + \cdots + \xi_n f'(x)e_n. \quad \square$$

Satz 2.11.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in einer Umgebung von x und $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ stetig in x . Dann ist f differenzierbar in x und für $h \neq 0$ gilt:

$$f'(x)h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \|h\| D_{\frac{h}{\|h\|}} f(x).$$

Beweis.

Es gelte $m = 1$. Wir zeigen, dass für $h \in \Omega_x$ gilt $f(x+h) - f(x) = \sum h_i \partial_i f(x) + r(x,h)\|h\|$ mit $r(x,0) = 0$ und $r(x,h) \rightarrow 0$ für $\|h\| \rightarrow 0$. Definiere hierfür die Punkte $z^i = (x_1 + h_1, \dots, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \Omega$ und die Hilfsfunktionen $\varphi_i(t) = f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)$, dann existieren nach dem Mittelwertsatz $\theta_i \in (0, 1)$, so dass für die Punkte $\theta_i h_i$ zwischen 0 und h_i gilt

$$\begin{aligned} f(z^i) - f(z^{i-1}) &= \varphi_i(h_i) - \varphi_i(0) = \varphi_i'(\theta_i h_i)(h_i - 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) h_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{i-1} + \theta_i h_i e^{(i)}) h_i. \end{aligned}$$

Wegen $z^{i-1} + \theta_i h_i e^{(i)} \rightarrow x$ für $\|h\| \rightarrow 0$ und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen folgt daraus

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(z^n) - f(z^0) = \sum_{i=1}^n f(z^i) - f(z^{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{i-1} + \theta_i h_i e^{(i)}) h_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) h_i + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{i-1} + \theta_i h_i e^{(i)}) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right) \frac{h_i}{\|h\|} \right)}_{=r(x,h) \rightarrow 0 \text{ für } \|h\| \rightarrow 0} \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \square \end{aligned}$$

Definition 2.12.

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$, $f : U \rightarrow V$ partiell differenzierbar in einer Umgebung von x und $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ stetig in x . Dann heißt f **stetig differenzierbar**.

Wir setzen $\mathcal{C}^0(U, V) = \{f : U \rightarrow V \mid f \text{ stetig}\}$ und $\mathcal{C}^1(U, V) = \{f : U \rightarrow V \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$.

Bemerkung 2.13.

1. Ist $f : U \rightarrow V$ in x differenzierbar, dann gilt für die **Jacobimatrix** $\mathcal{J}_f(x) = (\partial_i f_j(x))_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$f'(x)\xi = \mathcal{J}_f(x) \cdot \xi = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \xi_i.$$

Die Jacobimatrix ist die *Darstellungsmatrix* der linearen Abbildung $f'(x) : U \rightarrow V$ bzgl. der kanonischen Basen $\mathcal{E}_n = (e_n^{(1)}, \dots, e_n^{(n)})$ des \mathbb{R}^n und $\mathcal{E}_m = (e_m^{(1)}, \dots, e_m^{(m)})$ des \mathbb{R}^m .

2. Speziell im Fall $m = 1$ nennen wir $\nabla f(x) = \mathcal{J}_f^T(x) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ den **Gradienten** von f an der Stelle x . Es gilt $f'(x)\xi = \langle \nabla f(x), \xi \rangle$. \diamond

2.3. Ableitungsregeln**Satz 2.14. (Kettenregel)**

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow V$ differenzierbar in $x \in U$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $f(x) \in V$. Dann ist auch $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in x und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{J}_{g \circ f}(x) = \mathcal{J}_g(f(x)) \cdot \mathcal{J}_f(x).$$

Beweis.

Es gilt

$$\begin{aligned} & g(f(x+h)) - g(f(x)) - g'(f(x))f'(x)h \\ &= g(f(x)) + f'(x)h + \|h\|r_f(x, h) - g(f(x)) - g'(f(x))f'(x)h \\ &= g(f(x)) + f'(x)h + \|h\|r_f(x, h) - g(f(x) + f'(x)h) \\ & \quad + g(f(x) + f'(x)h) - g(f(x)) - g'(f(x))f'(x)h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 2.15.

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x_1 + x_2$ und $g(x) = x_1 \cdot x_2$. Dann sind f und g auf ganz \mathbb{R}^2 differenzierbar mit

$$f'(x)h = h_1 + h_2, \quad g'(x)h = x_1 h_2 + x_2 h_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{J}_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_g(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Beweis.

Definiere die beiden Restfunktionen

$$r_f(x, h) = 0, \quad r_g(x, h) = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}},$$

dann sind $r_f(x, \cdot)$ und $r_g(x, \cdot)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ stetig in $h = 0$ mit $r_f(x, 0) = 0$, $r_g(x, 0) = 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x_1 + h_1) + (x_2 + h_2) - (x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + r_f(x, h)\|h\|, \\ g(x+h) - g(x) &= (x_1 + h_1)(x_2 + h_2) - x_1 x_2 = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + r_g(x, h)\|h\|. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 2.16. (Summenregel, Produktregel & Quotientenregel)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$. Dann gelten $f + g \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $f \cdot g \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

Sei V eine offene Teilmenge von $U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\}$. Dann ist $f/g \in C^1(V, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Beweis.

1. Seien $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = x_1 + x_2$ und $Q : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Q(x) = (f(x), g(x))$, dann gilt

$$(f + g)'(x) = (P \circ Q)'(x) = P'(Q(x))Q'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = f'(x) + g'(x).$$

2. Seien $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = x_1 \cdot x_2$ und $Q : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Q(x) = (f(x), g(x))$, dann gilt

$$(f \cdot g)'(x) = (P \circ Q)'(x) = P'(Q(x))Q'(x) = \begin{pmatrix} g(x) & f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

3. Definiere $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ via $P(x) = x_1 x_2$, $Q : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ via $Q(x) = (x_1, \frac{1}{x_2})$ und $R : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ via $R(x) = (f(x), g(x))$, dann gilt

$$\begin{aligned} (f/g)'(x) &= (P \circ Q \circ R)'(x) = P'((Q \circ R)(x)) \circ Q'(R(x)) \circ R'(x) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{g(x)} & f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g^2(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \quad \square \end{aligned}$$

2.4. Der Mittelwertsatz**Definition 2.17.**

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $u, v \in U$ und $\gamma \in C^0([0, 1], U)$ mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma(1) = v$. Dann heißt γ ein **Weg** zwischen u und v . Sind je zwei Punkte $u, v \in U$ durch einen Weg γ verbunden, dann heißt U **wegzusammenhängend**. Liegt zu je zwei Punkten u, v der Weg $\gamma(t) = u + t(v - u)$ in U , so heißt U **konvex**.

Bemerkung 2.18.

1. Wegzusammenhängende Mengen sind zusammenhängend: Andernfalls gäbe es eine Menge $\emptyset \subsetneq V \subsetneq U$, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Also gilt auch für $W = V^c$, dass $\emptyset \subsetneq W \subsetneq U$ und W offen ist. Wähle also $v \in V$ und $w \in W$ sowie einen Weg γ zwischen v und w . Dann ist $\emptyset \subsetneq \gamma^{-1}(V) \subsetneq [0, 1]$ sowohl offen als auch abgeschlossen, ein Widerspruch, da $[0, 1]$ zusammenhängend ist.

2. Eine Kugel $B_\epsilon(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist stets konvex: Seien $u, v \in B_\epsilon(x_0)$. Dann gilt für den Weg $\gamma(t) = u + t(v - u)$ und alle $t \in [0, 1]$:

$$\|\gamma(t) - x_0\| = \|(1 - t)u + tv - (1 - t)x_0 - tx_0\| \leq |1 - t| \|u - x_0\| + |t| \|v - x_0\| < \epsilon.$$

3. Im \mathbb{R}^n sind offene, zusammenhängende Mengen auch stets wegzusammenhängend: Zu $u \in U$ seien $A = \{x \in U \mid \text{es gibt einen Weg zwischen } x \text{ und } u\}$, dann ist $A \neq \emptyset$, da $u \in A$, und A ist offen, denn zu $x \in A$ gibt es wegen der Offenheit von U ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$; wie eben gezeigt, ist $B_\epsilon(x)$ konvex, also speziell wegzusammenhängend und damit $B_\epsilon(x) \subseteq A$. Aus dem selben Grund ist A^c offen, d.h. A abgeschlossen: Seien $x \in A^c$ und $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Gäbe es ein $y \in B_\epsilon(x)$ mit $y \notin A$, dann gäbe es einen Weg zwischen u und y und wegen der Konvexität von $B_\epsilon(x)$ auch einen zwischen y und x , d.h. $x \in A$, ein Widerspruch. \diamond

Satz 2.19. (Mittelwertsatz)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $u, v \in U$. Dann existiert ein $w \in U$ mit

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u).$$

Beweis.

Sei $\gamma(t) = u + t(v - u)$, dann existiert nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz zu der Funktion $\varphi = f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein $\theta \in [0, 1]$, so dass für $w = \gamma(\theta)$ gilt:

$$f(v) - f(u) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(1 - 0) = (f \circ \gamma)'(\theta) = f'(\gamma(\theta))\gamma'(\theta) = f'(w)(v - u). \quad \square$$

Korollar 2.20.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer und zusammenhängend, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung und es gelte $f'(u) = 0$ für alle $u \in U$. Dann ist f konstant auf U .

Beweis.

Seien $a, b \in U$. Da U wegzusammenhängend ist, existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. U ist offen, d.h. zu jedem $t \in [0, 1]$ existiert ein $\epsilon(t) > 0$ mit $B_{\epsilon(t)}(\gamma(t)) \subseteq U$. Diese Kugeln bilden offenbar eine offene Überdeckung von $\gamma([0, 1])$. Mit $[0, 1]$ ist auch $\gamma([0, 1])$ kompakt, d.h. es existieren endlich viele Parameter $0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq 1$ mit $\gamma([0, 1]) \subseteq \bigcup \{B_{\epsilon(t_k)}(\gamma(t_k)) \mid k = 1, \dots, N\}$ und $B_{\epsilon(t_k)}(\gamma(t_k)) \cap B_{\epsilon(t_{k+1})}(\gamma(t_{k+1})) \neq \emptyset$. Da $f'_i = 0$ auf $B_{\epsilon(t_k)}(\gamma(t_k))$ für alle $i = 1, \dots, m$, existieren nach dem Mittelwertsatz zu beliebigen Punkten $x, y \in B_{\epsilon(t_k)}(\gamma(t_k))$ Zwischenstellen $z_1, \dots, z_m \in B_{\epsilon(t_k)}(\gamma(t_k))$ mit $f_i(y) - f_i(x) = f'_i(z_i)(y - x) = 0$, d.h. alle f_i sind konstant auf den Kugeln $B_{\epsilon(t_k)}(\gamma(t_k))$. Aus $B_{\epsilon(t_k)}(\gamma(t_k)) \cap B_{\epsilon(t_{k+1})}(\gamma(t_{k+1})) \neq \emptyset$ schließlich folgt, dass diese Konstanten alle übereinstimmen. Also ist f konstant auf U . \square

Bemerkung 2.21. (Diskretisierung von Differenzialoperatoren)

Seien $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, und $h \in \Omega_x$. Dann heißt $\delta^h u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\delta_i u(x) = \frac{\delta}{\delta x_i} u(x) = \frac{u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, \dots, x_n)}{2h}$$

der i -te **Finite Differenzen-Operator** von u zur **Schrittweite** h . Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta x_i} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x).$$

Sei nämlich $\mathbb{E} i = 1$. Setze $\vec{x} = (x_2, \dots, x_n)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein ξ zwischen $x_1 - h$ und $x_1 + h$, $\xi = x_1 - h + 2h\theta$ für ein geeignetes $\theta \in (0, 1)$, mit

$$\frac{\delta}{\delta x_1} u(x) = \frac{u(x_1 + h, \vec{x}) - u(x_1 - h, \vec{x})}{2h} = \frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial x_1} u(\xi, \vec{x}) 2h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x).$$

Beispiel 2.22. (transformierte Wellengleichung)

Seien $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ und $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ vorgegeben. Wir suchen eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ der **partiellen Differenzialgleichung**

$$\begin{cases} \partial_1 \partial_2 u(x, y) = f(x, y) & \text{für } (x, y) \in \Omega^\circ \\ u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Wir lösen das Problem approximativ, indem wir Ω für ein großes $N \in \mathbb{N}$ und $x_i = hi$, $y_j = hj$ durch ein äquidistantes Gitter $\Omega_h = \{(x_i, y_j) \mid i, j = 0, \dots, N + 1\}^2$ ersetzen, wobei für die Schrittweite h gilt $h = \frac{1}{N+1}$. Dann besteht Ω_h aus $(N + 2)^2$ Punkten. Ersetzen wir in der Differenzialgleichung nun $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $u : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ und ∂_i durch δ_i , $i = 1, 2$, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} \delta_1 \delta_2 u(x, y) = f(x, y) & \text{für } (x, y) \in \Omega_h^\circ \\ u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in \partial\Omega_h \end{cases},$$

wobei $\Omega_h^\circ = \{(x_i, y_j) \mid i, j = 1, \dots, N\}$ und $\partial\Omega_h = \{(x_i, y_j) \mid i \in \{0, N + 1\} \text{ oder } j \in \{0, N + 1\}\}$, in N^2 Unbestimmten u_{ij} . Für die Lösung dieses Gleichungssystems gilt dann $u_{ij} = u(x_i, y_j) \approx u(x_i, y_j)$. \diamond

Korollar 2.23. (Satz von Schwarz)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $x \in U$ und $i, j = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$$

Beweis.

Die Finite Differenzen-Operatoren permutieren: Seien $\exists i = 1$ und $j = 2$, dann gilt mit $\vec{x} = (x_3, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x_2} \frac{\delta}{\delta x_1} f(x) &= \frac{\delta}{\delta x_2} \frac{f(x_1 + h, x_2, \vec{x}) - f(x_1 - h, x_2, \vec{x})}{2h} \\ &= \frac{1}{2h} \left(\frac{f(x_1 + h, x_2 + h, \vec{x}) - f(x_1 + h, x_2 - h, \vec{x})}{2h} - \frac{f(x_1 - h, x_2 + h, \vec{x}) - f(x_1 - h, x_2 - h, \vec{x})}{2h} \right) \\ &= \frac{1}{2h} \left(\frac{f(x_1 + h, x_2 + h, \vec{x}) - f(x_1 - h, x_2 + h, \vec{x})}{2h} - \frac{f(x_1 + h, x_2 - h, \vec{x}) - f(x_1 - h, x_2 - h, \vec{x})}{2h} \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta x_1} \frac{f(x_1, x_2 + 2h, \vec{x}) - f(x_1, x_2 - 2h, \vec{x})}{4h} = \frac{\delta}{\delta x_1} \frac{\delta}{\delta x_2} f(x). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta x_i} \frac{\delta}{\delta x_j} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta x_j} \frac{\delta}{\delta x_i} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x). \quad \square$$

2.5. Der Satz von Taylor**Bemerkung 2.24.**

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir haben gesehen, dass die erste Ableitung $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aufgefasst werden kann als Abbildung $f' : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ via $f'(x, h) = f'(x)h$, wobei $f'(x, \cdot)$ wieder als Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aufgefasst werden kann.

Ebenso lassen sich **zweite Ableitungen** $f'' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ auffassen als $f'' : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f''(x, h_1, h_2) = (f''(x)h_2)h_1$. Entsprechendes gilt für **höhere Ableitungen** $f^{(p)} : U \times (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f^{(p)}(x, h_1, \dots, h_p) = (((f^{(p)}h_p)h_{p-1}) \cdots h_1)$.

Sei speziell $m = 1$, dann gilt mit der Jacobimatrix $\mathcal{J}_f(x) = (\partial_i f(x)) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$:

$$f'(x, h) = f'(x)h = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \langle \mathcal{J}_f^T(x), h \rangle = \mathcal{J}_f(x) \cdot h.$$

Entsprechend erhalten wir in diesem Fall für die zweite Ableitung:

$$f''(x, h, k) = (f''(x)h)k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_i h_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \langle \mathcal{H}_f(x)h, k \rangle = k^T \mathcal{H}_f(x)h,$$

wobei $\mathcal{H}_f(x) = (\partial_i \partial_j f(x)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die **Hessematrix** von f an der Stelle x bezeichnet. Gilt $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, dann ist $\mathcal{H}_f(x)$ nach dem Satz von Schwarz symmetrisch, d.h. es gilt $\mathcal{H}_f^T(x) = \mathcal{H}_f(x)$. \diamond

Satz 2.25. (Taylor)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\gamma([0, 1]) \subseteq U$, wobei $\gamma(t) = x + th$, und $f \in \mathcal{C}^p(U, \mathbb{R})$ mit differenzierbarem $f^{(p)}$. Dann gilt

$$f(x + h) = f(x) = f'(x, h) + \frac{1}{2} f''(x, h, h) + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x, h, \dots, h) + R_p(x, h),$$

wobei sich das Restglied $R_p(x, h)$ für ein geeignetes $\theta \in (0, 1)$ schreiben lässt als

$$R_p(x, h) = \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x + \theta h, h, \dots, h).$$

Ist zusätzlich $f \in \mathcal{C}^{p+1}(U, \mathbb{R})$, d.h. $f^{(p+1)}$ stetig, dann besitzt das Restglied die Integraldarstellung

$$R_p(x, h) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x+th, h, \dots, h) dt.$$

Beweis.

Nach der eindimensionalen Version des Satzes von Taylor besitzt die Funktion $\varphi = f \circ \gamma$ die Darstellung

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(0) + r_p(x, h)$$

mit

$$r_p(x, h) = \frac{1}{(p+1)!}\varphi^{(p+1)}(\theta) \text{ für geeignetes } \theta \in (0, 1) \quad \text{bzw.} \quad r_p(x, h) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p \varphi^{(p+1)}(t) dt.$$

Es gelten $\varphi(1) = f(x+h)$ und $\varphi(0) = f(x)$. Sukzessive Anwendung der Kettenregel ergibt weiter

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= f'(\gamma(t))\gamma'(t) \Big|_{t=0} = f'(x, h), \\ \varphi''(0) &= f''(\gamma(t), h, \gamma'(t)) \Big|_{t=0} = f''(x, h, h), \\ &\vdots \\ \varphi^{(p)}(0) &= f^{(p)}(\gamma(t), h, \dots, h, \gamma'(t)) \Big|_{t=0} = f^{(p)}(x, h, \dots, h). \end{aligned}$$

Schließlich ist $\varphi^{(p+1)}(t) = f^{(p+1)}(x+th, h, \dots, h)$, womit alles gezeigt ist. \square

Bemerkung 2.26.

Die Anzahl der benötigten partiellen Ableitungen steigt mit p stark an:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) + \sum_{i,j=1}^n \frac{h_i h_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{h_i h_j h_k}{6} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) + \dots$$

Allerdings ist es nach dem Satz von Schwarz redundant, mehrere gemischte Ableitungen einzeln auszuwerten, die sich nur durch die Reihenfolge der Ableitungsoperatoren unterscheiden. Wir führen daher die folgende, kompaktere Schreibweise mit **Multiindizes** ein: Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, dann setzen wir

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \quad h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Dann liest sich die Taylorsche Entwicklungsformel als

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_p(x, h) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_p(x, h). \quad \diamond$$

2.6. Ableitung von Umkehrfunktionen

Satz 2.27. (Satz über lokale Umkehrbarkeit)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in U$ und $\det(df(x_0)) \neq 0$.

Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x_0 , so dass $f(V)$ offen ist, $f|_V$ injektiv ist, $(f|_V)^{-1}$ stetig differenzierbar ist und für die Ableitung gilt

$$(d(f|_V)^{-1})(f(x)) = (df(x))^{-1} \quad \text{für alle } x \in V.$$

Beweis.

Sei zunächst $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir definieren zu $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + h \in U$:

$$g(h) = f(x_0 + h) - y; \quad G(h) = (df(x_0))^{-1}g(h); \quad \Phi(h) = \text{Id}(h) - G(h).$$

Ist h dann ein Fixpunkt von Φ , dann ist $G(h) = 0$, d.h. auch $g(h) = 0$, d.h. $f(x_0 + h) = y$ und wir haben ein Urbild von y gefunden.

1. Kontraktion: Es ist $d\Phi(0) = \text{Id} - (df(x_0))^{-1}(df(x_0)) = 0$; da $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, ist $\|d\Phi_i\|$ stetig bei 0 für alle $i = 1, \dots, n$, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $\|d\Phi_i(x)\| < \frac{1}{2n}$ ist für alle $x \in B_\epsilon(0)$. Weiter gibt es nach dem Mittelwertsatz zu $x_1, x_2 \in B_\epsilon(0)$ stets Punkte $c_1, \dots, c_n \in B_\epsilon(0)$ mit

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} (d\Phi_1(c_1))(x_1 - x_2) \\ \vdots \\ (d\Phi_n(c_n))(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|d\Phi_i(c_i)\| \|x_1 - x_2\| \leq n \frac{1}{2n} \|x_1 - x_2\|.$$

Also ist Φ Lipschitz-stetig zur Konstanten $q = \frac{1}{2}$, d.h. kontrahierend auf $B_\epsilon(0)$.

2. Selbstabbildung: Definiere $\delta = \frac{\epsilon}{2\|(df(x_0))^{-1}\|}$, dann gilt für alle $h \in \overline{B_\epsilon(0)}$ und alle $y \in B_\delta(f(x_0))$:

$$\|\Phi(h)\| \leq \|\Phi(h) - \Phi(0)\| + \|\Phi(0)\| \leq \frac{\|h\|}{2} + \|(df(x_0))^{-1}\| \|f(x_0) - y\| < \epsilon,$$

d.h. auch $\Phi(h)$ liegt in $B_\epsilon(0)$.

Damit erfüllt $\Phi : \overline{B_\epsilon(0)} \rightarrow \overline{B_\epsilon(0)}$ für jedes $y \in B_\delta(f(x_0))$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, es existiert also genau ein $h \in \overline{B_\epsilon(0)}$ mit $f(x_0 + h) = y$. Speziell ist $\|h\| = \|\Phi(h)\| < \epsilon$. Zu jedem $y \in B_\delta(f(x_0))$ gibt es damit genau ein $x \in B_\epsilon(x_0)$ mit $f(x) = y$.

Setze $V = B_\epsilon(x_0) \cap f^{-1}(B_\delta(f(x_0)))$, dann ist V offen, $f|_V$ ist injektiv und $f(V) = B_\delta(f(x_0))$ ist offen. Insbesondere ist $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ definiert und stetig in $f(x_0)$. Definiere $H(h) = f^{-1}(f(x_0) + h) - x_0$, dann gilt $H(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Da $f : B_\epsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, gibt es ein im Nullpunkt stetiges $F(x_0, \cdot) : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $f(x_0 + h) = f(x_0) + (F(x_0, h))(h)$ und $df(x_0) = F(x_0, 0)$. Damit ist

$$F(x_0, H(h))(H(h)) = f(x_0 + H(h)) - f(x_0) = f(x_0 + f^{-1}(f(x_0) + h) - x_0) - f(x_0) = h$$

und wir erhalten $f^{-1}(f(x_0) + h) = x_0 + H(h) = f^{-1}(f(x_0)) + (F(x_0, H(h)))^{-1}h$, d.h. f^{-1} ist differenzierbar in x_0 mit $df^{-1}(f(x_0)) = F(x_0, H(h))^{-1}|_{h=0} = (F(x_0, 0))^{-1} = (df(x_0))^{-1}$. \square

Beispiel 2.28. (Charakteristikenmethode)

Seien $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ injektiv, $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\xi\| = 1$ und $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\{\xi, \dot{\gamma}(t_0)\}$ linear unabhängig ist. Gesucht sind eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $x_0 = \gamma(t_0)$ und eine Funktion $u \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, welche die folgende partielle Differentialgleichung löst:

$$\begin{cases} \langle \xi, \nabla u(x) \rangle = 0 & \text{für alle } x \in U \\ u(\gamma(t)) = f(t) & \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \gamma(t) \in U \end{cases}$$

1. Zu $t \in \mathbb{R}$ definieren wir $\gamma_t(s) = \gamma(t) + s\xi$. Dann ist u auf $\Gamma_t = \gamma_t(\mathbb{R})$ eindeutig bestimmt durch $u(\gamma(t) + s\xi) = f(t)$: Setze $z_t(s) = u(\gamma_t(s))$, dann gilt nach Kettenregel

$$\dot{z}_t(s) = \nabla u(\gamma_t(s)) \dot{\gamma}_t(s) = \langle \nabla u(\gamma_t(s)), \xi \rangle = 0,$$

d.h. z_t ist konstant, und außerdem $z_t(0) = u(\gamma(t))$, d.h. $z_t(s) = f(t)$ für alle s .

2. Definiere $G(s, t) = z_t(s) = \gamma(t) + s\xi$, dann ist $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\det(dG(s, t)) = \det(\xi, \dot{\gamma}(t)) \neq 0$ für $(s, t) = (0, t_0)$. Nach dem Satz über inverse Funktionen existiert damit eine offene Umgebung U von x_0 , so dass $G|_U : U \rightarrow G(U)$ invertierbar ist. Darüber hinaus ist $G^{-1} : G(U) \rightarrow U$ stetig differenzierbar, speziell $G_2^{-1} \in \mathcal{C}^1(G(U), \mathbb{R})$. Seien nun $(x_1, x_2) \in U$ und dazu $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ mit $G(s, t) = (x_1, x_2)$, dann ist $u(x_1, x_2) = u(G(s, t)) = f(t) = f(G_2^{-1}(x_1, x_2))$, d.h. $u = f \circ G_2^{-1} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

3. Es bleibt zu zeigen, dass u die Differentialgleichung löst. Seien dazu $x \in U$ und s, t die eindeutig bestimmten Zahlen mit $x = \gamma(t) + s\xi$. Dann gelten $u(\gamma(t)) = f(t)$ und

$$\langle \nabla u(x), \xi \rangle = D_\xi u(x) = \left. \frac{d}{d\theta} u(x + r\xi) \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d}{d\theta} u(\gamma(t) + (s + \theta)\xi) \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d}{d\theta} f(t) \right|_{\theta=0} = 0. \quad \diamond$$

Beispiel 2.29. (Polarkoordinaten)

Wir betrachten die **Koordinatentransformation** $\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwischen kartesischen Koordinaten und **Polarkoordinaten**:

$$\Phi : (r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = (x, y).$$

Die Jacobimatrix zu Φ ist dann

$$\mathcal{J}_\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1(r, \varphi) & \partial_2 \Phi_1(r, \varphi) \\ \partial_1 \Phi_2(r, \varphi) & \partial_2 \Phi_2(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Für die Jacobideterminante in einem beliebigen Punkt $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ gilt

$$\det \Phi'(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} = r(\cos(\varphi))^2 + r(\sin(\varphi))^2 = r > 0.$$

Also ist Φ in jedem Punkt zunächst lokal invertierbar. Φ besitzt aber sogar eine globale Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche explizit gegeben ist als

$$\Phi_1^{-1}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Phi_2^{-1}(x, y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0 \ \& \ y > 0 \\ (\pi/2) & x = 0 \ \& \ y > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & x < 0 \ \& \ y > 0 \\ 2\pi + \arctan(y/x) & x > 0 \ \& \ y < 0 \\ 3(\pi/2) & x = 0 \ \& \ y < 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & x < 0 \ \& \ y < 0 \end{cases}$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir mit $(x, y) = \Phi(r, \varphi)$:

$$(\mathrm{d}\Phi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix} = (\mathrm{d}\Phi(r, \varphi))^{-1}. \quad \diamond$$

Definition 2.30.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ eine injektive Funktion, so dass $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(f(U), \mathbb{R}^n)$ erfüllt ist. Dann heißt f ein **\mathcal{C}^k -Diffeomorphismus** von U auf $f(U)$.

2.7. Der Satz über implizite Funktionen**Bemerkung 2.31.**

Gegeben seien $m+n$ Variablen $(u, v) \in \mathbb{R}^{m+n}$ und n Gleichungen $\Phi_1(u, v) = 0, \dots, \Phi_n(u, v) = 0$. Wir wollen untersuchen, ob nach freier Wahl der Variablen v_1, \dots, v_m die übrigen Unbestimmten u_1, \dots, u_n durch die Gleichungen festgelegt sind, d.h. ob eine **Auflösungsfunktion** $u = \varphi(v)$ existiert mit $\Phi(\varphi(v), v) = 0$. Wir sagen dann, dass das Gleichungssystem $\Phi(u, v)$ nach den Variablen u aufgelöst werden kann. \diamond

Satz 2.32. (Satz über implizite Funktionen)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $(u_0, v_0) \in D$ mit $\Phi(u_0, v_0) = 0$ und

$$\mathrm{d}\Phi_{(1)}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1(u_0, v_0) & \cdots & \partial_n \Phi_1(u_0, v_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \Phi_n(u_0, v_0) & \cdots & \partial_n \Phi_n(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar. Dann gibt es eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^m$ von v_0 und eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^n)$, so dass gelten $\varphi(v_0) = u_0$ und $\Phi(\varphi(v), v) = 0$ für alle $v \in W$.

Die Ableitung von φ ist gegeben als $\mathrm{d}\varphi(v) = -\mathrm{d}\Phi_{(1)}^{-1}(\varphi(v), v) \cdot \mathrm{d}\Phi_{(2)}(\varphi(v), v)$.

Beweis.

Wir können den Satz über inverse Funktionen anwenden auf $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $F(u, v) = (\Phi(u, v), v)$, denn F ist differenzierbar und im Punkt (u_0, v_0) erfüllt das Differenzial von F

$$\det dF(u_0, v_0) = \det \left(\begin{array}{c|c} d\Phi_{(1)} & * \\ \hline 0 & \text{Id} \end{array} \right) (u_0, v_0) = \det d\Phi_{(1)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Damit existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ des Punktes (u_0, v_0) derart, dass die Funktion $G = F^{-1}|_V : F(V) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $(x, y) \mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y))$ definiert und stetig differenzierbar ist. Insbesondere gilt für alle $(x, y) \in V$:

$$(x, y) = F(G(x, y)) = (\Phi(\phi(x, y), \psi(x, y)), \psi(x, y)).$$

Bezeichne $\Pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, gegeben durch $\Pi_2(x, y) = y$, die Projektion auf die zweite Komponente, dann ist $W = \Pi_2(F(V)) \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und wegen $F(u_0, v_0) = (\Phi(u_0, v_0), v_0) = (0, v_0)$ eine Umgebung von v_0 . Definiere die Auflösung $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \phi(0, v)$, dann gelten $\varphi \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$, da $\phi \in C^1(F(V), \mathbb{R}^n)$, $\varphi(v_0) = \phi(F(u_0, v_0)) = u_0$ und $\Phi(\varphi(v), v) = \Phi(\phi(0, v), v) = 0$.

Seien schließlich $v \in W$, $\|h\| = 1$ und $H(v) = (\varphi(v), v)$, dann gilt wegen $\Phi \circ H \equiv 0$ auf W :

$$\begin{aligned} 0 &= d(\Phi \circ H)(v)h = (d\Phi)(H(v))(dH)(v)h = (d\Phi)(\varphi(v), v)((d\varphi)(v)h, h) \\ &= (d\Phi)_{(1)}(\varphi(v), v)((d\varphi)(v)h) + (d\Phi)_{(2)}(\varphi(v), v)h; \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $(d\Phi)_{(1)}(\varphi(v), v)$ invertierbar ist, können wir nach $(d\varphi)(v)$ auflösen und erhalten die behauptete Formel für $d\varphi$. □

Beispiel 2.33. (Implizites Auflösen beim Einheitskreis)

Der Einheitskreis im \mathbb{R}^2 ist gegeben als Nullstellenmenge von $\Phi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $(u, v) \mapsto u^2 + v^2 - 1$. Sei $(u_0, v_0) = (1, 0)$. Wir wollen die Gleichung $\Phi(u, v) = 0$ lokal bei (u_0, v_0) nach u auflösen. Es gelten $\Phi(u_0, v_0) = 0$ und $\det \Phi_{(1)}(u_0, v_0) = 2u_0 \neq 0$, nach dem Satz über implizite Funktionen existieren also eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^1$ von v_0 und eine Abbildung $\varphi \in C^1(W, \mathbb{R}^1)$, so dass für alle $v \in W$ gilt: $(\varphi(v))^2 + v^2 - 1 = 0$.

Hier ist φ auch explizit berechenbar: Es ist $\varphi(v) = \pm\sqrt{1-v^2}$ mit $W \subseteq (-1, 1)$ und die Bedingung $\varphi(v_0) = u_0$ liefert $\varphi(v) = \sqrt{1-v^2}$. φ lässt sich auch durch implizites Ableiten bestimmen: Es gilt

$$d\varphi(v) = -d\Phi_{(1)}^{-1}(\varphi(v), v)(d\Phi)_{(2)}(\varphi(v), v) = \frac{-2v}{2\varphi(v)};$$

zusammen mit der Bedingung $\varphi(v_0) = u_0$ erhalten wir φ also als Lösung des Anfangswertproblems

$$\varphi'(v) + \frac{v}{\varphi(v)} = 0 \quad \& \quad \varphi(0) = 1. \quad \diamond$$

2.8. Optimalitätsbedingungen

Definition 2.34.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und $x \in U$.

1. x heißt **globales Maximum** von f , falls für alle $y \in U$ gilt $f(x) \geq f(y)$, und **globales Minimum** von f , falls für alle $y \in U$ gilt $f(x) \leq f(y)$.
2. x heißt **lokales Maximum** von f , falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert mit $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in V$, und **lokales Minimum** von f , falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert mit $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in V$.
3. Globale Maxima und Minima werden als **globale Extremstellen** von f bezeichnet, lokale Maxima und Minima als **lokale Extremstellen**.
4. Ist x eine Extremstelle von f und gilt $f(x) = f(y)$ nur für $x = y$, so heißt x **isoliert**.

Bemerkung 2.35.

Wir leiten im Folgenden notwendige und hinreichende Kriterien dafür her, dass x eine lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Wir führen dazu noch zwei weitere Begriffe ein: $x \in U$ heißt eine **kritische Stelle** von f , falls $df(x) = 0$ gilt. x heißt ein **Sattelpunkt** von f , falls x eine kritische Stelle, aber kein lokales Extremum von f ist. \diamond

Satz 2.36. (Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ und $x \in U$ ein lokales Extremum. Dann ist x ein kritischer Punkt.

Beweis.

☐ sei x ein lokales Maximum. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| = 1$:

$$df(x)\xi = D_\xi f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\xi) - f(x)}{t} \leq 0 \quad \implies \quad df(x) = 0. \quad \square$$

Definition 2.37.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

1. A heißt **positiv definit**, falls $\langle x, Ax \rangle > 0$, und **positiv semidefinit**, falls $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. A heißt **negativ definit**, falls $\langle x, Ax \rangle < 0$, und **negativ semidefinit**, falls $\langle x, Ax \rangle \leq 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
3. A heißt **indefinit**, falls $x, y \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $\langle x, Ax \rangle > 0$ und $\langle y, Ay \rangle < 0$.

Bemerkung 2.38. (Definitheitskriterien)

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, d.h. es gelte $A^T = A$. Dann ist A über \mathbb{R} diagonalisierbar. Bezeichne $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der n (nicht notwendig paarweise verschiedener) Eigenwerte von A , d.h. die Nullstellen des zu A gehörigen charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$. Dann gilt:
 - a) A ist genau dann positiv definit, wenn für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt $\lambda > 0$, und genau dann negativ definit, wenn $\lambda < 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$ erfüllt ist.
 - b) A ist genau dann positiv semidefinit, wenn für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt $\lambda \geq 0$, und genau dann negativ semidefinit, wenn $\lambda \leq 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$ erfüllt ist.
 - c) Schließlich ist A genau dann indefinit, wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existieren mit $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$.
2. **Hurwitzkriterium:** Sei wieder $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Wir nennen $A_N = (a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 1 \leq i \leq N}}$ den N -ten **Hauptminor** von A . Dann ist A positiv definit g.d.w. $\det(A_N) > 0$ für alle $N = 1, \dots, n$ und negativ definit g.d.w. $\det(-A_N) \geq 0$ für alle N g.d.w. $\det(A_N) < 0$ für ungerades und $\det(A_N) > 0$ für gerades N . \diamond

Satz 2.39. (Hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ und $x \in U$ mit $df(x) = 0$. Dann gelten:

1. f hat in x ein lokales, isoliertes Maximum, falls $\mathcal{H}_f(x)$ negativ definit ist.
2. f hat in x ein lokales, isoliertes Minimum, falls $\mathcal{H}_f(x)$ positiv definit ist.
3. f hat in x einen Sattelpunkt, falls $\mathcal{H}_f(x)$ indefinit ist.

Beweis.

Eine Taylorentwicklung von f im Punkt x liefert:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \partial_i \partial_j f(x) + R(x, h) = \frac{1}{2} \langle h, \mathcal{H}_f(x) h \rangle + R(x, h),$$

wobei $R(x, h)$ für $\|h\| \rightarrow 0$ schneller verschwindet als $\|h\|^2$. \square

Korollar 2.40. (Notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ und $x \in U$. Dann gelten:

1. Hat f ein lokales Maximum in x , so ist $\mathcal{H}_f(x)$ negativ semidefinit.
2. Hat f ein lokales Minimum in x , so ist $\mathcal{H}_f(x)$ positiv semidefinit.

Beispiel 2.41.

Wir betrachten sechs typische Fälle, die auftreten können:

1. Sei $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, dann ist $\nabla f(x, y) = (x, y)^T = (0, 0)^T$ genau dann, wenn $(x, y)^T = (0, 0)^T$. Die Hessematrix von f ist positiv definit: $\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also besitzt f bei $(0, 0)$ ein lokales, isoliertes Minimum. Die Definitheit sieht man sowohl an der Positivität des doppelten Eigenwertes $\lambda = 1$ als auch anhand des Hurwitzkriteriums $\det(\mathcal{H}_f(0, 0))_1 = 1$ und $\det(\mathcal{H}_f(0, 0))_2 = 1$ und direkt anhand der Definition $\langle v, \mathcal{H}_f(0, 0)v \rangle = v^T \mathcal{H}_f(0, 0)v = v_1^2 + v_2^2 > 0$ für alle $v \neq 0$.
2. Sei $f(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, dann ist $\nabla f(x, y) = (-x, -y)^T = (0, 0)^T$ genau dann, wenn $(x, y)^T = (0, 0)^T$. Die Hessematrix von f ist negativ definit: $\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Also besitzt f bei $(0, 0)$ ein lokales, isoliertes Maximum.
3. Auch für $f(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ ist $\nabla f(x, y) = (x, -y)^T = (0, 0)^T$ genau dann, wenn $(x, y)^T = (0, 0)^T$. Allerdings ist $\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, d.h. f besitzt bei $(0, 0)^T$ einen Sattelpunkt.
4. Für die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2$ gilt $\nabla f(x, y) = (0, 0)^T \Leftrightarrow (x, y)^T = (x, 0)^T$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Die Hessematrix in diesen Punkten ist positiv semidefinit: $\mathcal{H}_f(x, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Jedes $(x, 0)^T$ ist ein lokales, nicht isoliertes Minimum.
5. Die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^3)$ besitzt den Gradienten $\nabla f(x, y) = (x, \frac{3}{2}y^2)$, d.h. den einzigen stationären Punkt $(0, 0)^T$. Die Hessematrix von f in $(0, 0)^T$ ist ebenfalls $\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, aber $(0, 0)^T$ ist kein lokales Minimum, sondern ein Sattelpunkt.
6. Schließlich hat auch die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^4)$ mit dem Gradienten $\nabla f(x, y) = (x, 2y^3)^T$ genau den einen stationären Punkt $(0, 0)^T$ und ebenso die Hessematrix $\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, aber $(0, 0)^T$ ist ein lokales, isoliertes Minimum. \diamond

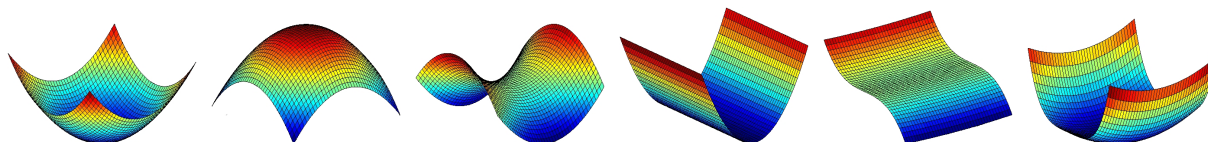


Fig. 6: Verschiedene paradigmatische Fälle bei der Suche nach lokalen Extrempunkten: Ein isoliertes, lokales Minimum mit positiv definiter Hessematrix (1), ein isoliertes, lokales Maximum mit negativ definiter Hessematrix, ein Sattelpunkt mit indefiniter Hessematrix (3) sowie drei verschiedene Fälle mit positiv semidefiniter Hessematrix: ein nicht isoliertes Minimum (4), ein Sattelpunkt (5) und ein isoliertes Minimum (6).

2.9. Extrema unter Nebenbedingungen**Satz 2.42. (Satz über Extrema unter Nebenbedingungen)**

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $\Psi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ für ein $m < n$ und es gelte $\text{rang}(d\Psi)(x) = m$ für alle $x \in U$. Besitzt f dann ein lokales Extremum in x_0 unter der Nebenbedingung $\Psi(x_0) = 0$, dann existiert ein **Lagrangemultiplikator** $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass (x_0, λ_0) ein stationärer Punkt ist von

$$F : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, \Psi(x) \rangle.$$

Beweis.

1. Variableneliminierung: Wegen $\text{rang} \nabla \Psi(x_0) = m$ gibt es eine Variablenumsortierung $x = (u, v)$, so dass $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}(x_0)\right) \in \mathbb{R}^m$ invertierbar ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann $\Psi(u, v) = 0$ dann in einer Umgebung von $x_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ lokal nach u aufgelöst werden, d.h. es existieren eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ von v_0 und eine Auflösungsfunktion $\varphi \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^m)$ mit $\varphi(v_0) = u_0$ und $\Psi(\varphi(v), v) = 0$ für alle $v \in W$.

2. Nach Voraussetzung besitzt die Funktion $G : W \rightarrow \mathbb{R}$, $G(v) = f(\varphi(v), v)$ ein Extremum in v_0 , d.h.

$$0 = dG(v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Nach den Regeln für implizites Ableiten bzw. der Ableitung der Identitätsfunktion gelten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(v_0) = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u_0, v_0) \right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u_0, v_0).$$

3. Wir definieren jetzt den Lagrangemultiplikator $\lambda_0 = -\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u_0, v_0) \right)^{-1}$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0, \lambda_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + \left\langle \lambda_0, \frac{\partial \Psi}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0, \lambda_0) &= \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) + \left\langle \lambda_0, \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(u_0, v_0, \lambda_0) &= \Psi(u_0, v_0) = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $dF(u_0, v_0, \lambda_0) = 0$, d.h. (u_0, v_0, λ_0) ist ein stationärer Punkt von F . □

Beispiel 2.43.

Wir suchen die Minimalstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, unter der Nebenbedingung $x + y = 1$. Mit der Wahl $\Psi(x, y) = x + y - 1$ liest sich dies als folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\min_{x+y=1} f(x, y) \iff \min_{(x,y)} f(x, y) \quad \text{u.d.N.B.} \quad \Psi(x, y) = 0.$$

Wir lösen stattdessen das unrestringierte Optimierungsproblem $\min F(x, y, \lambda)$ mit

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \Psi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Der Lagrangekalkül ist anwendbar, denn $\text{rang} d\Psi(x, y) = \text{rang}(1, 1) = 1$ in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Weiter ist die Existenz einer Lösung (x_0, y_0) gesichert, da etwa für den Punkt $(1, 0)$ gilt $f(1, 0) = 1$ und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x, y)\| \geq 2$ gilt $f(x, y) = \|(x, y)\|^2 \geq 2$, d.h. es genügt, die Funktion f auf der kompakten Menge $\{(x, y) \mid \|(x, y)\| \leq 1\}$ zu betrachten, die dort als stetige Abbildung ihr Minimum annehmen muss. Wir erhalten also die Optimalitätsbedingung

$$dF(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + \lambda \\ 2y + \lambda \\ x + y - 1 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} x = y \\ x = (1/2) \\ \lambda = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = (1/2) \\ y = (1/2) \\ \lambda = -1 \end{cases}.$$

Das restringierte Optimierungsproblem besitzt also die eindeutige Lösung $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Dieses spezielle Problem lässt sich allerdings auch durch explizite Variablenelimination lösen: Es ist $\Psi(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = \varphi(y) = 1 - y$. Wir minimieren daher die unrestringierte Funktion $\Phi(y) = f(\varphi(y), y) = (1 - y)^2 + y^2$. Es gilt $\Phi'(y_0) = -2 + 4y_0 = 0$ genau für $y_0 = \frac{1}{2}$. Also ist auch $x_0 = \varphi(y_0) = \frac{1}{2}$. ◇

3. Kurven und Flächen

3.1. Kurvenparametrisierungen

Definition 3.1.

Eine \mathcal{C}^k -**Kurvenparametrisierung** ist eine Abbildung $\gamma \in \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ und $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Für $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^k([\tilde{a}, \tilde{b}], \mathbb{R}^n)$ setzen wir $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, falls ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ mit $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ existiert, so dass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ erfüllt ist. φ heißt dann ein \mathcal{C}^k -**Parameterwechsel**; die Gesamtheit $\Gamma = \{\tilde{\gamma} \mid \tilde{\gamma} \sim \gamma\}$ nennen wir die von γ erzeugte \mathcal{C}^k -**Kurve**.

Bemerkung 3.2.

\sim definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller C^k -Kurvenparametrisierungen. Eine C^k -Kurve ist also die Äquivalenzklasse $[\gamma]$ einer ausgewählten Parametrisierung γ . \diamond

Definition 3.3.

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine C^1 -Kurve. Wir definieren die **Länge** von Γ via

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Bemerkung 3.4.

1. Die Länge einer Kurve ist *wohldefiniert*, d.h. unabhängig von der Wahl der Parametrisierung: Sei $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ ein beliebiger C^k -Parameterwechsel, dann gilt

$$\mathcal{L}([\gamma \circ \varphi]) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{d}{dt}(\gamma \circ \varphi)(t) \right\| dt = \int_{\varphi^{-1}(\tilde{a})}^{\varphi^{-1}(\tilde{b})} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \mathcal{L}([\gamma]).$$

2. Die Länge einer Kurve entspricht im Grenzwert der Länge eines die Kurve approximierenden Polygonzuges: Sei $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$, dann existieren nach dem Mittelwertsatz Zwischenstellen $\theta_2, \dots, \theta_n$, so dass für die Länge des zu $\Gamma_n = \{(t_i, \gamma(t_i)) \mid i = 1, \dots, n\}$ gehörigen Polygonzug gilt:

$$\sum_{i=2}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=2}^n \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=2}^n \|\dot{\gamma}(\theta_i)\| (t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

falls $\max |t_i - t_{i-1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \diamond

Beispiel 3.5.

Wir parametrisieren den Kreis mit Radius r um 0 via $\gamma(t) = r(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann entspricht die Länge von $\Gamma = [\gamma]$ dem Kreisumfang:

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r. \quad \diamond$$

Bemerkung 3.6.

Zu einer C^1 -Kurve $\Gamma = [\gamma]$ definieren wir den Parameterwechsel $\varphi: [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \rightarrow [a, b]$ durch

$$\varphi = \Psi^{-1}, \quad \Psi(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau.$$

Die Invertierbarkeit von Ψ folgt dabei wegen $\dot{\Psi}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ aus dem Monotonieverhalten. Dann gilt für die Parametrisierung $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi \in C^k([0, \mathcal{L}(\Gamma)], \mathbb{R}^n)$:

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \|\dot{\varphi}(t)\| = \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\Psi}(\Psi^{-1}(t))\|} = 1.$$

Wir sagen dann, Γ wird via der Parametrisierung $\tilde{\gamma}$ mit *konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen*, und nennen $\tilde{\gamma}$ die **Bogenlängenparametrisierung** von Γ . \diamond

Beispiel 3.7.

Die durch $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$, $t \in [0, 2\pi]$, mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $c > 0$ parametrisierte **Helix** $\Gamma = [\gamma]$ besitzt die Bogenlängenparametrisierung

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(r \cos \left(\frac{t}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right), r \sin \left(\frac{t}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right), \frac{ct}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right),$$

denn die zugehörige Umparametrisierung $\varphi : [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ berechnet sich als

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ c \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{r^2 + c^2},$$

$$\Psi(t) = t\sqrt{r^2 + c^2}, \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{r^2 + c^2}}. \quad \diamond$$

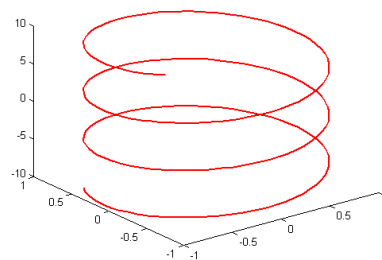


Fig. 7: Eine Helix mit Radius $r = 1$ und Ganghöhe $c = 2\pi$.

3.2. Geometrie von Kurven**Definition 3.8.**

Sei γ die Bogenlängenparametrisierung der \mathcal{C}^1 -Kurve Γ . Dann heißt $\mathbf{t}(t) = \dot{\gamma}(t)$ der **Tangenteneinheitsvektor** von Γ ab der Stelle t . $\kappa(t) = \|\dot{\mathbf{t}}(t)\|$ nennen wir die **Krümmung** an dieser Stelle und im Fall $\kappa(t) \neq 0$ heißt $\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \dot{\mathbf{t}}(t)$ der **Normaleneinheitsvektor** an der Stelle t .

Bemerkung 3.9.

1. κ gibt an, wie *schnell* sich die Richtung der Kurve lokal ändert: Ist κ groß, dann liegt eine *scharfe* Kurve vor; für κ klein verläuft Γ im Wesentlichen *geradlinig*.
2. Tangenteneinheitsvektor und Normaleneinheitsvektor verlaufen orthogonal zueinander:

$$\|\mathbf{t}(t)\|^2 = \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}(t) \rangle \equiv 1 \quad \implies \quad 0 = \frac{d}{dt} \|\mathbf{t}(t)\|^2 = 2 \langle \dot{\mathbf{t}}(t), \mathbf{t}(t) \rangle = 2\kappa(t) \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{t}(t) \rangle.$$

3. Sei Γ eine \mathcal{C}^3 -Kurve, dann verläuft γ lokal in der \mathbf{t} - \mathbf{n} -Ebene: Für hinreichend kleines h gilt nach Taylorentwicklung:

$$\gamma(t+h) \approx \gamma(t) + h\dot{\gamma}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{\gamma}(t), \quad \gamma(t-h) \approx \gamma(t) - h\dot{\gamma}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{\gamma}(t). \quad \diamond$$

Bemerkung 3.10. (Raumkurven)

1. Im Dreidimensionalen ergänzen wir $\mathbf{t}(t)$ und $\mathbf{n}(t)$ mit dem **Binormalenvektor** $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$ zu einer Orthonormalbasis.
2. $\dot{\mathbf{n}}$ liegt in der \mathbf{t} - \mathbf{b} -Ebene, denn es gilt $\langle \dot{\mathbf{n}}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 0$ für alle t . Weiter gilt für die Krümmung der Kurve:

$$\kappa = \langle \mathbf{n}, \dot{\kappa} \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{t}} \rangle - \frac{d}{dt} \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle.$$

3. Wir wollen noch untersuchen, wie stark sich Γ aus der \mathbf{n} - \mathbf{t} -Ebene entfernt. Die Änderung des Normalenvektors \mathbf{n} in Richtung \mathbf{b} ist $\tau = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle$ und wird **Torsion** der Kurve genannt. \diamond

Beispiel 3.11.

Wir betrachten wieder die Bogenlängenparametrisierung der Helix,

$$\gamma(t) = \left(r \cos \left(\frac{t}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right), r \sin \left(\frac{t}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right), \frac{ct}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right).$$

- Die Krümmung der Kurve beträgt konstant $\kappa(t) = \|\theta'(t)\| = \frac{r}{r^2+c^2}$. Im Fall $c = 0$ ist Γ ein Kreis mit $\kappa(s) = \frac{1}{r}$. Man nennt $\varrho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ den **Krümmungsradius** von Γ bei t ; dieser entspricht dem Radius desjenigen Kreises in der **t-n**-Ebene, der Γ in $\gamma(t)$ mit zweiter Ordnung berührt.
- Der Normalenvektor zeigt nach innen, d.h. auf die z -Achse:

$$\mathbf{n}(t) = \left(-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), -\sin\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), 0 \right).$$

- Für den Binormalenvektor erhalten wir

$$\mathbf{b}(t) = \left(\frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} \right);$$

bei $c = 0$ gilt $\mathbf{b}(s) = (0, 0, \varrho)$. Die Torsion von Γ ist entsprechend $\tau(t) = \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}$; im Falle $c = 0$ ist auch $\tau = 0$, da der Verlauf der Kurve nicht die **t-n**-Ebene verlässt. \diamond

3.3. Parametrisierung von Flächen

Definition 3.12.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $n > m$ und $\Psi \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\text{rang}(d\Psi(x)) = m$ für alle $x \in U$. Dann heißt Ψ **Parameterdarstellung** einer m -dimensionalen \mathcal{C}^k -**Fläche** in \mathbb{R}^n .

Beispiel 3.13.

- Eine Kurvenparametrisierung ist Parameterdarstellung einer ein-dimensionalen Fläche im \mathbb{R}^n .
- Sei $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$, dann ist $\Psi \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^{m+n})$ mit $\Psi(x) = (x, f(x))$ Parameterdarstellung des m -dimensionalen Graphen von f , denn es gilt $\text{rang}(d\Psi(x)) = \text{rang}(\text{Id}(m), df(x))^T = m$.
- Sei $\Psi \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ eine m -dimensionale Flächenparametrisierung. Dann ist für jedes $x \in U$ die Abbildung $\tan_x(\xi) = \Psi(x) + d\Psi(x, \xi)$ eine m -dimensionale $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ -Parametrisierung der Tangentialebene an $\Psi(x)$. \diamond

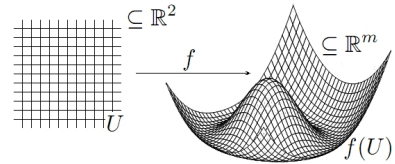


Fig. 8: Der Graph einer glatten Funktion definiert eine Fläche.

Definition 3.14.

Für zwei Parameterdarstellungen von m -Flächen $\Psi \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\Psi} \in \mathcal{C}^k(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$ schreiben wir $\Psi \sim \tilde{\Psi}$, wenn ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ existiert mit $\det(d\Phi(x)) > 0$ für alle $x \in \tilde{U}$ und $\tilde{\Psi} = \Psi \circ \Phi$. Φ heißt dann ein \mathcal{C}^k -**Parameterwechsel** und die zu Ψ gehörige Äquivalenzklasse $[\Psi]$ eine \mathcal{C}^k -**Fläche** der Dimension m .

Beispiel 3.15. (Stereographische Projektion)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{1+u^2+v^2} (2u, 2v, 1-u^2-v^2)^T,$$

dann ist $\Psi(\mathbb{R}^2)$ die *Kugeloberfläche ohne Südpol*. $(0, 0, 1)^T = \Psi(0, 0)$ repräsentiert den *Nordpol*, für den *Südpol* gilt $(0, 0, -1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n, n)$. Dass Ψ tatsächlich eine zweidimensionale Fläche parametrisiert, folgt aus

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{rang}(d\Psi(u, v)) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \\ -2u & -2v \end{pmatrix} = 2.$$

$\Psi(\mathbb{R}^2)$ lässt sich als Vereinigung von Graphen darstellen: Definiere etwa

$$\tilde{\Psi}(u, v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})^T$$

für $\|(u, v)\| < 1$, dann lässt sich Ψ mit der Parametertransformation $\Phi(u, v) = \frac{2}{1+u^2+v^2} (u, v)$ schreiben als Verkettung $\Psi(u, v) = \tilde{\Psi} \circ \Phi(u, v)$. \diamond

Satz 3.16. (Jede Fläche ist lokal ein Graph)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\Psi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Parameterdarstellung einer m -Fläche und $x_0 \in U$ mit

$$\text{rang } d\Psi_{(1)}(x_0) = \text{rang} \begin{pmatrix} \partial_1 \Psi_1(x_0) & \cdots & \partial_m \Psi_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \Psi_m(x_0) & \cdots & \partial_m \Psi_m(x_0) \end{pmatrix} = m.$$

Dann existieren eine Umgebung $W \subseteq U$ von x_0 , eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Parametrisierung $\tilde{\Psi} \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$, so dass $\Psi|_W \sim \tilde{\Psi}$ und $\tilde{\Psi}_i(x) = x_i$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Beweis.

Definiere $\bar{\Psi} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ durch $\bar{\Psi}(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_m(x))^T$, dann gilt $\det(d\bar{\Psi}(x_0)) \neq 0$. Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit existiert dann eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von x_0 , so dass $V = \bar{\Psi}(W)$ offen ist, $\bar{\Psi}|_W$ injektiv ist und $\bar{\Psi}|_W^{-1}$ stetig differenzierbar. Somit ist $\Phi = \bar{\Psi}|_W^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, W)$ ein Diffeomorphismus, d.h. für $\tilde{\Psi} = \Psi \circ \Phi$ gelten $\tilde{\Psi} \sim \Psi|_W$ sowie $\tilde{\Psi}_i(x) = x_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. \square

Beispiel 3.17. (Parametrisierung des Torus)

Ein **Torus** entsteht, indem man um jeden Punkt eines Kreises vom Radius R einen Vektor der Länge r rotieren lässt.

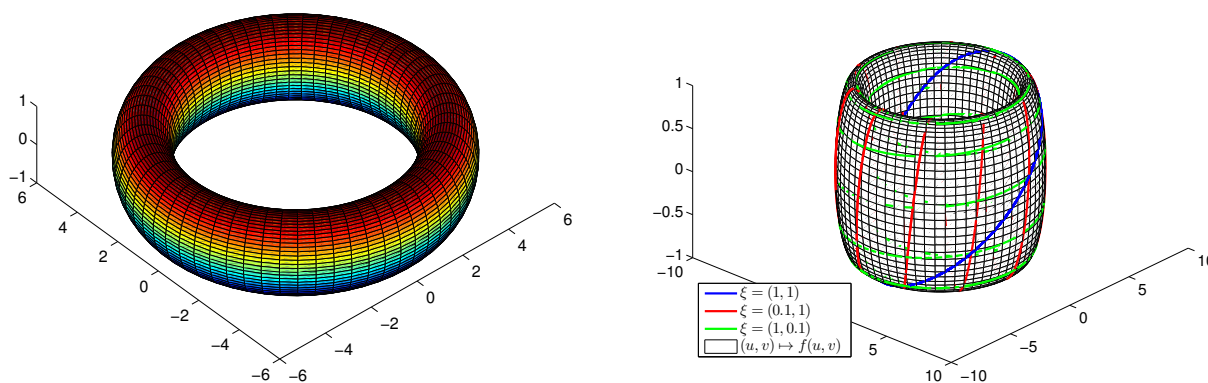


Fig. 9: Die durch f parametrisierte Oberfläche eines Torus (links) und drei den Torus umlaufende Kurven (rechts).

1. Der äußere Kreisring lässt sich in Polarkoordinaten parametrisieren durch

$$u \mapsto R(\cos(u), \sin(u), 0),$$

wobei $u \in [0, 2\pi]$ den Umlaufwinkel bezeichnet. Der zu u gehörige innere Kreis liegt dann in der durch die Vektoren $w_1 = (\cos(u), \sin(u), 0)$ und $w_2(0, 0, 1)$ aufgespannten Ebene und wird dargestellt durch

$$v \mapsto r \cos(v)w_1 + r \sin(v)w_2,$$

d.h. eine Parametrisierung $f : [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Torus ist gegeben durch

$$f(u, v) = R(\cos(u), \sin(u), 0) + r \cos(v)w_1 + r \sin(v)w_2 = \begin{pmatrix} (R + r \cos(v)) \cos(u) \\ (R + r \cos(v)) \sin(u) \\ r \sin(v) \end{pmatrix}.$$

2. Zu beliebigem $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $(u_0, v_0) \in [0, 2\pi]^2$ definiert $t \mapsto f(u_0 + t\xi_1, v_0 + t\xi_2)$ eine Kurve auf der Oberfläche des Torus. $\|\xi\|$ bestimmt, wie *schnell* sich die Kurve um den Torus wickelt; je größer die Norm, desto schneller wird der Torus umlaufen. Ist $\xi_1 \gg \xi_2$, dann verläuft die Kurve *quer*, d.h. parallel zu den *Breitengraden*; im Fall $\xi_1 \ll \xi_2$ dagegen *längs*, parallel zu den *Längengraden*.

3. Sei $(u_0, v_0) \in [0, 2\pi]^2$. Eine Darstellung der Tangentialebene am Punkt $f(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ erhalten wir, indem wir den Gradienten von f in (u_0, v_0) bestimmen,

$$\nabla f(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos(v))(-\sin(u)) & -2 \sin(v) \cos(u) \\ (R + r \cos(v))(\cos(u)) & -r \sin(v) \sin(u) \\ 0 & r \cos(v) \end{pmatrix},$$

und dann die bekannte Parametrisierungsformel anwenden:

$$g(u, v) = \nabla f(u_0, v_0) \cdot (u; v) + f(u_0, v_0).$$

4. Der Torus lässt sich auch implizit beschreiben als Nullstellenmenge von

$$\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Explizites Auflösen nach z ergibt die Darstellung als Graph in kartesischen Koordinaten:

$$z(x, y) = \pm \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}. \quad \diamond$$

3.4. Wegintegrale und 1-Formen

Beispiel 3.18.

1. Gegeben seien ein Kraftvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und ein Richtungsvektor $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n$. Dann definiert $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = \vec{v}$ ein Kraftfeld und $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = t\vec{\gamma}$ einen Weg Γ im \mathbb{R}^n . Wir bestimmen die Energie, die benötigt wird, um einen Massepunkt entlang des Weges durch das Kraftfeld zu bewegen, gemäß der Formel *Arbeit = Kraft \times Weg*:

$$W = \langle \vec{v}, \vec{\gamma} \rangle = \int_0^1 \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{\Gamma} \langle f(x), dx \rangle.$$

2. Seien allgemein $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein stetiges **Vektorfeld** und $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ die Parametrisierung eines glatten Weges $\Gamma = [\gamma]$ im \mathbb{R}^n . Dann gilt für die Energie W nach dem Mittelwertsatz für geeignete Stützstellen $\theta_i \in [a, b]$:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\gamma(t_i))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\gamma(t_i))\dot{\gamma}(\theta_i)\Delta t \approx \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{\Gamma} \langle f(x), dx \rangle,$$

wobei $\{t_1, \dots, t_n\}$ eine \mathbb{C} äquidistant gewählte Zerlegung von $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ der Schrittweite Δt darstellt.

3. Die benötigte Energie hängt nicht von der Geschwindigkeit ab, mit der das Vektorfeld durchlaufen wird: Sei $\varphi \in C^1([\bar{a}, \bar{b}], [a, b])$ ein Parameterwechsel mit $\dot{\varphi} > 0$, dann gilt für die Wegparametrisierung $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$:

$$W = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \langle f(\gamma(\varphi(t))), \dot{\varphi}(t)\dot{\gamma}(\varphi(t)) \rangle dt = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \langle f(\tilde{\gamma}(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \rangle dt = \tilde{W}.$$

4. Das Vektorfeld f erzeugt eine Abbildung $\omega: \text{Bild}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ via $\omega(x)\xi = \langle f(x), \xi \rangle$. Wir können ω wie üblich auch auffassen als eine Abbildung $\tilde{\omega}: \text{Bild}(\Gamma) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\omega}(x, \xi) = \omega(x)\xi$. Allgemein nennen wir eine stetige Abbildung $\omega: \text{Bild}(\Gamma) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die linear im zweiten Argument ist, eine **1-Form**. \diamond

Definition 3.19.

Seien $\Gamma = [\gamma]$ eine C^1 -Kurve im \mathbb{R}^n und ω eine 1-Form. Wir definieren das **Wegintegral** von ω längs Γ :

$$\int_{\Gamma} \omega(x) dx = \int_{\Gamma} \omega(x, dx) = \int_a^b \omega(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Bemerkung 3.20.

1. Wie bei der Integration von Vektorfeldern längs von Kurven ist auch das Wegintegral einer 1-Form unabhängig von der Wahl der Kurvenparametrisierung.
2. Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve im \mathbb{R}^n . Wir nennen $A(\Gamma) = \gamma(a)$ den **Anfangspunkt** und $B(\Gamma) = \gamma(b)$ den **Endpunkt** von Γ . Auch diese beiden Größen sind parametrisierungsunabhängig, denn für eine Umparometrisierung $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ gelten $(\gamma \circ \varphi)(\tilde{a}) = \gamma(a)$ und $(\gamma \circ \varphi)(\tilde{b}) = \gamma(b)$. Im Fall $A(\Gamma) = B(\Gamma)$ nennen wir die Kurve Γ **geschlossen**.
3. $\text{Bild}(\Gamma) = \gamma([a, b])$ ist ebenfalls parametrisierungsunabhängig
4. Seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ durch $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ parametrisierte \mathcal{C}^k -Kurven mit $B(\Gamma_i) = A(\Gamma_{i+1})$ für $i = 1, \dots, N-1$. Dann heißt $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ eine **stückweise** \mathcal{C}^k -Kurve mit Anfangspunkt $A(\Gamma) = \gamma_1(a_1)$, Endpunkt $B(\Gamma) = \gamma_N(b_N)$ und $\text{Bild}(\Gamma) = \text{Bild}(\Gamma_1) \cup \dots \cup \text{Bild}(\Gamma_N)$. Im Fall $A(\Gamma) = B(\Gamma)$ nennen wir eine stückweise Kurve Γ geschlossen.
5. Schließlich definieren wir das Wegintegral einer 1-Form über eine stückweise Kurve $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N)$ via

$$\int_{\Gamma} \omega(x) dx = \int_{\Gamma_1} \omega(x) dx + \dots + \int_{\Gamma_N} \omega(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \omega(x) dx \quad \diamond$$

Satz 3.21. (Hauptsatz für Kurvenintegrale)

Seien Γ eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve, $\omega \in \mathcal{C}^0(\text{Bild}(\Gamma), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ eine 1-Form, U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $\text{Bild}(\Gamma) \subseteq U$ und $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, so dass $\omega = df$ gilt, d.h. $\omega(x, \xi) = \langle f'(x), \xi \rangle$ für alle $x \in \text{Bild}(\Gamma)$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \omega(x) dx = f(B(\Gamma)) - f(A(\Gamma)).$$

Speziell beträgt das Wegintegral einer solchen 1-Form über einer geschlossenen Kurve stets 0.

Beweis.

Sei $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N)$ parametrisiert durch $([\gamma_1], \dots, [\gamma_N])$. Dann gilt mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung im \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega(x) dA(x) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} df(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \langle df(\gamma_i(t)), \dot{\gamma}_i(t) \rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{d}{dt} (f \circ \gamma_i)(t) dt = \sum_{i=1}^N (f \circ \gamma_i)(b_i) - (f \circ \gamma_i)(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^N f(B(\Gamma_i)) - f(A(\Gamma_i)) = f(B(\Gamma)) - f(A(\Gamma)). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 3.22.

Seien Γ eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve, $\omega \in \mathcal{C}^0(\text{Bild}(\Gamma), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ eine 1-Form, U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $\text{Bild}(\Gamma) \subseteq U$ und $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, so dass $\omega = df$ gilt. Dann heißt ω **exakt** und f nennen wir eine **Stammfunktion** von ω .

Bemerkung 3.23.

Nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale hängt das Wegintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht aber vom Verlauf des Weges.

Wir formulieren im nächsten Kapitel notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass eine 1-Form exakt ist. \diamond

3.5. Exaktheitskriterien für 1-Formen

Satz 3.24. (Hinreichende Exaktheitsbedingung)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zu je zwei Punkten $x, y \in U$ existiere eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve $\Gamma(x, y)$ mit Anfangspunkt x und Endpunkt y sowie $\text{Bild}(\Gamma) \subseteq U$. Weiter sei $\omega \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ eine 1-Form, deren Wegintegral über jede geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve Γ mit $\text{Bild}(\Gamma) \subseteq U$ verschwindet. Dann ist ω exakt.

Beweis.

Sei $x_0 \in U$ ein beliebiger, fest gewählter Punkt. Wir definieren eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega(x) dx. \quad (*)$$

1. f ist wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Verlauf von $\Gamma(x_0, x)$: Sei $\tilde{\Gamma}(x_0, x)$ eine weitere Kurve von x_0 nach x in U . Ist $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Parametrisierung von $\tilde{\Gamma}$, dann wird durch $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(a + b - t)$ eine Kurve $\hat{\Gamma}(x, x_0)$ definiert, die das gleiche Bild wie $\tilde{\Gamma}(x_0, x)$ besitzt, aber in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Damit gilt

$$\int_{\hat{\Gamma}(x, x_0)} \omega(x) dx = \int_a^b \omega(\hat{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t)) dt = \int_b^a \omega(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)) dt = - \int_{\tilde{\Gamma}(x_0, x)} \omega(x) dx.$$

Weiterhin ist die Kurve $\Gamma(x_0, x_0) = (\Gamma(x_0, x), \hat{\Gamma}(x, x_0))$ geschlossen und wir erhalten

$$0 = \int_{\Gamma(x_0, x_0)} \omega(x) dx = \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega(x) dx + \int_{\hat{\Gamma}(x, x_0)} \omega(x) dx = \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega(x) dx - \int_{\tilde{\Gamma}(x_0, x)} \omega(x) dx \implies \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega(x) dx = \int_{\tilde{\Gamma}(x_0, x)} \omega(x) dx.$$

2. f ist stetig differenzierbar und eine Stammfunktion von ω : Seien $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke zwischen x und $x + h$ ganz in U liegt, und $r(x, h) = f(x + h) - f(x) - \omega(x, h)$. Dann ist $r(x, 0) = 0$ und wir müssen nur noch zeigen, dass die Restfunktion $r(x, \cdot)$ in 0 stetig ist. Da ω stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} r(x, h) &= \int_{\Gamma(x_0, x+h)} \omega(x) dx - \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega(x) dx - \omega(x, h) \\ &= \int_{\Gamma(x_0, x+h)} \omega(x) dx - \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega(x) dx - \int_{\Gamma(x, x+h)} \omega(x) dx + \int_{\Gamma(x, x+h)} \omega(x) dx - \omega(x, h) \\ &= \int_{\Gamma(x_0, x_0)} \omega(x) dx + \int_0^1 \omega(x + th, h) dt - \int_0^1 \omega(x, h) dt \\ &= \|h\| \int_0^1 \omega\left(x + th, \frac{h}{\|h\|}\right) - \omega\left(x, \frac{h}{\|h\|}\right) dt \\ &\stackrel{|\cdot|}{\leq} \|h\| \int_0^1 \left| \omega\left(x + th, \frac{h}{\|h\|}\right) - \omega\left(x, \frac{h}{\|h\|}\right) \right| dt \\ &\leq \|h\| \int_0^1 \|\omega(x + th, \cdot) - \omega(x, \cdot)\| \left\| \frac{h}{\|h\|} \right\| dt \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 3.25.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wie oben, $x_0 \in U$ und ω eine stetige 1-Form mit verschwindendem Wegintegral über alle geschlossenen stückweise \mathcal{C}^1 -Kurven. Dann definiert $(*)$ eine Stammfunktion $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ von ω . \diamond

Beispiel 3.26.

Sei $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ gegeben durch

$$\omega(x, h) = \frac{1}{\|x\|^2}(-h_1x_2 + h_2x_1) = \frac{1}{\|x\|^2} \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir parametrisieren den Einheitskreis Γ durch $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$. Dann ist Γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\|\gamma(t)\| = 1$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Allerdings ist

$$\int_{\Gamma} \omega(x) dx = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_0^{2\pi} \frac{-\dot{\gamma}_1(t)\gamma_2(t) + \dot{\gamma}_2(t)\gamma_1(t)}{\|\gamma(t)\|} dt = 2\pi,$$

d.h. die 1-Form ist nicht exakt. ◇

Satz 3.27. (Notwendige Exaktheitsbedingung)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\omega \in \mathcal{C}^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ eine exakte 1-Form. Dann gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \omega(x, e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \omega(x, e_j).$$

Beweis.

Sei f eine Stammfunktion von ω , dann ist $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ und mit dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \omega(x, e_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle df(x), e_i \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle df(x), e_j \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \omega(x, e_j) \quad \square$$

Beispiel 3.28.

Dass obiges Exaktheitskriterium im Allgemeinen nicht hinreichend ist, demonstriert das zuletzt diskutierte Beispiel: Für die 1-Form $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ mit $\omega(x, h) = \frac{1}{\|x\|^2}(-h_1x_2 + h_2x_1)$ gilt zwar

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \omega(x, e_1) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{-x_2}{\|x\|^2} = -\frac{1}{\|x\|^2} + \frac{2x_2^2}{\|x\|^4} = \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2x_1^2}{\|x\|^4} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1}{\|x\|^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \omega(x, e_2),$$

aber die 1-Form ist dennoch nicht exakt. ◇

Satz 3.29. (Lemma von Poincaré)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und **sternförmig**, d.h. es existiere ein ausgezeichnete Punkt $x_0 \in U$, so dass zu jedem $x \in U$ die Strecke zwischen x und x_0 ganz in U liegt, und erfülle die 1-Form $\omega \in \mathcal{C}^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ die Bedingung $\partial_i \omega(x, e_j) = \partial_j \omega(x, e_i)$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Dann ist ω exakt.

Beweis.

Zu $x \in U$ bezeichne $\Gamma(x_0, x)$ die Strecke zwischen x_0 und x . Dann gilt für die in (\star) definierte potenzielle Stammfunktion f :

$$f(x) = \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega(x) dx = \int_0^1 \omega(x_0 + t(x - x_0), x - x_0) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega(x_0 + t(x - x_0), e_i)(x_i - x_{0i}) dt.$$

Wir zeigen, dass für alle $j = 1, \dots, n$ gilt $\partial_j f(x) = \omega(x, e_j)$, dann folgt

$$\langle df(x), h \rangle = h_1 \partial_1 f(x) + \dots + h_n \partial_n f(x) = h_1 \omega(x, e_1) + \dots + h_n \omega(x, e_n) = \omega(x, h),$$

d.h. ω ist exakt mit Stammfunktion f .

Nach dem Satz über parameterabhängige Integrale gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n \omega(x_0 + t(x - x_0), e_i)(x_i - x_{0i}) dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n t \frac{\partial}{\partial x_j} \omega(x_0 + t(x - x_0), e_i)(x_i - x_{0i}) dt + \int_0^1 \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j) dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n t \partial_i \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j)(x_i - x_{0i}) dt + \int_0^1 \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j) dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n t \frac{d}{dt} \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j) dt + \int_0^1 \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j) dt \\
 &= t \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j) \Big|_0^1 - \int_0^1 \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j) dt + \int_0^1 \omega(x_0 + t(x - x_0), e_j) dt \\
 &= \omega(x, e_j). \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 3.30. (Parameterabhängige Integrale)

Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^0([a, b] \times U, \mathbb{R})$. Dann gilt auch $F \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ für die Funktion

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

Sind U offen und f stetig differenzierbar bzgl. x , dann gilt $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_a^b f(t, x) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(t, x) dt.$$

Beweis.

1. Seien $x \in U$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$ mit $\lim x_n = x$. Wir definieren die Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ via $\varphi_n(t) = f(t, x_n)$. Dann konvergiert $(\varphi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ wegen der Stetigkeit von f gegen $\varphi(t) = f(t, x)$, d.h. $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $\varphi \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Weiterhin ist die Menge $K = [a, b] \times (\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\})$ kompakt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, also ist f gleichmäßig stetig auf K . Damit konvergiert $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen φ und der Satz über die Vertauschung von Limes und Integral liefert

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t, x_n) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt \\
 &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b f(t, x) dx = F(x).
 \end{aligned}$$

2. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$, dann existiert nach dem Mittelwertsatz eine Zwischenstelle θ_i mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i} F(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(t, x + h e_i) dt - \int_a^b f(t, x) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{1}{h} (f(t, x + h e_i) - f(t, x)) dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x + \theta_i h e_i) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt. \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.31.

Sei $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein differenzierbares Vektorfeld im \mathbb{R}^3 . Wir definieren die **Rotation** von F via

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}.$$

Sei F **rotationsfrei**, d.h. es gelte $\nabla F(x) = 0$ für alle x . Dann gilt für die von F induzierte 1-Form $\omega \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}))$ mit $\omega(x, h) = \langle F(x), h \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \omega(x, e_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle F(x), e_j \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle F(x), e_i \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \omega(x, e_i).$$

Also ist ω exakt. Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von ω , dann gilt $F = \nabla f$. ◇

4. Mehrdimensionale Integration

4.1. Das Riemann-Integral

Bemerkung 4.1.

1. Im Eindimensionalen haben wir das Integral als Maß für die Fläche zwischen dem Graph einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der x -Achse eingeführt.

Wir haben dafür eine hinreichend feine Zerlegung $x_0 < \dots < x_n$ des Intervalls $[a, b]$ mit $x_0 = a$ und $x_n = b$ eingeführt, \mathbb{E} eine äquidistante Zerlegung $x_i = a + i\Delta x$ mit $\Delta x = \frac{1}{n}(b - a)$ und $i = 0, \dots, n$, und für gewisse Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ das Integral approximiert durch

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Höhe}} \underbrace{\Delta x}_{\text{Breite}}.$$

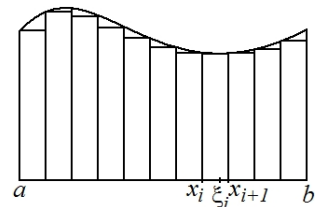


Fig. 10: Approximation des Integrals von f durch die Unter- und Obersumme der Rechteckflächen unter dem Graphen.

Natürlich macht der Integralwert dabei nur Sinn, wenn der Grenzwert der Summe für $\Delta x \rightarrow 0$ existiert und unabhängig von der Wahl der Zerlegung $\{x_i \mid i = 0, \dots, n\}$ sowie der Wahl der Stützstellen ξ_i ist.

2. Übertragung auf den mehrdimensionalen Fall: Seien $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

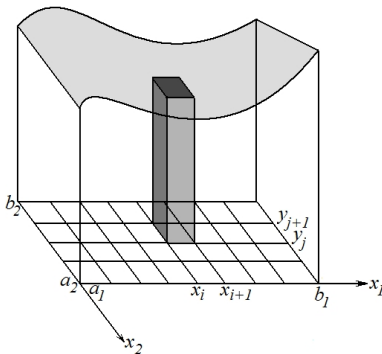


Fig. 11: Das Volumen zwischen der x - y -Ebene und dem Graphen von f .

Wir zerlegen $[a_1, b_1]$ via $x_i = a_1 + i\Delta x$ für $\Delta x = \frac{1}{n}(b_1 - a_1)$ und $i = 0, \dots, n$ und unabhängig davon $[a_2, b_2]$ via $y_j = a_2 + j\Delta y$ mit $\Delta y = \frac{1}{m}(b_2 - a_2)$ und $j = 1, \dots, m$. Wählen wir Stützstellen $\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, können wir das Integral von f über $[a, b]$ definieren als

$$\int_{[a,b]} f(x, y) d(x, y) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{f(\xi_{ij})}_{\text{Höhe}} \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\text{Grundfläche}}$$

In höheren Raumdimensionen $[a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$ wählen wir analog Zerlegungen $x_{i,j(i)} = a_i + j(i)\Delta x_i$ der 1D-Intervalle $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, N$ und $j(i) = 1, \dots, n(i)$ sowie Stützstellen $\xi_{i,j(i)} \in [x_{i,j(i)-1}, x_{i,j(i)}]$ und Schrittweiten $\Delta x_i = \frac{1}{n(i)}(b_i - a_i)$. Wir setzen

$$\int_{[a,b]} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N \approx \sum_{j(1)=1}^{n(1)} \cdots \sum_{j(N)=1}^{n(N)} f(\xi_{1,j(1)}, \dots, \xi_{N,j(N)}) \Delta x_1 \cdots \Delta x_N.$$

3. Der Integrand f wird auch als **Dichte** bezeichnet. Ist f etwa die **Wahrscheinlichkeitsdichte** einer n -dimensionalen Zufallsvariablen, dann liefert

$$\int_{[a,b]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable ein Ergebnis in $[a, b]$ liefert. ◇

Definition 4.2.

Seien $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N] \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $Z_i = \{x_{i0}, \dots, x_{i, n(i)}\} \in \mathcal{Z}([a_i, b_i])$ ($i = 1, \dots, N$) Zerlegungen der 1D-Intervalle $[a_i, b_i]$ und Z die durch Z_1, \dots, Z_N erzeugte Zerlegung von $[a, b]$. Dann bilden die **Teilrechtecke** $R = [x_{1, j(1)-1}, x_{1, j(1)}] \times \cdots \times [x_{N, j(N)-1}, x_{N, j(N)}]$ eine Menge, die wir mit $T(Z)$ bezeichnen. $R \in T(Z)$ hat dann das **Volumen**

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^N (x_{i, j(i)} - x_{i, j(i)-1})$$

Mit $\mathcal{Z}([a, b])$ bezeichnen wir die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$. Wie in 1D definieren wir zu einer Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$ die **Obersumme** $F^*(f, Z)$ und die **Untersumme** $F_*(f, Z)$ sowie das **Oberintegral** $F^*(f)$ und das **Unterintegral** $F_*(f)$ von f via

$$F^*(f, Z) = \sum_{R \in T(Z)} \sup_{x \in R} f(x) \text{vol}(R), \quad F_*(f, Z) = \sum_{R \in T(Z)} \inf_{x \in R} f(x) \text{vol}(R),$$

$$F^*(f) = \inf_{Z \in \mathcal{Z}([a, b])} F^*(f, Z), \quad F_*(f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}([a, b])} F_*(f, Z).$$

Nehmen das Oberintegral $F^*(f)$ und das Unterintegral $F_*(f)$ von f einen gemeinsamen Wert $F(f)$ an, so nennen wir f **Riemann-integrierbar** und definieren das **Riemann-Integral** von f als

$$\int_{[a, b]} f(x) dx = \int_{[a, b]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = F(f).$$

Bemerkung 4.3.

Sei $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein **Quader**. Wie im Eindimensionalen zeigt man die folgenden elementaren Eigenschaften des Riemann-Integrals:

1. Das Riemann-Integral ist **linear**, d.h. für alle Riemann-integrierbaren Funktionen $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar mit

$$\int_Q (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_Q f(x) dx + \beta \int_Q g(x) dx.$$

2. Das Riemann-Integral ist **monoton**, d.h. für alle Riemann-integrierbaren Funktionen $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$ auf Q gilt

$$\int_Q f(x) dx \leq \int_Q g(x) dx$$

3. Speziell ist mit $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ auch $|f|$ Riemann-integrierbar und es gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| dx$$

4. Alle stetigen Funktionen $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar.
5. Wir haben Integrierbarkeit bisher nur auf Quadern definiert. Wir wollen Funktionen nun über allgemeineren Mengen integrieren. Seien dazu Q ein Quader, $A \subseteq Q$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann setzen wir f zu einer Abbildung $Q \rightarrow \mathbb{R}$ fort durch die Wahl $f(x) = 0$ für alle $x \in Q \setminus A$. Die Fortsetzung ist dann allerdings im Allgemeinen nicht stetig. f ist aber **fast überall** stetig, genauer überall außer auf dem Rand ∂A von A .
6. Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $N \subseteq Q$. Dann heißt N **unwesentlich**, falls zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Quader Q_1, \dots, Q_m existieren mit $N \subseteq \bigcup \{Q_i \mid i = 1, \dots, m\}$ und $\sum \{\text{vol}(Q_i) \mid i = 1, \dots, m\} < \epsilon$.
7. Seien $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $N = \{x \in Q \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$ unwesentlich. Dann nennen wir f **fast überall stetig**. \diamond

Definition 4.4.

Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall stetig und $A \subseteq Q$ mit unwesentlichem Rand ∂A . Wir nennen $\chi_A : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ sonst die zu A gehörige **charakteristische Funktion** und definieren das Riemann-Integral von f über A als

$$\int_A f(x) \, dx = \int_Q \chi_A(x) f(x) \, dx.$$

Weiter definieren wir das **Volumen** von A durch

$$\text{vol}(A) = \int_A 1 \, dx = \int_Q \chi_A(x) \, dx.$$

Bemerkung 4.5.

1. Vereinigung, Schnitt und Differenz unwesentlicher Mengen sind unwesentlich.
2. Der Abschluss einer unwesentlichen Menge ist unwesentlich.
3. Teilmengen unwesentlicher Mengen sind unwesentlich. ◇

4.2. Der Reduktionssatz**Satz 4.6. (Reduktionssatz)**

Seien $Q_x \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Q_y \subseteq \mathbb{R}^q$ Quader, $Q = Q_x \times Q_y \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n = p + q$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall stetig. Dann ist $f_y : Q_x \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_y(x) = f(x, y)$ für fast alle $y \in Q_y$ integrierbar. Weiter gilt:

$$F : Q_y \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(y) = \int_{Q_x} f_y(x) \, dx$$

ist fast überall stetig und es gilt die Rekursionsformel

$$\int_Q f(x, y) \, d(x, y) = \int_{Q_y} F(y) \, dy = \int_{Q_y} \int_{Q_x} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Beweis.

Wir zeigen die Behauptung zunächst für eine charakteristische Funktion auf einem Teilquader von Q und approximieren dann fast überall stetige Funktionen durch eine Folge solcher charakteristischer Funktionen.

1. ☐ gelten $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$. Sei f zunächst eine charakteristische Funktion auf einem Teilquader $[a_x, b_x] \times [a_y, b_y] \subseteq Q_x \times Q_y$. Dann gilt $f_y = \chi_{[a_x, b_x]}$ für alle $y \in [a_y, b_y]$ und $f_y = 0$ sonst. Weiter ist

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{Q_x} f_y(x) \, dx = \chi_{[a_y, b_y]}(y) \int_{Q_x} \chi_{[a_x, b_x]}(x) \, dx \\ &= \chi_{[a_y, b_y]}(y) \int_{a_x}^{b_x} 1 \, dx = (b_x - a_x) \chi_{[a_y, b_y]}(y) \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{Q_y} F(y) \, dy &= (b_x - a_x) \int_{Q_y} \chi_{[a_x, b_x]}(x) \, dy = (b_x - a_x) \int_{a_y}^{b_y} 1 \, dy \\ &= (b_x - a_x)(b_y - a_y) = \int_Q f(x, y) \, d(x, y). \end{aligned}$$

2. Sei f eine **Treppenfunktion**, d.h. es gibt Zerlegungen $Z_x = \{x_0, \dots, x_{N(x)}\} \in \mathcal{Z}(Q_x)$ des Quaders Q_x und $Z_y = \{y_0, \dots, y_{N(y)}\} \in \mathcal{Z}(Q_y)$ des Quaders Q_y und Stufenhöhen $c_{ij} \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N(x)} \sum_{j=1}^{N(y)} c_{ij} \chi_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]}(x, y) = \sum_{i=1}^{N(x)} \sum_{j=1}^{N(y)} c_{ij} \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \cdot \chi_{[y_{j-1}, y_j]}(y).$$

Dann gilt mit der Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y) d(x, y) &= \sum_{i=1}^{N(x)} \sum_{j=1}^{N(y)} c_{ij} \int_Q \chi_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]}(x, y) d(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{N(x)} \sum_{j=1}^{N(y)} c_{ij} \int_{Q_y} \chi_{[y_{j-1}, y_j]}(y) \int_{Q_x} \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x) dx dy = \int_{Q_y} \int_{Q_x} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

3. Sei nun f fast überall stetig auf Q . Dann existiert eine Folge von Treppenfunktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y) d(x, y) &= \int_Q \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q f_n(x, y) d(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_y} \int_{Q_x} f_n(x, y) dx dy = \int_{Q_y} \int_{Q_x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) dx dy = \int_{Q_y} \int_{Q_x} f(x, y) dx dy. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 4.7.

Wir berechnen das Integral der Funktion $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(x + y)$. Die Funktion ist stetig, also Riemann-integrierbar. Es gilt

$$F(y) = \int_{[0, \pi]} f_y(x, y) dx = \int_0^\pi \sin(x + y) dx = -\cos(x + y) \Big|_0^\pi = \cos(y) - \cos(y + \pi).$$

Damit erhalten wir für das gesuchte Integral:

$$\int_{[0, \pi]^2} \sin(x + y) d(x, y) = \int_{[0, \pi]} F(y) dy = \int_0^\pi (\cos(y) - \cos(y + \pi)) dy = \sin(y) - \sin(y + \pi) \Big|_0^\pi = 0. \quad \diamond$$

Beispiel 4.8. (Volumen der 3D-Einheitskugel)

Wir berechnen das Volumen der Kugel $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2^2 \leq 1\}$. $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2^2 = 1\}$ ist unwesentlich, weiter gilt $A \subseteq Q = [-1, 1]^3$ und mit $f = \chi_A$:

$$\text{vol}(A) = \int_A 1 dx = \int_Q \chi_A(x) dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

1. Wir zerlegen Q in $Q_1 \times Q_{2,3}$ mit $Q_1 = [-1, 1]$ und $Q_{2,3} = [-1, 1]^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_{2,3}(x_1) &= \chi_A(x_1, x_2, x_3) = \chi_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \chi_{[0, 1-x_2^2-x_3^2]}(x_1^2) \\ &= \chi_{[0,1]}(x_2^2 + x_3^2) \chi_{[-\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}, \sqrt{1-x_2^2-x_3^2}]}(x_1) \end{aligned}$$

und der Reduktionssatz liefert

$$F_1(x_2, x_3) = \int_{Q_1} f_{2,3}(x_1) dx_1 = \chi_{[0,1]}(x_2^2 + x_3^2) \cdot \int_{-\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}}^{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} 1 dx_1 = \chi_{[0,1]}(x_2^2 + x_3^2) \cdot 2\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}.$$

Also ist

$$\text{vol}(A) = \int_{Q_{2,3}} F_1(x_2, x_3) \, d(x_2, x_3) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \chi_{[0,1]}(x_2^2 + x_3^2) \cdot 2\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2} \, dx_2 \, dx_3.$$

2. Wir zerlegen $Q_{2,3}$ in $Q_2 \times Q_3$ mit $Q_2 = [-1, 1]$ und $Q_3 = [-1, 1]$, dann ist

$$f_3(x_2) = 2\chi_{[0,1]}(x_2^2 + x_3^2)\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2} = 2\chi_{[-\sqrt{1-x_3^2}, \sqrt{1-x_3^2}]}(x_2)\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}.$$

Mit der Substitution $x_2 = \sqrt{1 - x_3^2} \sin(\varphi)$ ergibt sich $dx_2 = \sqrt{1 - x_3^2} \cos(\varphi) \, d\varphi$ für $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, also

$$\begin{aligned} F_2(x_3) &= \int_{Q_2} f_3(x_2) \, dx_2 = 2 \int_{-\sqrt{1-x_3^2}}^{\sqrt{1-x_3^2}} \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2} \, dx_2 = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)(1 - x_3^2)} \cos(\varphi) \, d\varphi \\ &= 2(1 - x_3^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi) \, d\varphi = (1 - x_3^2)\varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = (1 - x_3^2)\pi \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\text{vol}(A) = \int_{Q_3} F_2(x_3) \, dx_3 = \int_{-1}^1 \pi(1 - x_3^2) \, dx_3 = \pi \left(x_3 - \frac{1}{3}x_3^3 \Big|_{-1}^1 \right) = \pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi. \quad \diamond$$

4.3. Der Transformationssatz

Bemerkung 4.9.

1. Seien $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ und $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^1 -Diffeomorphismus, dann liefert die Substitutionsregel der eindimensionalen Integration:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(z) \varphi'(z) \, dz.$$

Wir wollen diese Technik im Folgenden auf höhere Raumdimensionen verallgemeinern.

2. Seien dazu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit unwesentlichem Rand ∂A , $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall stetig und $F|_{A^\circ}$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Wir zeigen:

$$\int_{F(A)} g(x) \, dx = \int_A (g \circ F)(z) |\det dF(z)| \, dz.$$

Speziell überträgt sich die formale Rechenregel $dx = \varphi'(z) \, dz$ für eindimensionale Differenziale in $dx = |\det dF(z)| \, dz$.

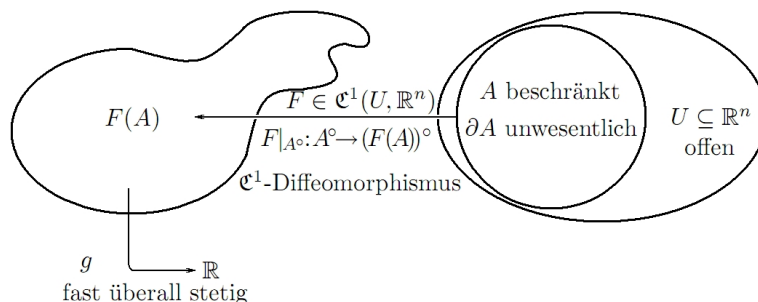


Fig. 12: Durch eine Koordinatentransformation mittels eines differenzierbaren Parameterwechsels lassen sich Integralberechnungen vereinfachen, indem etwa ein krummrandiges Gebiet auf einen Quader transformiert wird, vgl. etwa die Parametrisierungen der Kugel oder des Torus in geeigneten Winkelkoordinaten statt den üblichen kartesischen.

Bezeichne $G \in C^1(F(A^\circ), \mathbb{R}^n)$ die Umkehrabbildung F^{-1} von F , Z eine Zerlegung von $F(A)$ und $T(Z)$ die Menge der Teilquader der Zerlegung Z . Seien weiter $R \in T(Z)$ und $\xi_R \in R$ ein beliebiger Punkt im Quader $R \subseteq F(A)$. Dann gilt:

$$\text{vol}(G(R)) \approx \text{vol}(dG(\xi_R)R) = \text{vol}(R) |\det dG(\xi_R)| :$$

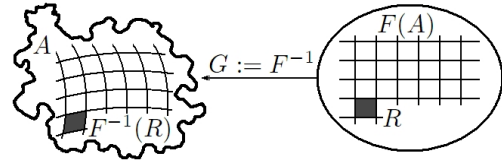
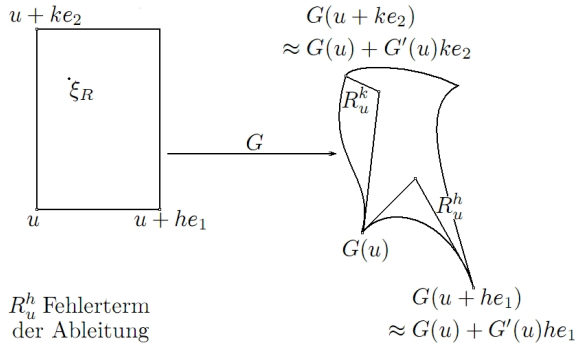


Fig. 13: Die Deformation eines Quaders in $F(A)$ durch die Transformation $G = F^{-1}$.



R_u^h Fehlerterm der Ableitung

Wir betrachten den Fall $n = 2$. Hier lässt sich das Rechteck R schreiben als

$$R = \{u + se_1 + te_2 \mid 0 \leq s \leq h \ \& \ 0 \leq t \leq k\}$$

für einen gewissen Fußpunkt $u \in F(A)$ und Seitenbreiten $h, k > 0$. Nach Taylorentwicklung gilt für einen Punkt $x = u + se_1 + te_2 \in R$:

$$\begin{aligned} G(x) &= G(u) + h dG(u)e_1 + k dG(u)e_2 \\ &= G(u) + \langle dG(u), (h, k) \rangle. \end{aligned}$$

Fig. 14: Die Approximation von $G(R)$ durch das von den Tangentialvektoren $\partial_1 G(u), \partial_2 G(u)$ am Basispunkt $G(u)$ aufgespannten Parallelogramms.

Da das Volumen invariant ist bezüglich Verschiebungen, gilt wegen der Stetigkeit von G für ξ_R nahe bei u und kleinen gewählten h, k :

$$\text{vol}(G(R)) \approx \text{vol}(dG(u)R) \approx \text{vol}(dG(\xi_R)R).$$

Da $dG(\xi_R)R$ als linear verformtes Rechteck ein Parallelogramm P mit Kantenvektoren

$$a = h dG(\xi_R)e_1 \quad \text{und} \quad b = k dG(\xi_R)e_2$$

ist, bleibt zu zeigen, dass sich das Volumen als Determinante der Spannvektoren berechnen lässt.

Die Kanten des Parallelogramms sind (nach Verschiebung zum Nullpunkt) $(0, 0)$, (a_1, a_2) , (b_1, b_2) und $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, also enthalten im Quader $Q = [0, a_1 + b_1] \times [0, a_2 + b_2]$. Damit gilt:

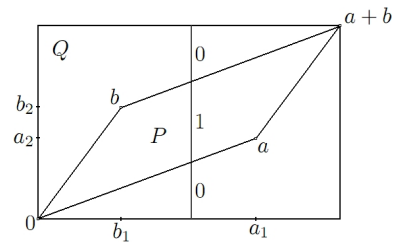


Fig. 15: Allgemein entspricht die Determinante einer Matrix A dem Volumen des von den Spalten von A aufgespannten Parallelepipeds. Da diese gerade die Bilder der Einheitsvektoren sind, ist die Determinante somit ein Maß für die Deformation des Einheitswürfels unter einer linearen Abbildung.

$$\begin{aligned} \text{vol}(P) &= \int_P 1 \, dz = \int_Q \chi_P(z) \, dz = \int_0^{a_1+b_1} \int_0^{a_2+b_2} \chi_P(x, y) \, d(x, y) \\ &= \int_0^{b_1} \int_0^{a_2+b_2} \chi_P(x, y) \, d(x, y) + \int_{b_1}^{a_1+b_1} \int_0^{a_2+b_2} \chi_P(x, y) \, d(x, y) + \int_{a_1}^{a_1+b_1} \int_0^{a_2+b_2} \chi_P(x, y) \, d(x, y) \\ &= \int_0^{b_1} \int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{\frac{b_2}{b_1}x} d(x, y) + \int_{b_1}^{a_1+b_1} \int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{b_2 + \frac{a_2}{a_1}(x-b_1)} d(x, y) + \int_{a_1}^{a_1+b_1} \int_{a_2 + \frac{b_2}{b_1}(x-a_1)}^{b_2 + \frac{a_2}{a_1}(x-b_1)} d(x, y) \\ &= \int_0^{b_1} \left(\frac{b_2}{b_1} - \frac{a_2}{a_1} \right) x \, dx + \int_{b_1}^{a_1+b_1} b_2 + \frac{a_2}{a_1} b_1 \, dx + \int_{a_1}^{a_1+b_1} b_2 - a_2 + \frac{b_2}{b_1} a_1 - \frac{a_2}{a_1} b_1 + \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1} x \right) dx \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das Volumen des deformierten Flächenstücks:

$$\text{vol}(dG(\xi_R)R) = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(\xi_R)h & \partial_2 G_1(\xi_R)k \\ \partial_1 G_2(\xi_R)h & \partial_2 G_2(\xi_R)k \end{pmatrix} \right| = hk |\det \mathcal{J}_G(\xi_R)| = \text{vol}(R) |\det dG(\xi_R)|. \quad \diamond$$

Satz 4.10. (Transformationssatz)

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ∂A unwesentlich, $F|_{A^\circ}$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus zwischen A° und $F(A^\circ)$ und die Funktion $g : F(A) \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall stetig. Dann ist $\partial F(A)$ unwesentlich, $g \circ F$ ist fast überall stetig auf A und es gilt

$$\int_{F(A)} g(x) dx = \int_A (g \circ F)(z) |\det dF(z)| dz.$$

Beweis.

Für die relative Volumenänderung unter der Deformation F erhalten wir

$$\frac{\text{vol}(R)}{\text{vol}(F^{-1}(R))} \approx \frac{1}{|\det dG(\xi_R)|} = \frac{1}{|\det(dF(F^{-1}(\xi_R)))^{-1}|} = |\det dF(F^{-1}(\xi_R))|.$$

Damit ergibt sich für eine hinreichend feine Zerlegung Z von $F(A)$ mit zugehöriger Quadermenge $T(Z)$ und Stützstellen $\xi_R \in R$ für $R \in T(Z)$:

$$\begin{aligned} \int_{F(A)} g(x) dx &\approx \sum_{R \in T(Z)} g(\xi_R) \text{vol}(R) = \sum_{R \in T(Z)} (g \circ F)(F^{-1}(\xi_R)) \frac{\text{vol}(R)}{\text{vol}(F^{-1}(R))} \text{vol}(F^{-1}(R)) \\ &= \sum_{\tilde{R} \in F^{-1}(T(Z))} ((g \circ F) \cdot |\det dF|)(\xi_{\tilde{R}}) \text{vol}(\tilde{R}) \approx \int_A (g \circ F)(z) |\det dF(z)| dz, \end{aligned}$$

wobei $F^{-1}(T(Z)) = \{F^{-1}(R) \mid R \in T(Z)\}$ die Quadermenge der durch Z induzierten Zerlegung von A ist mit zugehörigen Stützstellen $\xi_{\tilde{R}} = F^{-1}(\xi_R) \in \tilde{R}$ für $\tilde{R} = F^{-1}(R) \in F^{-1}(T(Z))$. \square

Beispiel 4.11.

- Wir integrieren die Funktion $f(x, y) = x^2 y^2$ über den 2D-Einheitskreis. Mittels **Polarkoordinaten** $F(r, \varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$ lässt sich das Integrationsgebiet $B = F(A)$ auf das Rechteck $A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ transformieren und mit $\det dF(r, \varphi) = r$ erhalten wir

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^5 \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 r^5 dr \int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{24}.$$

- Wir fassen einen Zylinder vom Radius R und der Höhe H als Rotation einer Kreisscheibe um die z -Achse auf und erhalten so eine Transformationsabbildung zwischen kartesischen Koordinaten und **Zylinderkoordinaten** $F : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(r, \varphi, h) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h)$.

Mit Hilfe des Transformationssatzes bestimmen wir damit das Volumen des Kegels K mit Höhe H und Grundradius R , $K = F(A)$ mit $A = \{(r, \varphi, h) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, \frac{hR}{H}], \varphi \in [0, 2\pi], h \in [0, H]\}$. Es gilt $\det dF(r, \varphi, h) = r$, also

$$\text{vol}(K) = \int_{F(A)} 1 d(x, y, z) = \int_A |\det dF(r, \varphi, h)| d(r, \varphi, h) = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{hR}{H}} r dr d\varphi dh = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

- Wir verifizieren mit Hilfe des Transformationssatzes die Normiertheit der Standardnormalverteilung:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\infty} r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} dr = -2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2\pi. \quad \diamond \end{aligned}$$

4.4. Oberflächenintegrale

Bemerkung 4.12.

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und offen mit unwesentlichem Rand und $\Psi \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^n)$ eine Flächenparametrisierung, d.h. $\text{rang}(d\Psi(x)) = d$ für alle $x \in A^\circ$. Weiter sei $g : \Psi(A) \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall stetig. Wir definieren das Integral von g über die durch Ψ parametrisierte Fläche via

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(A)} g(x) dA(x) &\approx \sum_{\tilde{R} \in T(Z)} g(\xi_{\tilde{R}}) \text{area}(\tilde{R}) \\ &= \sum_{R \in T(Z)} (g \circ \Psi)(\xi_R) \frac{\text{area}(\Psi(R))}{\text{vol}(R)} \text{vol}(R) \\ &\approx \int_A (g \circ \Psi)(x) \frac{\text{area}(d\Psi(\xi_R)R)}{\text{vol}(R)} dx. \end{aligned}$$

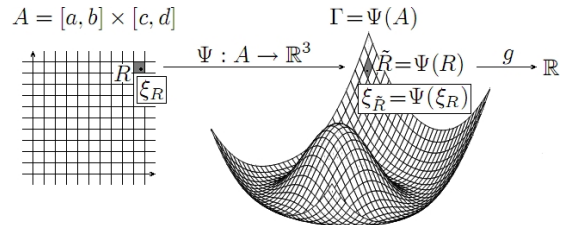


Fig. 16: Die Parametrisierung Ψ liefert zur Quadermenge $T(Z)$ einer Zerlegung des Parameterbereichs A eine kanonische Partitionierung $\{\Psi(R) \mid R \in T(Z)\}$ der Fläche $\Psi(A)$.

Seien $\mathbb{E} \ n = 3$ und $d = 2$. Um den Inhalt $\text{area}(P)$ des zum Teilrechteck

$$R = \{u + she_1 + tke_2 \mid 0 \leq s, t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

gehörenden, zweidimensionalen Flächenelements

$$P = d\Psi(\xi_R)R = \{\Psi(u) + sp_1 + tp_2 \mid 0 \leq s, t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad p_1 = h\partial_1\Psi(\xi_R), \quad p_2 = k\partial_2\Psi(\xi_R)$$

zu bestimmen, transformieren wir P in die x_1 - x_2 -Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ via einer geeigneten orthogonalen Matrix $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (d.h. M ist regulär mit $M^{-1} = M^T$) und definieren mit Hilfe der erhaltenen Bildvektoren $Mp_1 = (q_{11}, q_{12}, 0)^T$ und $Mp_2 = (q_{21}, q_{22}, 0)^T$ den Flächeninhalt von P als $\text{area}(P) = |\det(q_1, q_2)|$, d.h. als das Volumen $\text{vol}(Q)$ des von q_1, q_2 aufgespannten Parallelogramms $\tilde{P} = \{sq_1 + tq_2 \mid 0 \leq s, t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$\text{area}(P)$ hängt nur von den Spannvektoren p_1, p_2 des Parallelogramms P ab, nicht jedoch von der gewählten Drehmatrix M :

$$\begin{aligned} \text{area}(P) = \text{vol}(\tilde{P}) &= \left| \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle q_1, q_1 \rangle & \langle q_2, q_1 \rangle \\ \langle q_1, q_2 \rangle & \langle q_2, q_2 \rangle \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle Mp_1, Mp_1 \rangle & \langle Mp_2, Mp_1 \rangle \\ \langle Mp_1, Mp_2 \rangle & \langle Mp_2, Mp_2 \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_2, p_1 \rangle \\ \langle p_1, p_2 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen $\text{gram}(p_1, \dots, p_d) = \det(\langle p_i, p_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq i \leq d}}$ für Vektoren $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{R}^n$ als die **Gramsche Determinante**.

Für das Flächenmaß von P erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \text{area}(P) &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} h^2 \langle \partial_1\Psi(\xi_R), \partial_1\Psi(\xi_R) \rangle & hk \langle \partial_1\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R) \rangle \\ hk \langle \partial_1\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R) \rangle & k^2 \langle \partial_2\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R) \rangle \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{h^2 k^2} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \partial_1\Psi(\xi_R), \partial_1\Psi(\xi_R) \rangle & \langle \partial_1\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R) \rangle \\ \langle \partial_1\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R) \rangle & \langle \partial_2\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R) \rangle \end{pmatrix}} \\ &= \text{vol}(R) \sqrt{\text{gram}(\partial_1\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R))}. \end{aligned}$$

◇

Definition 4.13.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\Psi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $A \subseteq U$ beschränkt mit $\bar{A} \subseteq U$ und ∂A unwesentlich. Weiter seien $N \subseteq A$ unwesentlich, $\Psi|_{A \setminus N}$ injektiv und $d\Psi|_{A \setminus N}$ habe den Rang d in jedem Punkte aus $A \setminus N$. Zu einer Abbildung $g : \Psi(A) \rightarrow \mathbb{R}$, für welche $g \circ \Psi$ fast überall stetig auf A ist, definieren wir das **Oberflächenintegral** über $\Psi(A)$ als

$$\int_{\Psi(A)} g(x) dA(x) = \int_A (g \circ \Psi)(x) \sqrt{\text{gram}(\partial_1\Psi(x), \dots, \partial_d\Psi(x))} dx.$$

Speziell im Fall $g \equiv 1$ entspricht dieser Wert dem **Flächeninhalt** $\text{area}(\Psi(A))$ von $\Psi(A)$.

Beispiel 4.14.

1. Spezialfall $d = 1$: Seien $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\Psi \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Kurvenparametrisierung. Dann gilt

$$\text{area}(\Psi(A)) = \int_{\Psi(A)} 1 \, dA(x) = \int_A \sqrt{\text{gram}(\partial_1 \Psi)(t)} \, dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\Psi}(t), \dot{\Psi}(t) \rangle} \, dt = \mathcal{L}(\Psi).$$

2. Spezialfall $d = 2$ und $n = 3$: Hier stimmt die Gramsche Determinante $\text{gram}(a, b)$ zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ mit der quadrierten euklidischen Norm des Kreuzproduktes $\|a \times b\|_2^2$ dieser Vektoren überein, d.h.

$$\int_{\Psi(A)} g(x) \, dA(x) = \int_A g(\Psi(u, v)) \|\partial_1 \Psi(u, v) \times \partial_2 \Psi(u, v)\|_2 \, d(u, v).$$

3. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ und $\Psi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^{n+1})$, gegeben durch $\Psi(x) = (x, f(x))^T \in \mathbb{R}^n$ die Standardparametrisierung des Graphen von f . Dann ist $[\Psi]$ eine n -dimensionale Fläche im \mathbb{R}^{n+1} und

$$\text{area}(\Psi(U)) = \int_{\Psi(U)} 1 \, dA(x) = \int_U \sqrt{\text{gram}(\partial_1 \Psi(x), \dots, \partial_n \Psi(x))} \, dx = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla \Psi(x)\|_2^2} \, dx. \quad \diamond$$

4.5. Integration über Mannigfaltigkeiten**Definition 4.15.**

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine d -dimensionale **\mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit** ($k \geq 1$), wenn es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $U_p \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Abbildung $\Psi_p \in \mathcal{C}^k(U_p, V_p \cap S)$ gibt, so dass $\Psi_p : U_p \rightarrow V_p \cap S$ ein Homeomorphismus ist und $d\Psi_p(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ für jedes $x \in U_p$ injektiv ist.

Ψ_p heißt ein **lokales Koordinatensystem** in einer Umgebung von p und $V_p \cap S$ eine **Koordinatenumgebung**.

Bemerkung 4.16.

1. Jede Flächenparametrisierung $\Psi \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ definiert trivialerweise eine Mannigfaltigkeit mit globalem Koordinatensystem Ψ .
2. $T_p(S) = d\Psi(\Psi^{-1}(p))\mathbb{R}^d$ heißt der **Tangentialraum** an S in p . Es gilt stets $\dim T_p(S) = d$, denn $d\Psi(q)e_1, \dots, d\Psi(q)e_d$ sind linear unabhängige Elemente von $T_{\Psi(q)}(S)$ und bilden damit eine Basis des Tangentialraums.
3. $N_p(S) = T_p^\perp(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in T_p(S) : \langle x, y \rangle = 0\}$ heißt der **Normalraum** an S in p . Dieser hat die Dimension $\dim N_p(S) = n - \dim T_p(S) = n - d$. \diamond

Definition 4.17.

Sei die beschränkte Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein **Gebiet**, d.h. offen und zusammenhängend. Dann heißt ∂G ein **glatter Rand**, falls zu jedem $x \in \partial G$ eine offene Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $\psi_x \in \mathcal{C}^1(V_x, \mathbb{R})$ existieren mit $\nabla \psi_x(y) \neq 0$ für alle $y \in V_x$ und $G \cap V_x = \{y \in V_x \mid \psi_x(y) < 0\}$.

Bemerkung 4.18.

In diesem Fall gilt $\partial G \cap V_x = \{y \in V_x \mid \psi_x(y) = 0\}$, d.h. der Rand kann lokal als Nullstellenmenge einer differenzierbaren Abbildung geschrieben werden. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann (eventuell nach Koordinatenumnummerierung) eine offene Menge $U_x \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, ein kompaktes Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ und eine Auflösung $\varphi_x \in \mathcal{C}^1(U_x, \mathbb{R})$ mit $G \cap (U_x \times I_x) = \{y \in U_x \times I_x \mid y_n < \varphi_x(y_1, \dots, y_{n-1})\}$ sowie $\partial G \cap (U_x \times I_x) = \{y \in U_x \times I_x \mid y_n = \varphi_x(y_1, \dots, y_{n-1})\}$.

Ist dieses φ_x a priori bekannt, so kann man $\psi_x(y) = y_n - \varphi_x(y_1, \dots, y_{n-1})$ wählen und ∂G lässt sich lokal als $(n-1)$ -dimensionale Fläche parametrisieren via $\Psi_x \in \mathcal{C}^1(U_x, \mathbb{R}^n)$ mit $\Psi_x(y) = (y, \varphi_x(y))^T$. \diamond

Definition 4.19.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂G . Dann heißt zu $x \in \partial G$ der eindeutig bestimmte Vektor $\vec{\nu}(x) \in \mathbb{R}^n$ aus dem eindimensionalen Normalraum $N_x(\partial G)$ mit $\|\vec{\nu}(x)\| = 1$ und $x + \varepsilon \vec{\nu}(x) \notin G$ für alle hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ der **äußere Normalenvektor** an x und $\vec{\nu} : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$ das **Normalenfeld** an ∂G .

Bemerkung 4.20.

Wird ∂G lokal bei x durch $\{\psi_x(y) = 0\}$ dargestellt mit $\psi_x(y) = y_n - \varphi_x(y_1, \dots, y_{n-1})$, dann ist das äußere Normalenfeld $\vec{\nu}$ von ∂G gegeben durch

$$\vec{\nu}(x) = \pm \frac{\nabla \psi_x(x)}{\|\nabla \psi_x(x)\|} = \pm \frac{(-\nabla \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), 1)^T}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\|_2^2}}. \quad \diamond$$

Bemerkung 4.21.

Seien S eine Mannigfaltigkeit $f \in C^0(S, \mathbb{R}^n)$. Der **Träger** $\text{supp}(f) = \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$ sei kompakt. Dann wird $\text{supp}(f)$ durch endlich viele Koordinatenumgebungen $V_1 \cap S, \dots, V_m \cap S$ überdeckt mit zugehörigen lokalen Koordinatensystemen $\Psi^{(i)} : U_i \rightarrow V_i \cap S$, $i = 1, \dots, m$, und es gibt glatte Funktionen $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{supp}(\varphi) \subseteq V_i$ und $\varphi_1(x) + \dots + \varphi_m(x) = 1$ für alle $x \in \text{supp}(f)$. Wir bezeichnen die Familie $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, m\}$ als eine **Zerlegung der Eins** auf $\text{supp}(f)$. \diamond

Definition 4.22.

Sei S eine Mannigfaltigkeit und $f \in C^0(S, \mathbb{R}^n)$ habe einen kompakten Träger mit zugehöriger Zerlegung der Eins $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, m\}$. Wir definieren das Integral von f über S als

$$\int_S f(x) \, dA(x) = \sum_{i=1}^m \int_{V_i \cap S} \varphi_i(x) f(x) \, dA(x).$$

4.6. Die Integralsätze von Gauß und Stokes**Bemerkung 4.23.**

Wir verallgemeinern im Folgenden den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_{[a,b]} f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$

auf höhere Raumdimensionen. \diamond

Satz 4.24. (Satz von Gauß)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\bar{\Omega} \subseteq U$ und stetigem äußeren Normalenfeld $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ an der $(n-1)$ -dimensionalen C^1 -Fläche $\partial\Omega$. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} (\text{div } F)(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \vec{\nu}(x) \rangle \, dA(x).$$

Beweis.

Wir betrachten zunächst zwei Fälle, bei denen Ω ein Quader im \mathbb{R}^n ist beziehungsweise ein deformierter Quader, der eine gekrümmte Seite besitzt.

Anschließend partitionieren wir Ω mittels der Zerlegung der Eins und erhalten so klassische Quader im Inneren von Ω und deformierte Quader am Rand von Ω . Auf diese beiden Fälle können wir dann die zuvor gezeigten Teilresultate anwenden.

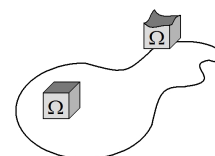


Fig. 17: Zerlegung von Ω .

1. Sei Ω ein Quader; \mathbb{E} sei $n = 2$, d.h. $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Wir parametrisieren den Rand von Ω via einer stückweisen Kurve $\Psi = ([\gamma_1], [\gamma_2], [\gamma_3], [\gamma_4]) : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und das zugehörige Normalenfeld $\vec{\nu} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2), & t \in [0, 1], & \vec{\nu}_1(x) &= (0, -1), & x \in \gamma_1([0, 1]), \\ \gamma_2(t) &= (b_1, a_2 + (t - 1)(b_2 - a_2)), & t \in [1, 2], & \vec{\nu}_2(x) &= (+1, 0), & x \in \gamma_2([1, 2]), \\ \gamma_3(t) &= (b_1 + (t - 2)(b_1 - a_1), b_2), & t \in [2, 3], & \vec{\nu}_3(x) &= (0, +1), & x \in \gamma_3([2, 3]), \\ \gamma_4(t) &= (a_1, b_2 + (3 - t)(b_2 - a_2)), & t \in [3, 4], & \vec{\nu}_4(x) &= (-1, 0), & x \in \gamma_4([3, 4]). \end{aligned}$$

Mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung erhalten wir so:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \vec{\nu}(x) \rangle dx &= \int_{\Gamma([0,4])} \langle F(\gamma(t)), \vec{\nu}(\gamma(t)) \rangle \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_0^1 \langle F(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2), (0, -1) \rangle (b_1 - a_1) dt \\ &\quad + \int_1^2 \langle F(b_1, a_2 + (t - 1)(b_2 - a_2)), (+1, 0) \rangle (a_2 - b_2) dt \\ &\quad + \int_2^3 \langle F(b_1 + (2 - t)(b_1 - a_1), b_2), (0, +1) \rangle (a_1 - b_1) dt \\ &\quad + \int_3^4 \langle F(a_1, b_2 + (3 - t)(b_2 - a_2)), (-1, 0) \rangle (b_2 - a_2) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} -F_2(t, a_2) dt + \int_{a_2}^{b_2} F_1(b_1, t) dt + \int_{a_1}^{b_1} F_2(t, b_2) dt + \int_{a_2}^{b_2} -F_1(a_1, t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2) dx_2 dx_1 + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x) dx \end{aligned}$$

2. Sei Ω ein in einer Raumrichtung deformierter Quader. Zu $x \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, dann können wir Ω darstellen als

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}] \ \& \ \tilde{a}_n < x_n < f(\hat{x})\}$$

mit $f \in \mathcal{C}^1([\hat{a}, \hat{b}], \mathbb{R})$, so dass $\Psi : \hat{x} \mapsto (\hat{x}, f(\hat{x}))$ den Deckel $\Psi([\hat{a}, \hat{b}])$ des Quaders parametrisiert.

Dabei ist \tilde{a}_n willkürlich so gewählt, dass $\operatorname{supp}(F) \subseteq (\hat{a}, \hat{b}) \times (\tilde{a}_n, \infty)$ erfüllt ist. Wir definieren die Koordinatentransformation $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ via

$$\Phi(x) = (\hat{x}, x_n + f(\hat{x})),$$

wobei $a_n = \tilde{a}_n - \max\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}]\} \leq 0$ und $b_n = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi([a, b]) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}], a_n + f(\hat{x}) \leq x_n \leq f(\hat{x})\} \\ &= \bar{\Omega} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}], a_n + f(\hat{x}) < x_n < \tilde{a}_n\}. \end{aligned}$$

Beachte, dass $F = 0$ auf $\Phi([a, b]) \setminus \bar{\Omega}$ erfüllt ist. Weiterhin gilt $F \circ \Phi = 0$ auf allen Seiten des Quaders $[a, b]$ bis auf $[\hat{a}, \hat{b}] \times \{0\}$.

Nach der Kettenregel gilt

$$\operatorname{div}(F \circ \Phi)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (F \circ \Phi)_i(x) = \sum_{i=1}^n dF_i(\Phi(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\Phi(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_j(x)$$

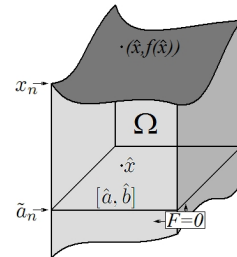


Fig. 18: Der deformierte Quader mit als Graph parametrisiertem Deckel.

und wir erhalten

$$\operatorname{div}(F \circ \Phi)(x) = (\operatorname{div} F)(\Phi(x)) + \operatorname{d}f(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} (\hat{F} \circ \Phi)(x).$$

Ein nach außen gerichteter Vektor des Normalraums an $x \in \partial\Omega$ ist gegeben durch

$$\tilde{\nu}(x) = \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x}), \dots, -\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f(\hat{x}), 1 \right), \quad \|\tilde{\nu}(x)\|_2 = \sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1 \Psi(\hat{x}), \dots, \partial_{n-1} \Psi(\hat{x}))}.$$

Schließlich ist $\operatorname{d}\Phi(x)$ eine Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1, \dots, 1)^T$, d.h. $\det \operatorname{d}\Phi(x) = 1$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x) \, dx &= \int_{\Phi([a,b])} (\operatorname{div} F)(x) \, dx = \int_{[a,b]} (\operatorname{div} F)(\Phi(x)) \cdot |\det \operatorname{d}\Phi(x)| \, dx \\ &= \int_{[a,b]} \operatorname{div}(F \circ H)(x) \, dx - \int_{[a,b]} \operatorname{d}f(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} (\hat{F} \circ \Phi)(x) \, dx \\ &= \int_{[\hat{a}, \hat{b}]} F_n(H(\hat{x}, 0)) \, d\hat{x} - \int_{[\hat{a}, \hat{b}]} \operatorname{d}f(\hat{x}) \int_{[a_n, 0]} \frac{\partial}{\partial x_n} F_n(x) \, dx_n \, d\hat{x} \\ &= \int_{[\hat{a}, \hat{b}]} F_n(\Psi(\hat{x})) - \operatorname{d}f(\hat{x}) \hat{F}(\Psi(\hat{x})) \, d\hat{x} = \int_{[\hat{a}, \hat{b}]} \langle \tilde{\nu}(\Psi(\hat{x})), F(\Psi(\hat{x})) \rangle \, d\hat{x} \\ &= \int_{[\hat{a}, \hat{b}]} \langle \nu(\Psi(\hat{x})), F(\Psi(\hat{x})) \rangle \sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1 \Psi(\hat{x}), \dots, \partial_{n-1} \Psi(\hat{x}))} \, d\hat{x} \\ &= \int_{\Psi([\hat{a}, \hat{b}])} \langle \nu(x), F(x) \rangle \, dA(x) = \int_{\partial\Omega} \langle \nu(x), F(x) \rangle \, dA(x). \end{aligned}$$

3. Sei nun Ω ein allgemeines Gebiet, das den Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes genügt. Zu jedem $x \in \bar{\Omega}$ existiert dann eine Umgebung vom Typ $Q_x = (a_x, b_x) \subseteq U$ mit $Q_x \subseteq \Omega$ für $x \in \Omega$, so dass $Q_x \cap \partial\Omega$ für alle $x \in \partial\Omega$ eine Koordinatenumgebung ist, welche sich parametrisieren lässt durch $\Psi_x : \pi_i(Q_x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\pi_i(y) = \hat{y}_i = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ψ_x lässt sich explizit wählen als $\Psi_x(\hat{y}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, f(\hat{y}), y_i, \dots, y_{n-1})$. Dabei ist speziell $\pi_i(\Psi(\hat{y})) = \hat{y}$.

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, lässt sich $\bar{\Omega}$ mit Quadern überdecken, $\bar{\Omega} \subseteq (a^{(1)}, b^{(1)}) \cup \dots \cup (a^{(m)}, b^{(m)})$. Wir konstruieren nun eine Zerlegung der Eins $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subseteq C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, d.h. es gelten $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq Q_i$ und $\varphi_1(x) + \dots + \varphi_m(x) = 1$ für alle $x \in \bar{\Omega}$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x) \, dx &= \int_{\Omega} \left(\operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i \cdot F \right) \right) (x) \, dx = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\varphi_i \cdot F))(x) \, dx \\ &= \sum_{i: Q_i \subseteq \Omega} \int_{Q_i} \operatorname{div}(\varphi_i \cdot F)(x) \, dx + \sum_{i: Q_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \int_{Q_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\varphi_i \cdot F)(x) \, dx \\ &= \sum_{i: Q_i \subseteq \Omega} \int_{\partial Q_i} \langle \varphi_i(x) \cdot F(x), \nu(x) \rangle \, dA(x) + \sum_{i: Q_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \int_{Q_i \cap \partial\Omega} \langle \varphi_i(x) \cdot F(x), \nu(x) \rangle \, dA(x) \\ &= \sum_{i: Q_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \int_{Q_i \cap \partial\Omega} \langle \varphi_i(x) \cdot F(x), \nu(x) \rangle \, dA(x) = \sum_{i=1}^m \int_{Q_i \cap \partial\Omega} \langle \varphi_i(x) \cdot F(x), \nu(x) \rangle \, dA(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dA(x). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 4.25.

Gilt speziell $\operatorname{supp}(F) \subseteq \Omega$, d.h. $F \equiv 0$ auf $\partial\Omega$, dann ist

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x) \, dx = 0. \quad \diamond$$

Korollar 4.26. (Greensche Formeln)

Seien $f, g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. Dann gelten die beiden Integrationsformeln

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \Delta g(x) \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot \langle \nabla g(x), \nu(x) \rangle \, dA(x),$$

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \Delta g(x) - g(x) \cdot \Delta f(x) \, dx = - \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot \langle \nabla g(x), \nu(x) \rangle - g(x) \cdot \langle \nabla f(x), \nu(x) \rangle \, dA(x).$$

Beweis.

1. Definiere das Vektorfeld $F(x) = f(x) \cdot \nabla g(x)$, dann gelten $(\operatorname{div} F)(x) = f(x) \Delta g(x) + \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle$ und $\langle F(x), \nu(x) \rangle = f(x) \langle \nabla g(x), \nu(x) \rangle$. Die behauptete Gleichheit folgt dann aus dem Satz von Gauß.
2. Die zweite Formel folgt offenbar unmittelbar aus der ersten. \square

Satz 4.27. (Satz von Stokes)

Seien $[\Psi] \subseteq \mathbb{R}^3$ eine \mathcal{C}^2 -Fläche mit zusammenhängendem, stückweise glattem Rand $[\gamma]$ und stetigem Normalenfeld ν , $V \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $[\Psi]$ und $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$ ein glattes Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_{[\Psi]} \langle (\nabla \times f)(x), \nu(x) \rangle \, dA(x) = \int_{[\gamma]} \langle f(x), dx \rangle.$$

Beweis.

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Parametergebiet, $\Psi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ eine Parametrisierung der Fläche und $g : [0, \mathcal{L}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $g(t) = (u(t), v(t))$ eine Bogenlängenparametrisierung des Randes von Ω . Dann lässt sich der Rand von $[\Psi]$ parametrisieren durch $\gamma : t \mapsto \Psi(g(t))$ und der Satz von Stokes in parametrisierter Form liest sich als

$$\int_{\Omega} \langle (\nabla \times f)(\Psi(u, v)), (\partial_u \Psi \times \partial_v \Psi)(u, v) \rangle \, d(u, v) = \int_{[0, \mathcal{L}]} \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt.$$

Der positiv orientierte Tangenteneinheitsvektor an γ ist $\tau_{\gamma}(t) = (\dot{u}(t), \dot{v}(t))$ und der zugehörige äußere Normalenvektor damit $\nu_{\gamma}(t) = (\dot{v}(t), -\dot{u}(t))$. Mit dem Satz von Gauß erhalten wir so

$$\begin{aligned} & \int_{[0, \mathcal{L}]} \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_{[0, \mathcal{L}]} f_x(\gamma(t)) \dot{\gamma}_x(t) + f_y(\gamma(t)) \dot{\gamma}_y(t) + f_z(\gamma(t)) \dot{\gamma}_z(t) \, dt \\ &= \int_{[0, \mathcal{L}]} f_x(\gamma(t)) \frac{d}{dt} (\Psi_x \circ g)(t) + f_y(\gamma(t)) \frac{d}{dt} (\Psi_y \circ g)(t) + f_z(\gamma(t)) \frac{d}{dt} (\Psi_z \circ g)(t) \, dt \\ &= \int_{[0, \mathcal{L}]} f_x(\gamma(t)) (\partial_u \Psi_x(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + \partial_v \Psi_x(u(t), v(t)) \dot{v}(t)) \, dt \\ & \quad + \int_{[0, \mathcal{L}]} f_y(\gamma(t)) (\partial_u \Psi_y(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + \partial_v \Psi_y(u(t), v(t)) \dot{v}(t)) \, dt \\ & \quad + \int_{[0, \mathcal{L}]} f_z(\gamma(t)) (\partial_u \Psi_z(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + \partial_v \Psi_z(u(t), v(t)) \dot{v}(t)) \, dt \\ &= \int_{[0, \mathcal{L}]} \left\langle \left((f_x \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_u \Psi_x \\ -\partial_u \Psi_x \end{pmatrix} + (f_y \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_u \Psi_y \\ -\partial_u \Psi_y \end{pmatrix} + (f_z \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_u \Psi_z \\ -\partial_u \Psi_z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ -\dot{u}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\langle \left((f_x \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_v \Psi_x \\ -\partial_u \Psi_x \end{pmatrix} + (f_y \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_v \Psi_y \\ -\partial_u \Psi_y \end{pmatrix} + (f_z \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_v \Psi_z \\ -\partial_u \Psi_z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_u(u, v) \\ \nu_v(u, v) \end{pmatrix} \right\rangle \, dA(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left((f_x \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_v \Psi_x \\ -\partial_u \Psi_x \end{pmatrix} + (f_y \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_v \Psi_y \\ -\partial_u \Psi_y \end{pmatrix} + (f_z \circ \Psi) \begin{pmatrix} \partial_v \Psi_z \\ -\partial_u \Psi_z \end{pmatrix} \right) (u, v) \, d(u, v) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\partial_u((f_x \circ \Psi) \partial_v \Psi_x) - \partial_v((f_x \circ \Psi) \partial_u \Psi_x) + \partial_u((f_y \circ \Psi) \partial_v \Psi_y) - \partial_v((f_y \circ \Psi) \partial_u \Psi_y) \right. \\
 &\quad \left. + \partial_u((f_z \circ \Psi) \partial_v \Psi_z) - \partial_v((f_z \circ \Psi) \partial_u \Psi_z) \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} d(u, v) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\partial_u(f_x \circ \Psi) \partial_v \Psi_x - \partial_v(f_x \circ \Psi) \partial_u \Psi_x + \partial_u(f_y \circ \Psi) \partial_v \Psi_y - \partial_v(f_y \circ \Psi) \partial_u \Psi_y \right. \\
 &\quad \left. + \partial_u(f_z \circ \Psi) \partial_v \Psi_z - \partial_v(f_z \circ \Psi) \partial_u \Psi_z \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} d(u, v) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\partial_u(f_x \circ \Psi) \partial_v \Psi_x + (f_x \circ \Psi) \partial_u \partial_v \Psi_x - \partial_v(f_x \circ \Psi) \partial_u \Psi_x - (f_x \circ \Psi) \partial_v \partial_u \Psi_x \right. \\
 &\quad \left. + \partial_u(f_y \circ \Psi) \partial_v \Psi_y + (f_y \circ \Psi) \partial_u \partial_v \Psi_y - \partial_v(f_y \circ \Psi) \partial_u \Psi_y - (f_y \circ \Psi) \partial_v \partial_u \Psi_y \right. \\
 &\quad \left. + \partial_u(f_z \circ \Psi) \partial_v \Psi_z + (f_z \circ \Psi) \partial_u \partial_v \Psi_z - \partial_v(f_z \circ \Psi) \partial_u \Psi_z - (f_z \circ \Psi) \partial_v \partial_u \Psi_z \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} d(u, v) \\
 &= \int_{\Omega} \left((\partial_x(f_x \circ \Psi) \partial_u \Psi_x + \partial_y(f_x \circ \Psi) \partial_u \Psi_y + \partial_z(f_x \circ \Psi) \partial_u \Psi_z) \partial_v \Psi_x \right. \\
 &\quad - (\partial_x(f_x \circ \Psi) \partial_v \Psi_x + \partial_y(f_x \circ \Psi) \partial_v \Psi_y + \partial_z(f_x \circ \Psi) \partial_v \Psi_z) \partial_u \Psi_x \\
 &\quad + (\partial_x(f_y \circ \Psi) \partial_u \Psi_x + \partial_y(f_y \circ \Psi) \partial_u \Psi_y + \partial_z(f_y \circ \Psi) \partial_u \Psi_z) \partial_v \Psi_y \\
 &\quad - (\partial_x(f_y \circ \Psi) \partial_v \Psi_x + \partial_y(f_y \circ \Psi) \partial_v \Psi_y + \partial_z(f_y \circ \Psi) \partial_v \Psi_z) \partial_u \Psi_y \\
 &\quad + (\partial_x(f_z \circ \Psi) \partial_u \Psi_x + \partial_y(f_z \circ \Psi) \partial_u \Psi_y + \partial_z(f_z \circ \Psi) \partial_u \Psi_z) \partial_v \Psi_z \\
 &\quad \left. - (\partial_x(f_z \circ \Psi) \partial_v \Psi_x + \partial_y(f_z \circ \Psi) \partial_v \Psi_y + \partial_z(f_z \circ \Psi) \partial_v \Psi_z) \partial_u \Psi_z \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} d(u, v) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\partial_y(f_x \circ \Psi) (\partial_u \Psi_y \partial_v \Psi_x - \partial_v \Psi_y \partial_u \Psi_x) + \partial_z(f_x \circ \Psi) (\partial_u \Psi_z \partial_v \Psi_x - \partial_v \Psi_z \partial_u \Psi_x) \right. \\
 &\quad \left. + \partial_x(f_y \circ \Psi) (\partial_u \Psi_x \partial_v \Psi_y - \partial_v \Psi_x \partial_u \Psi_y) + \partial_z(f_y \circ \Psi) (\partial_u \Psi_z \partial_v \Psi_y - \partial_v \Psi_z \partial_u \Psi_y) \right. \\
 &\quad \left. + \partial_x(f_z \circ \Psi) (\partial_u \Psi_x \partial_v \Psi_z - \partial_v \Psi_x \partial_u \Psi_z) + \partial_y(f_z \circ \Psi) (\partial_u \Psi_y \partial_v \Psi_z - \partial_v \Psi_y \partial_u \Psi_z) \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} d(u, v) \\
 &= \int_{\Omega} \left((\partial_y(f_z \circ \Psi) - \partial_z(f_y \circ \Psi)) (\partial_u \Psi_y \partial_v \Psi_z - \partial_v \Psi_y \partial_u \Psi_z) \right. \\
 &\quad \left. + (\partial_z(f_x \circ \Psi) - \partial_x(f_z \circ \Psi)) (\partial_u \Psi_z \partial_v \Psi_x - \partial_v \Psi_z \partial_u \Psi_x) \right. \\
 &\quad \left. + (\partial_x(f_y \circ \Psi) - \partial_y(f_x \circ \Psi)) (\partial_u \Psi_x \partial_v \Psi_y - \partial_v \Psi_x \partial_u \Psi_y) \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} d(u, v) \\
 &= \int_{\Omega} \langle (\nabla \times f)(\Psi(u, v)), (\partial_u \Psi \times \partial_v \Psi)(u, v) \rangle d(u, v) \quad \square
 \end{aligned}$$

Bemerkung 4.28.

Physikalische Interpretation: Die *Zirkulation eines Feldes* F längs eines geschlossenen Weges entspricht dem *Fluss des Rotationsfeldes* $\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F$ durch die vom Weg eingeschlossenen Fläche. \diamond

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (p -Normen auf \mathbb{R}^n)

1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Beweisen Sie für die p -Norm $\|\cdot\|_p$ auf \mathbb{R}^n die folgende Ungleichungskette:

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_{\infty}.$$

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$.

Aufgabe 2. (Frobenius-Norm für Matrizen)

Die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ ist definiert für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$. Zeigen Sie:

1. $\|\cdot\|_F$ erfüllt die Axiome einer Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$.
2. $\|\cdot\|_F$ ist submultiplikativ, d.h. $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

Aufgabe 3. (verträgliche Matrixnormen)

1. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass $\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass für diese Matrixnorm gelten $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sowie $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
3. Zeigen Sie, dass $\|A\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ und $\|A\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$.
4. Zeigen Sie, dass $\|A\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2$ erfüllt ist, dass aber im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 4. (Spektralnrm)

Zeigen Sie, dass für die zu $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\|A\|_2$ ist gleich der Wurzel des maximalen Eigenwerts der symmetrischen Matrix $A^T A$.

Aufgabe 5. (Konvergenz in metrischen Räumen)

Auf dem Raum X aller reellen Zahlenfolgen definieren wir eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

1. Zeigen Sie, dass d wohldefiniert ist, d.h. dass die Reihe stets konvergiert.
2. Zeigen Sie, dass d die Axiome einer Metrik erfüllt und (X, d) somit ein metrischer Raum ist.
3. Seien $\xi_k = (x_{nk})_{n \in \mathbb{N}} \in X$ und $\bar{\xi} = (\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$. Zeigen Sie, dass die Folge $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ genau dann für $k \rightarrow \infty$ bzgl. d gegen $\bar{\xi} \in X$ konvergiert, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{nk})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$ bzgl. $|\cdot|$ gegen $\bar{x}_n \in \mathbb{R}$ konvergieren.

Aufgabe 6. (Stetigkeit in metrischen Räumen)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Überprüfen Sie die Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben als $f(x) = d(x_0, x)$, auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

Aufgabe 7. (Metrische und topologische Räume)

1. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$. Zeigen Sie, dass (X, δ) ein metrischer Raum ist und dass eine Menge in (X, δ) genau dann offen ist, wenn sie in (X, d) offen ist.
2. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X genau dann offen ist, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist.
3. Wir setzen $\mathcal{N} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus U \text{ ist endlich}\}$. Zeigen Sie, dass \mathcal{N} eine Topologie auf \mathbb{N} definiert, in der das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht gilt.

Aufgabe 8. (Inneres und Abschluss)

Seien \mathbb{R}^n mit der Normtopologie versehen und $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\begin{aligned} \overline{A^\circ} &= \overline{A}, & \overline{A^\circ} &= A^\circ, & A^\circ \cap B^\circ &= (A \cap B)^\circ, \\ A^\circ \cup B^\circ &= (A \cup B)^\circ, & \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, & \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. (Rand)

Seien \mathbb{R}^n mit der Normtopologie versehen und A . Zeigen Sie:

1. A ist genau dann offen, wenn A keinen seiner Randpunkte enthält.
2. A ist genau dann abgeschlossen, wenn A jeden seiner Randpunkte enthält.

Aufgabe 10. (Topologisches)

Bestimmen Sie den Abschluss, das Innere und den Rand der Menge $M = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 11. (Folgenräume)

Betrachten Sie die Folgenräume

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}, \\ X_2 &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ existiert} \right\}, \\ X_3 &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}, \\ X_4 &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n = 0 \right\}. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass X_2 und X_3 abgeschlossene Unterräume von X_1 bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ sind.
 2. Bestimmen Sie den Abschluss von X_4 in X_1 bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
-

Aufgabe 12. (Verträglichkeit von Matrix-Vektor-Folgen)

Seien X, Y Banachräume, $\mathcal{L}_b(X, Y)$ der zugehörige Raum der linearen Operatoren, versehen mit der zu $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ gehörigen Operatornorm, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_b(X, Y)$ eine konvergente Operatorfolge mit Grenzwert $A \in \mathcal{L}_b(X, Y)$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ konvergent mit Grenzwert $x \in X$. Zeigen Sie, dass dann $(A_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ gegen $Ax \in Y$ konvergiert.

Aufgabe 13. (Stetigkeit von Umkehrfunktionen)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist auch $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ stetig.

Aufgabe 14. (Delta-Distribution)

Bezeichne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\} < \infty\}$ den Raum der punktweise beschränkten, reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R}^n und $\delta \in \mathcal{L}_b(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ die Funktion $\delta(f) = f(0)$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\|\delta\|$ von δ .

Aufgabe 15. (Normredundanz auf \mathbb{R})

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass dann ein $c > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\|x\| = c|x|$.

Aufgabe 16. (Stetigkeit fortgesetzter Funktionen)

1. Überprüfen Sie, in welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(xy)/(xy^2), & x \neq 0 \ \& \ y \neq 0 \\ 1/y & x = 0 \ \& \ y \neq 0 \\ 1/x & x \neq 0 \ \& \ y = 0 \\ 0 & x = 0 \ \& \ y = 0 \end{cases}$$

2. Untersuchen Sie die Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\phi(x) = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \cdot x$ auf Lipschitz-Stetigkeit.
-

Aufgabe 17. (Durchschnitt kompakter Mengen)

Seien X ein normierter Vektorraum, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge kompakter Mengen in X und es gelte $K_{n+1} \subseteq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch der Durchschnitt $\bigcap\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kompakt ist.

Aufgabe 18. (Ableitungsbegriffe)

Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \|x\|_2^\alpha$.

- Bestimmen Sie das erste und zweite totale Differenzial, die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung, die Richtungsableitungen, die Jacobi-Matrix, den Gradienten und die Hesse-Matrix von f in einem beliebigen Punkt $x \in D$.
- Für welche Punkte $x \in D$ gilt $\Delta f(x) = 0$?

Aufgabe 19. (Totales Differenzial und Jacobi-Matrix)

Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{S}^1$. Berechnen Sie zur Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x \sin(xy)$$

das totale Differenzial $f' = df$, die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_f(x, y)$ in (x, y) sowie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(x, y)$ in Richtung \vec{v} .

Aufgabe 20. (Totales Differenzial)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T A x$ die zugehörige quadratische Form und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ermitteln Sie anhand der Definition des totalen Differenzials die Ableitung $df(x_0)$ von f im Punkt x_0 .

Aufgabe 21. (partielles Ableiten)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = y\sqrt{2x^2 + y^2},$$

auf partielle Differenzierbarkeit und berechnen Sie wo möglich die partiellen Ableitungen.

Aufgabe 22. (partielle und totale Differenzierbarkeit)

Wir setzen die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad g(x, y) = \frac{(x - y)^3}{x^2 + y^2}; \quad h(x, y) = \frac{(x - y)^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

im Nullpunkt durch 0 fort.

Berechnen Sie wo möglich im Punkt $(0, 0)$ die Ableitungen in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{S}^1$ und überprüfen Sie die Funktionen auf totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 23. (Richtungsableitungen)

Seien $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ und } x \neq 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} e^x - 1 & (x, y) \in M \\ 0 & (x, y) \notin M \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

- f ist in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar $\Leftrightarrow (x, y) \notin M$.
- Für jedes $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\nu\| = 1$ existiert die Richtungsableitung $D_\nu f(0)$.
- Es gibt ein $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\nu\| = 1$ und $D_\nu f(0) \neq \langle \nu, \nabla f(0) \rangle$. Insbesondere ist f in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 24. (Richtungsableitungen und Differenzierbarkeit)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}.$$

Für welche Richtungen $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $(h \circ \nabla)f(0, 0)$ im Punkt $(0, 0)$ und für welche nicht? Ist f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar? Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar?

Aufgabe 25. (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)

Zeigen Sie, dass die im Nullpunkt durch 0 fortgesetzte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$$

im Ursprung unstetig, aber in alle Richtungen differenzierbar ist.

Aufgabe 26. (Eulersche Homogenitätsrelation)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass genau dann ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert, wenn $\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt ist. f heißt in dem Fall **positiv homogen** vom Grad α .

Aufgabe 27. (lokale Auf- und Abstiegsrichtungen)

Ein Wanderer steht im Punkt $(0, 0, 0)$ auf der durch $z = f(x, y) = \sin(xy)$ definierten Fläche. Er möchte auf direktem Wege, d.h. über die Gerade $y = x$, den Punkt $(1, 1, \sin(1))$ erreichen, kann aber maximal Steigungen von 45° bewältigen. Wird er sein Ziel erreichen?

Aufgabe 28. (Gradient und Höhenlinien)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in U$ und $c := f(x)$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla f(x) \perp N_f(c) := \{z \in U \mid f(z) = c\},$$

d.h. dass für jedes stetig differenzierbare $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\epsilon > 0$) mit $\varphi(0) = x$ und $\text{Bild}(\varphi) \subseteq N_f(c)$ gilt:

$$\langle \varphi'(0), \nabla f(x) \rangle = 0.$$

Aufgabe 29. (Vektoranalysis)

Die Divergenz eines differenzierbaren Vektorfeldes $\nu : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist

$$\text{div } \nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i}$$

und die Rotation im Fall $n = 3$ ist definiert als

$$\text{rot } \nu = \left(\frac{\partial \nu_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \nu_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \nu_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \nu_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \nu_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \nu_1}{\partial x_2} \right).$$

Der Laplace-Operator Δ bildet eine zweimal differenzierbare Funktion $h : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ab auf

$$\Delta h = \text{div grad } h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}.$$

1. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:

$$\text{div rot } F = 0.$$

2. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \cdot \Delta f.$$

Aufgabe 30. (Zustandsgleichungen der Gasdynamik)

1. Für ein ideales Gas mit Druck P , Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ für eine gewisse Gaskonstante c . Zeigen Sie:

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

2. Für ein reales Gas mit Druck P , Molvolumen V und absoluter Temperatur T gilt die Van der Waalsche Gleichung $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ für gewisse Materialkonstanten a, b, R . Zeigen Sie, dass dieses Gas ebenfalls der obigen Differenzialgleichung genügt.

Aufgabe 31. (Diffusionsgleichung)

Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$h(t, x, y) := \frac{1}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu t}\right) \quad (\nu > 0)$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung ist:

$$\partial_t u(t, x, y) = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)u(t, x, y)$$

Hintergrund: u ist die Temperaturverteilung einer Platte mit Wärmeleitfähigkeit ν in Abwesenheit von Wärmequellen.

Aufgabe 32. (Satz von Schwarz)

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \setminus (0, 0)$$

mit $f(0, 0) = 0$ ist auf ganz \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar, aber nicht zweimal stetig differenzierbar.

Aufgabe 33. (Satz von Taylor)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $f : \mathbb{R}_{> 0} \times \mathbb{R}_{> 0} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y},$$

im Punkt $P = (1, 1)$ bis einschließlich den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 34. (Taylorpolynome)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades

$$\mathcal{T}_{p,f}^2(h) = \sum_{k=0}^2 \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(p) h^\alpha$$

am Entwicklungspunkt $p \in \mathbb{R}^3$ für die beiden Funktionen $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ mit $p = (1, 1, 1)$ und $g(x, y, z) = \exp(2x + 3z) \cos(y)$ an $p = (0, 0, 0)$.

Aufgabe 35. (Taylorentwicklung)

1. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades \mathcal{T}_f^2 der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \exp x_3$$

am Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$.

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x_i| \leq 10^{-2}$, $i = 1, 2, 3$, gilt $|f(x) - \mathcal{T}_f^2(x)| \leq 10^{-5}$.

Aufgabe 36. (Eindeutigkeit der Taylorapproximation)

Begründen Sie, dass zu der durch

$$f(x, y) = \sin(\exp(xy) - 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion genau ein Polynom der Form

$$p(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

existiert, mit dem für die Größe $\sigma_R = \sup_{x^2 + y^2 = R^2} |f(x, y) - p(x, y)|$ gilt:

$$\lim_{R \rightarrow 0} (R^{-2} \sigma_R) = 0,$$

und geben Sie dieses Polynom an.

Aufgabe 37. (Konvexität)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn

$$\forall x, y \in D : \forall \theta \in [0, 1] : f((1 - \theta)x + \theta y) \leq (1 - \theta)f(x) + \theta f(y).$$

1. Zeigen Sie: $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ ist genau dann konvex, wenn $\mathcal{H}_f(x)$ für alle $x \in D$ positiv semidefinit ist.
 2. Sei $D = \mathbb{R}^2$. Sind die Funktionen $f_1(x, y) = x^4 + y^2 - x - y$, $f_2(x, y) = \sin(xy)$ konvex?
-

Aufgabe 38. (Rotationsinvarianz des Laplaceoperators)

Seien $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, d.h. es gelte $A^T A = \text{Id}$. Zeigen Sie: $(\Delta u) \circ A = \Delta(u \circ A)$.

Aufgabe 39. (Beweisaufgabe zur Differenzierbarkeit)

1. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und f in 0 differenzierbar mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = f(x)g(x)$ in 0 differenzierbar ist und bestimmen Sie $\nabla \psi(0)$.
 2. Seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = yg(x)$. Zeigen Sie, dass f genau dann in $(0, 0)$ differenzierbar ist, wenn g in 0 stetig ist.
-

Aufgabe 40. (Polarkoordinatentransformation)

Betrachten Sie die Argumentfunktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, 2\pi)$ mit $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ der Transformation auf zweidimensionale Polarkoordinaten $(x, y) = \Phi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ auf dem geschlitzten Kreisring $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Zeigen Sie, dass ϕ auf R differenzierbar ist und dass $\nabla \phi$ auf R beschränkt ist, dass Φ aber nicht global Lipschitz-stetig auf R ist.

Aufgabe 41. (Laplaceoperator in Polarkoordinaten)

Bezeichne wieder $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ die Polarkoordinatentransformation. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt

$$(\Delta f) \circ \Phi = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(f \circ \Phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(f \circ \Phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}(f \circ \Phi).$$

Aufgabe 42. (Koordinatentransformation)

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$T(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) \cos(\varphi) \\ \sinh(\theta) \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

1. Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass T lokal umkehrbar ist, und ermitteln Sie alle Punkte $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist.
 2. Zeichnen Sie einige φ -Koordinatenlinien für $\theta > 0$.
 3. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Koordinatenlinien von φ und θ .
-

Aufgabe 43. (Lokale Umkehrbarkeit)

Es sei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\phi(x, y) = (x^3 - xy^2, x^2y - y^3)$. Man finde die Menge aller Punkte $p \in \mathbb{R}^2$, für die es offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $p \in U$, $\phi(p) \in V$ und $\phi \in \text{Diff}^1(U, V)$, der Menge aller stetig differenzierbarer Abbildungen von U nach V , die eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzen.

Aufgabe 44. (Satz über inverse Funktionen)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : Q \rightarrow f(Q), \quad Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\},$$

gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \quad ((x, y) \in Q).$$

1. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in Q$ lokal umkehrbar ist.
2. Tatsächlich hat f eine globale Umkehrabbildung $g : f(Q) \rightarrow Q$. Wie oft ist g differenzierbar?
3. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_g(-2, 2)$ der Umkehrabbildung im Punkt $(-2, 2)$.

Aufgabe 45. (\mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen)

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und $Y = f(X)$. Ferner gebe es ein $\alpha > 0$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt $|f(x) - f(y)| \geq \alpha|x - y|$.

1. Zeigen Sie: $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ ist offen und es gilt $f \in \text{Diff}^1(X, Y)$.
2. Im Fall $X = \mathbb{R}^m$ ist auch $Y = \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 46. (Störungsstabilität von \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen)

Seien $f \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^m)$ und $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m)$. Weiter sei eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. f^{-1} und g sind global Lipschitz-stetig.
2. Der Träger $\text{supp}(g) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g(x) \neq 0\}$ ist beschränkt.

Zeigen Sie, dass dann ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f + \varepsilon g \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^m)$ für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ erfüllt ist.

Aufgabe 47. (Banachscher Fixpunktsatz)

Seien $E = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Phi(x, y) = (\frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{3}y, \frac{1}{8}(xy^2 + \sin x))$ auf E definiert.

1. Zeigen Sie, dass Φ eine Selbstabbildung auf E ist.
2. Zeigen Sie, dass ein $q \in (0, 1)$ existiert, so dass für die Jacobi-Matrix von Φ gilt $\|d\Phi(x, y)\|_\infty < q$.
3. Zeigen Sie, dass das folgende nichtlineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt:

$$6x = \cos x + 2y, \quad 8y = xy^2 + \sin x.$$

Aufgabe 48. (Nichtlineare Variableneliminierung)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

1. Zeigen Sie, dass durch $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x, y) = (1, 1)$ implizit eine Funktion $z = z(x, y)$ mit $z(1, 1) = 1$ definiert ist.
2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von z nach x und y im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 49. (Lokale Auflösungsfunktionen)

1. In welchen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = 0, \quad y^2 - z^2 = 0$$

lokal auflösbar?

2. Zeigen Sie, dass das System bei $(1, 1, 1)$ lokal nach (y, z) aufgelöst werden kann.
3. Bestimmen Sie die Ableitung der Auflösungsfunktion $x \mapsto (y(x), z(x))$ durch implizites Differenzieren.

Aufgabe 50. (Auflösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme)

Für welche der Punkte $(-4, 1)$, $(-2, -2)$, $(6, 1)$ in \mathbb{R}^2 lässt sich die Gleichung

$$x^2 - 2xy + 4y^3 = 28$$

in einem Intervall um x eindeutig und stetig differenzierbar nach y auflösen?

Aufgabe 51. (Satz über implizite Funktionen)

1. Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x + y^2 + z &= 1 \end{aligned}$$

lokal um die spezielle Lösung $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ nach x, y aufgelöst werden kann, d.h. dass es eine Umgebung $U_z \subseteq \mathbb{R}$ um 1 gibt, so dass für alle $z \in U_z$ Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass (x, y, z) eine Lösung des Systems ist.

2. Berechnen Sie durch implizites Differenzieren die Ableitungen der beiden Auflösungsfunktionen in z_0 .
 3. Geben Sie den maximalen Bereich U_z an.
 4. Zeigen Sie, dass das System global nach x, z aufgelöst werden kann.
-

Aufgabe 52. (Implizites Ableiten)

Gegeben sei $\Phi(t, x, u) = e^{x-tu} - u$ ($t, x, u \in \mathbb{R}$). Zu zeigen sind:

1. $\Phi(t, x, u) = 0$ ist in einer Umgebung von $(0, x, e^x)$ nach u auflösbar.
2. Die partiellen Ableitungen der Auflösung $U(t, x)$ aus der impliziten Gleichung $\Phi(t, x, U(t, x)) = 0$ lösen die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} U(t, x)^2 = 0. \quad (\text{Burgers-Gleichung})$$

Aufgabe 53. (Optimierungsaufgabe)

Welcher der Quader aus \mathbb{R}^3 mit Kantenlängensumme gleich $a > 0$ hat das größte Volumen?

Aufgabe 54. (Parameterabhängige Optimierung)

Gegeben sei für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 - cx$. An welchen Punkten ist $\nabla f_c = 0$? Wo hat f_c sein globales Minimum?

Aufgabe 55. (Lineare Regression)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = n$ (speziell $m \geq n$) und $b \in \mathbb{R}^m$.

1. Bestimmen Sie die Menge aller kritischen Punkte von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$.
 2. An welchen dieser Punkte liegt ein lokales (striktes) Minimum vor?
-

Aufgabe 56. (Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung)

Finden Sie Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ folgenden Eigenschaften:

1. f besitzt in (x, y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\mathcal{H}_f(x, y)$ ist positiv definit.
 2. f besitzt in (x, y) einen Sattelpunkt und $\mathcal{H}_f(x, y)$ ist indefinit.
 3. f besitzt in (x, y) ein lokales, nicht isoliertes Minimum und $\mathcal{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.
 4. f besitzt in (x, y) einen Sattelpunkt und $\mathcal{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.
 5. f besitzt in (x, y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\mathcal{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.
-

Aufgabe 57. (Kriterien für kritische Punkte)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche nicht? Bei welchen der Implikationen gilt die Umkehrung?

1. Ist $f'(x) \neq 0$, dann hat f in x kein lokales Extremum.
2. Ist $\mathcal{H}_f(x)$ negativ definit, dann besitzt f in x ein lokales Maximum.

Gelte ab jetzt $f'(x) = 0$.

3. Ist $\mathcal{H}_f(x)$ positiv definit, dann hat f in x ein lokales Extremum.
4. Hat f in x ein isoliertes, lokales Extremum, dann ist $\mathcal{H}_f(x)$ positiv oder negativ definit.
5. Ist $\mathcal{H}_f(x)$ echt semidefinit, so kann f in x ein isoliertes, lokales Extremum haben.
6. Hat f in x ein isoliertes, lokales Extremum, dann kann $\mathcal{H}_f(x)$ echt semidefinit sein.
7. Ist $\mathcal{H}_f(x)$ indefinit, so kann f in x ein nicht isoliertes, lokales Minimum haben.
8. Hat f in x ein lokales, isoliertes Minimum, dann kann $\mathcal{H}_f(x)$ positiv semidefinit sein.
9. Hat f in x einen Sattelpunkt, dann ist $\mathcal{H}_f(x)$ indefinit.
10. Hat f in x ein lokales Minimum, so ist $\mathcal{H}_f(x)$ negativ semidefinit.

Aufgabe 58. (Optimierungsaufgabe)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2).$$

Aufgabe 59. (Extrempunkte längs von Geraden und Kurven)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

auf allen Geraden durch $(0, 0)$ dort ein Minimum hat, aber f kein lokales Minimum in $(0, 0)$ hat.

Aufgabe 60. (Optimalitätskriterien)

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|f(x)\|_2$. Weiter bezeichne $\text{Iso}(\mathbb{R}^m)$ die Menge aller Vektorraumisomorphismen auf \mathbb{R}^m . Zeigen Sie:

1. Gilt $df(x) \in \text{Iso}(\mathbb{R}^m)$ für alle $x \in X$, so besitzt g in X kein Maximum.
2. Gilt darüber hinaus $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so besitzt g auch kein Minimum.

Aufgabe 61. (Lagrange-Verfahren)

Bestimmen Sie Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = x(y - 1)$ auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 62. (Volumenoptimierung unter Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der dem Ellipsoid

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

einbeschrieben ist.

Hinweis: Jeder achsenparallele, in E einbeschriebene Quader besitzt genau eine Ecke $(x, y, z) \in E$, die im nichtnegativen Oktanten $\{x \geq 0 \ \& \ y \geq 0 \ \& \ z \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ liegt, also genügt es, die Volumenfunktion $(x, y, z) \mapsto xyz$ dort zu untersuchen.

Aufgabe 63. (Restringierte Optimierung)

Die minimale Distanz zwischen dem Punkt $(0, c) \in \mathbb{R}^2$ ($c \in \mathbb{R}$) und der Parabel $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ soll berechnet werden.

1. Formulieren Sie die Fragestellung als Minimierungsproblem mit Nebenbedingung.
 2. Zeichnen Sie den Graphen sowie die Niveaulinien der zu minimierenden Funktion.
 3. Lösen Sie das Problem.
 4. Zeigen Sie, dass die Verbindungslinie zwischen dem Punkt $(0, c)$ und dem nächsten Punkt auf der Parabel die Kurve senkrecht durchschneidet.
-

Aufgabe 64. (Geometrische Optimierung)

Seien a, b, c, d Vektoren des \mathbb{R}^n mit $b, d \neq 0$. Wir definieren zwei Geraden $x(s) = a + sb$, $y(t) = c + td$, wobei s, t Parameter aus \mathbb{R} . Gesucht sind die globalen Extremstellen der Abstandsfunktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(s, t) = \|x(s) - y(t)\|_2^2$.

Aufgabe 65. (Abstandsminimierung unter Nebenbedingungen)

Bezeichne Γ die Schnittkurve der affinen Ebene E mit dem Kegel K ,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y + 4z = 6\}, \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 2x^2 + y^2\}.$$

Welcher Punkt auf Γ hat den kleinsten und welcher den größten zum Nullpunkt?

Aufgabe 66. (Optimalitätskriterien zweiter Ordnung unter Nebenbedingungen)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ auf der Oberfläche des Ellipsoids $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$ auf lokale und globale Maxima und Minima.

Hinweis: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $m < n$ und $\text{rang}(dg(x)) = m$ für alle $x \in U$. Existiert dann ein Lagrangemultiplikator $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass der Punkt $(x_0, \lambda_0) \in U \times \mathbb{R}^m$ eine kritische Stelle der Lagrange-Funktion $F(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle$ ist, und ist die Hesse-Matrix $\nabla_x^2 F(x_0, \lambda_0)$ negativ bzw. positiv definit auf dem Tangentialraum $T_g(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle dg_i(x_0), x \rangle = 0, i = 1, \dots, m\}$, so ist x_0 ein striktes lokales Maximum bzw. Minimum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 67. (Kurvenlängen)

1. Betrachten Sie die Kurvenparametrisierungen $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\delta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad \delta(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Längen der zugehörigen Kurven.

Bestimmen Sie mittels der Substitution $t = \sinh(u)$ die Länge der durch $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$, $t \in [0, \sinh(1)]$, parametrisierten Kurve.

Aufgabe 68. (Bogenlängen und Kurvenintegrale)

1. a) Berechnen Sie die Länge der Zykloide (Radkurve) $\gamma(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ für $r > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.
 b) Berechnen Sie die Länge Kardioide (Herzkurve), welche in Polarkoordinaten parametrisiert wird durch $r(\varphi) = a(1 + \cos(\varphi))$ mit $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Hinweis: Die kartesische Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten ist $\gamma(\varphi) = (r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi))$.

2. Berechnen Sie längs der Kurven $\Gamma = \{(x, y) \in (0, \infty)^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ und $\gamma : t \mapsto (t, \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \frac{1}{2}t^2)$ ($t \in [0, 1]$) die Kurvenintegrale

$$\int_{\Gamma} xy \, ds, \quad \int_{\gamma} xyz \, ds.$$

Hinweis: Parametrisieren Sie zunächst den in algebraischer Form gegebenen Ellipsenbogen Γ .

Aufgabe 69. (Evolute des Kreises)

Der Endpunkt eines straff gespannten, vom Einheitskreis abgewickelten Fadens der Länge π beschreibt eine ebene Kurve, die **Evolute** des Kreises. Die Anfangslage des Fadenendes sei der Punkt $(1, 0)$; es wird gegen den Uhrzeigersinn abgewickelt.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $\gamma(t)$ des Evolutenbogens, die Koordinaten des Fadenendes, nachdem der Faden vollständig abgewickelt ist, sowie die Länge der Evolute.

Aufgabe 70. (Rektifizierbarkeit)

Zeigen Sie, dass die durch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \left(t, t^2 \cos \frac{\pi}{t^2} \right) \quad \text{und} \quad \gamma(0) = (0, 0)$$

parametrisierte Kurve differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist und auch keine endliche Länge besitzt.

Aufgabe 71. (Zykloide)

Ein Rad mit Radius $R > 0$ rollt mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ über die x -Achse. Auf dem Rad ist ein Punkt $P = (p_1, p_2)$ markiert (wobei der Abstand von P zur Radachse auch mehr als R betragen darf).

1. Habe die Radachse zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten $M(0) = (0, R)$ und habe $P(0)$ die Koordinaten $p_1(0) = 0$ und $p_2(0) = R + r$. Bestimmen Sie die Position $x = p_1(t)$ und $y = p_2(t)$ des Punktes zur Zeit t .

Hinweis: Addieren Sie zum Positionsvektor $M(t)$ der Radachse den um den Winkel $\alpha(t)$ rotierenden Verbindungsvektor zwischen $M(t)$ und $P(t)$.

2. Bestimmen Sie die Zeiten t , zu denen die Momentangeschwindigkeit $\|\dot{P}(t)\|$ maximal bzw. minimal wird. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
3. Zeichnen Sie die Positionskurven von P_r für $R = 1$, $t \in [0, 6\pi]$ und $r \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ in ein gemeinsames Schaubild.

Aufgabe 72. (Parametrisierung von Kurven und Flächen)

Skizzieren Sie (wenn's geht ohne vorherige Zuhilfenahme von Graphikprogrammen) die folgenden Objekte:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathbb{R}) \text{ für } \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2 & \Gamma_1([0, 2\pi] \times [0, 1]) \text{ für } \Gamma_1(u, v) &= \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ v \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \gamma_2(\mathbb{R}) \text{ für } \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3 & \Gamma_2([0, 2\pi] \times [0, \pi]) \text{ für } \Gamma_2(u, v) &= \begin{pmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 73. (Geometrie des Torus)

1. Finden Sie eine Parametrisierung $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Torus ("Doughnuts") mit "Durchmesser" R und "Dicke" r .

Hinweis: Definieren Sie zunächst einen Kreis in der xy -Ebene vom Radius R und lassen Sie anschließend um diesen einen Kreis mit Radius r rotieren.

2. Sei $P = f(u, v)$ ein Punkt auf dem Torus. Parametrisieren Sie die Tangentialebene an den Torus in P .
3. Seien $x \in [0, 2\pi]^2$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve $\gamma(t) = f(x + t\xi)$. Wie wirken sich große bzw. kleine Komponenten von ξ aus?

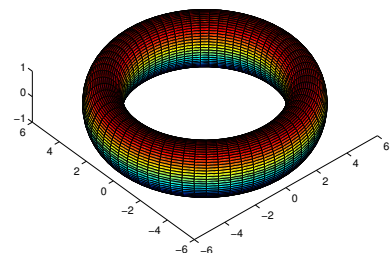


Fig. 19: Ein dreidimensionaler Torus.

Aufgabe 74. (Kugelkoordinaten)

Betrachten Sie die Transformationsabbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

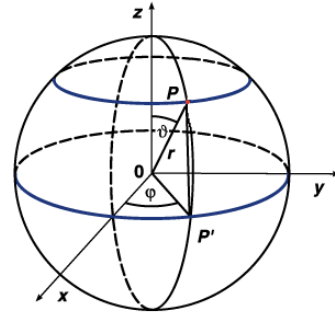


Fig. 20: Sphärische Koordinaten im \mathbb{R}^3 .

- Leiten Sie anhand der Skizze den Übergang von sphärischen zu kartesischen Koordinaten her.

Hinweis: Führen Sie geeignete rechtwinklige Dreiecke ein und drücken Sie mittels trigonometrischer Funktionen Kanten über Winkel aus.

- Zeigen Sie:

- Φ ist in jedem Punkt (x, y, z) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar.
- Φ ist in keinem Punkt auf der z -Achse lokal umkehrbar.
- Φ ist bijektiv als Abbildung

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = 0 \ \& \ y = 0\}$$

Leiten Sie dazu die Darstellung der Umkehrfunktion durch Auflösen nach r, ϑ, φ her.

- Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe 75. (Toruskoordinatentransformation)

Ein Torus mit Radien $0 < r < R$ lässt sich durch die folgende Nullstellenmenge darstellen:

$$\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

- Zeigen Sie: Die Gleichung ist in jedem Punkt auf dem Torus lokal nach einer der Variablen auflösbar.
- Bestimmen Sie mittels impliziten Differenzierens die Ableitungen der Auflösungsfunktion $x = x(y, z)$.
- Geben Sie für jeden Punkt (x, y, z) auf dem Torus mit $x, y, z \neq 0$ und $x^2 + y^2 \neq R^2$ die Auflösungsfunktionen nach x, y und z explizit an.
- Leiten Sie die x -Auflösung nach y, z ab und überprüfen Sie, ob Ihr Resultat mit den zuvor bestimmten impliziten Ableitungen übereinstimmt.

Aufgabe 76. (Transformation von Integralgrenzen)

Vertauschen Sie bei den folgenden beiden Integralen die Integrationsreihenfolge.

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx, \quad \int_0^1 \int_{2x}^{3x} g(x, y) \, dy \, dx.$$

Hinweis: Das Ziel der Aufgabe besteht in der korrekten Transformation der Integrationsgrenzen.

Aufgabe 77. (Iterative Integration)

Bezeichne \square den Quader $[1, 2] \times [2, 4] \times [0, 2]$, Δ das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, -1)$, A die Fläche zwischen der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ und \bigcirc der Einheitskreis um 0. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\square} \frac{2z}{(x+y)^2} \, d(x, y, z), \quad \int_{\Delta} x + 2y^2 \, d(x, y), \quad \int_A x\sqrt{y} \, d(x, y), \quad \int_{\bigcirc} |x| + 3|y| \, d(x, y).$$

Aufgabe 78. (Satz von Fubini)

1. Berechnen Sie über dem Dreieck Δ mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ das Integral

$$\int_{\Delta} \frac{\sin x}{x} d(x, y).$$

2. Berechnen Sie – falls möglich – für die Funktion $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ die Integrale

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dy dx, \quad \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dx dy, \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y).$$

3. Zeigen Sie, dass für die Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2} \quad (0 < x < y \leq 1), \quad f(x, y) = -\frac{1}{x^2} \quad (0 < y < x \leq 1), \quad 0 \text{ sonst}$$

die Integrationsreihenfolge nicht vertauscht:

$$\iint_{0 \ 0}^{1 \ 1} f(x, y) dy dx \neq \iint_{0 \ 0}^{1 \ 1} f(x, y) dx dy.$$

Aufgabe 79. (Transformationssatz)

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_1^{\min\{y^{-\frac{1}{4}}, \pi\}} x^5 \cos(x^5 y) dx dy.$$

Aufgabe 80. (Volumen von Schnittkörpern)

Berechnen Sie die Volumina der folgenden Körper im $A \subseteq \mathbb{R}^3$:

1. A ist der Schnittkörper des unendlichen Quaders $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ mit den beiden Halbräumen $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq -x - 2y\}$ und $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 2x + y\}$.
2. A ist derjenige Körper, der vom Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, von der Fläche $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ und von der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x + y = 1\}$ begrenzt wird.
3. A wird durch die beiden Paraboloiden $\{z = x^2 + y^2\}$ und $\{z = 8 - x^2 - y^2\}$ berandet.

Aufgabe 81. (Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern)

1. Berechnen Sie das Volumen des in sphärischen Koordinaten gegebenen Kegels

$$K_1 = \left\{ (r, \varphi, h) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \left[0, \frac{hR}{H}\right], \varphi \in [0, 2\pi], h \in [0, H] \right\}.$$

2. Berechnen Sie die Oberfläche des in kartesischen Koordinaten gegebenen Kegels

$$K_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) \right\}.$$

Aufgabe 82. (Schwerpunkt des Kugeloktanten)

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Körpers

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}.$$

Hinweis: Der Schwerpunkt einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$S = \frac{1}{\text{vol}(A)} \int_A x dx = \frac{1}{\int_A 1 dx} \left(\int_A x_1 dx, \dots, \int_A x_n dx \right).$$

Aufgabe 83. (Integration mit Zylinderkoordinaten)

1. Zeigen Sie, dass für die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$$

gelten: Φ ist auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ injektiv und das Bild von $\mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ unter Φ ist ganz \mathbb{R}^3 .

2. Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\det(d\Phi)$.

3. Berechnen Sie die Volumina des Halbzylinders

$$Z_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0 \ \& \ 0 \leq z \leq h \ \& \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

und des Hohlzylinders

$$Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h \ \& \ R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}.$$

4. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{Z_2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z).$$

Aufgabe 84. (Integration mit Tetraederkoordinaten)

Seien $a, b, c > 0$. Betrachten Sie die Punkte $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$ und $(0, 0, c)$, welche im \mathbb{R}^3 eine Ebene E definieren.

1. Definieren Sie die Menge aller Punkte $V \subseteq \mathbb{R}^3$, welche zwischen E und den Koordinatenebenen liegen.

2. Berechnen Sie das Volumen von V .

3. Berechnen Sie

$$\int_V x^2 y d(x, y, z).$$

4. Führen Sie (2) und (3) unter Verwendung der Substitutionsregel durch, d.h. definieren Sie eine Koordinatentransformation $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die den Einheitswürfel des \mathbb{R}^3 stetig differenzierbar auf das Tetraeder V abbildet, und benutzen Sie dann die Transformationsformel.

Aufgabe 85. (Stochastische Integrale)

1. Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $(\int \exp(-x^2) dx)^2 = (\int \exp(-x^2) dx)(\int \exp(-y^2) dy)$, wenden Sie den Reduktionssatz an und rechnen Sie anschließend in Polarkoordinaten.

2. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $Q(x) = x^T A x$ die zugehörige quadratische Form. Berechnen Sie in Abhängigkeit der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx.$$

Aufgabe 86. (Oberflächenintegral)

Seien $h > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Wendelfläche mit Ganghöhe h und Umdrehungszahl n :

$$\Phi(t, \varphi) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, h\varphi) \quad 0 \leq t \leq R, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi n.$$

Aufgabe 87. (Guldinsche Formeln & Transformationssatz)

Rotiert der Graph einer stetigen Funktion $f \in C^0([a, b], [0, \infty))$ um die x -Achse, so entsteht ein dreidimensionaler Körper, dessen Volumen und Oberfläche gegeben sind durch die Formeln

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx, \quad O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

1. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche einer Kugel vom Radius R durch Rotation eines Kreisbogens um die x -Achse.
2. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche eines Torus mit Radien r, R durch Rotation eines Kreises mit Radius r und Mittelpunkt $(0, R)$ um die x -Achse.
3. Berechnen Sie nun mittels Transformationssatz das Volumen und die Oberfläche der Kugel und des Torus.

Aufgabe 88. (Vivianisches Fenster)

Das Vivianische Fenster entsteht durch den Schnitt eines Zylinders Z mit einer Kugel K ,

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\},$$

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}.$$

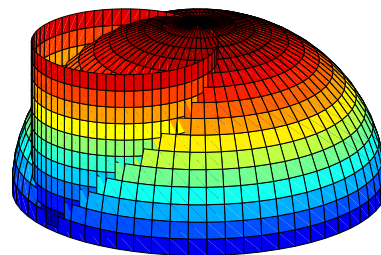


Fig. 21: Vivianisches Fenster als Schnitt eines Zylinders mit einer Kugel.

1. Berechnen Sie die Zylinderoberfläche innerhalb der Kugel und die Kugeloberfläche innerhalb des Zylinders.
2. Bestimmen Sie das Volumen des Schnittkörpers.

Aufgabe 89. (Integralsatz von Gauß)

1. Verifizieren Sie den Satz von Gauß im \mathbb{R}^3 für einen Zylinder Z des Radius R und der Höhe H und das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \ \& \ 0 \leq z \leq H\}, \quad v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z + x \end{pmatrix},$$

d.h. zeigen Sie, dass das Volumenintegral der Quelldichte gleich dem Fluss über die Oberfläche ist:

$$\int_Z \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial Z} \langle v, \nu \rangle \, dS.$$

2. Zeigen Sie, dass die Gaußsche Integralformel nicht für die Integration des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ über den Viertelkreis K gilt:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \ \& \ x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad v(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 90. (Integralsatz von Stokes)

Verifizieren Sie den Satz von Stokes im \mathbb{R}^3 für die Fläche Ω und die Vektorfunktion $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2 \ \& \ x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix},$$

d.h. zeigen Sie, dass das Flächenintegral der Wirbelldichte gleich der Zirkulation längs des Randes ist:

$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} v, \nu \rangle \, dS = \int_{\partial \Omega} \langle v, \tau \rangle \, ds.$$

Index

A

abgeschlossene Menge	7
Ableitung	18, 23
Abschluss	8
Anfangspunkt	36
Äquivalenz von Normen	15
Auflösungsfunktion	26

B

Banachraum	9
Beschränktheit	10
Binormalenvektor	32
Bogenlängenparametrisierung	31
Bolzano-Weierstraß, Satz von	14
Burgers-Gleichung	61

C

Cauchyfolge	9
Charakteristikenmethode	25
charakteristische Funktion	42

D

Definitheit	5f
Definitheitskriterien	28
Dichte	40
Diffeomorphismus	26
Differenzialgleichung	22
Differenzierbarkeit	18
stetige	20
Diskretisierung	22
Dreiecksungleichung	5f
Durchmesser	10

E

Einheitskugel	6
1-Form	35
exakte	36
Einsnorm	5
Endpunkt	36
euklidische Norm	5
Evolute	64
Extremstelle, globale	27
Extremstelle, isolierte	27
Extremstelle, lokale	27

F

fast überall	41
Finite Differenz	22
Fläche	33
Flächeninhalt	47

G

Gauß, Satz von	49
Gebiet	48
Gradient	20
Gramsche Determinante	47
Graph	17

Greensche Formeln	52
Grenzwert	9

H

Höhenlinie	17
Hölder-Stetigkeit	12
Hauptminor	28
Hauptsatz für Kurvenintegrale	36
Hausdorffsches Trennungsaxiom	6
Heine-Borel, Satz von	15
Helix	32
Hessematrix	23
Homogenität	57
Hurwitz-Kriterium	28

I

implizite Funktionen, Satz über	26
indefinit	28
Inneres	8

J

Jacobimatrix	20
--------------	----

K

kartesisches Produkt	3
Kettenregel	20
Kompaktheit	13
konvergent	9
konvex	21, 59
Koordinatensystem, lokales	48
Koordinatentransformation	26
Koordinatenumgebung	48
Krümmung	32
Krümmungsradius	33
kritische Stelle	28
Kugel	6
Kurve	30
geschlossene	36
stückweise	36
Kurvenparametrisierung	30

L

Länge	31
Lagrangemultiplikator	29
Lipschitz-Stetigkeit	12
lokale Umkehrbarkeit, Satz über	24

M

Mannigfaltigkeit	48
Maximum, globales	27
Maximum, lokales	27
Maximumsnorm	5
Metrik	6
metrischer Raum	6
Minimum, globales	27
Minimum, lokales	27
Mittelpunkt	6

Mittelwertsatz	22
Monom	13
Multiindex	13, 24
Multiplikativität	5
N	
negativ definit	28
negativ semidefinit	28
Norm	5
Normaleneinheitsvektor	32
Normalenfeld	49
Normalenvektor, äußerer	49
Normalraum	48
normierter Raum	5
O	
Oberflächenintegral	47
Oberintegral	41
Obersumme	41
offene Menge	7
Optimalitätsbedingung erster Ordnung	28
Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung	28f
P	
\mathcal{L}^p -Norm	5
p -Norm	5
Paraboloid	17
parameterabhängige Integrale, Satz über	39
Parameterdarstellung	33
Parameterwechsel	30, 33
partielle Ableitung	17
partielle Differenzierbarkeit	17
Poincaré, Lemma von	38
Polarkoordinaten	26, 46
Polynom	13
positiv definit	28
positiv semidefinit	28
Positivität	5
Produktregel	21
punktfremd	6
Q	
Quader	41
Quotientenregel	21
R	
Radius	6
Rand	8
Rand, glatter	48
Randpunkt	8
rationale Funktion	13
Raumkurve	32
Reduktionssatz	42
Richtungsableitung	17
Riemann-Integral	41
Riemann-Integrierbarkeit	41
Rotation	40
S	
Sattelpunkt	28

Schrittweite	22
Schwarz, Satz von	23
Selektion	13
Sphäre	8
Stammfunktion	36
Stereographische Projektion	33
sternförmiges Gebiet	38
Stetigkeit	11
Stokes, Integralsatz von	52
Summenregel	21
Supremumsnorm	5
Symmetrie	6
T	
Tangenteneinheitsvektor	32
Tangentialebene	4
Tangentialraum	48
Taylor, Satz von	23
Teilrechteck	41
Topologie	7
topologischer Raum	7
Torsion	32
Torus	34
totales Differenzial	18
Träger	49
Transformationsatz	46
Treppenfunktion	43
Tupel	3
U	
Überdeckung	13
Umgebung	6
Unterintegral	41
Untersumme	41
unwesentlich	41
V	
Vektorfeld	35
rotationsfreies	40
Vollständigkeit	9
Volumen	41f
W	
Wahrscheinlichkeitsdichte	40
Weg	21
Wegintegral	35
wegzusammenhängend	21
Wellengleichung	22
Z	
Zerlegung der Eins	49
Zusammenhang	16
Zwischenwertsatz	16
Zylinderkoordinaten	46

Literaturverzeichnis

- [1] Alber, H.-D.: *Analysis II*. Lecture Notes Darmstadt University, p. 161, 2009.
- [2] Albrecht, E.: *Analysis 1 und 2*. Vorlesungsskript Universität Saarbrücken, p. 243, 2006.
- [3] Amann, H.: *Analysis 2*. Birkhäuser, 3rd ed., 2008.
- [4] Balsler, W.: *Analysis II*. Vorlesungsskript Universität Ulm, p. 89, 2009.
- [5] Baum, H.: *Analysis I & II*. Vorlesungsskript Universität Berlin, p. 438, 2007.
- [6] Blatter, C.: *Analysis II*. 152, Springer-Verlag, 1st ed., 1974.
- [7] Bruns, W.: *Analysis II*. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe V, EHeft 11, p. 136, 2004.
- [8] Busam, R.: *Analysis I & II*. Vorlesungsskript Universität Heidelberg, p. 520, 2007.
- [9] Denk, R. & Racke, R.: *Kompendium der Analysis, Band 1*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [10] Ebeling, W.: *Analysis II*. Vorlesungsskript Universität Hannover, p. 96, 2003.
- [11] Ebeling, W. & Köditz, H.: *Analysis II Übungen*. Vorlesungsskript Universität Hannover, p. 27, 2003.
- [12] Ferus, D.: *Analysis II*. Vorlesungsskript Technische Universität Berlin, p. 136, 2007.
- [13] Forster, O.: *Analysis 2*. Vieweg+Teubner Verlag, 9th ed., 2010.
- [14] Forster, O. & Szymczak, T.: *Übungsbuch zur Analysis 2*. Vieweg Studium, 4th ed., 2005.
- [15] Freistühler, H.: *Analysis I und II*. Vorlesungsskript Universität Konstanz, p. 107, 2013.
- [16] Grothmann, R.: *Analysis I & II*. Vorlesungsskript Universität Eichstätt-Ingolstadt, p. 132, 2011.
- [17] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Vieweg + Teubner, 14th ed., 2012.
- [18] Knauf, A.: *Analysis II*. Vorlesungsskript Universität Erlangen-Nürnberg, p. 121, 2005.
- [19] Königsberger, K.: *Analysis 2*. Springer-Lehrbuch, 5th ed., 2004.
- [20] Kuwert, E.: *Analysis II*. Vorlesungsskript Universität Freiburg, p. 86, 2007.
- [21] Lembcke, J.: *Elemente der Analysis*. Vorlesungsskript Universität Erlangen-Nürnberg, p. 324, 2006.
- [22] Maier, H.: *Analysis I & II*. Vorlesungsskript Universität Ulm, p. 142, 2005.
- [23] Maier, H. & Haase, D.: *Analysis II Übungen*. Vorlesungsskript Universität Ulm, p. 59, 2005.
- [24] Müller, D.: *Analysis II*. Vorlesungsskript Universität Kiel, p. 133, 2010.
- [25] Rannacher, R.: *Analysis 2*. Vorlesungsskript Universität Heidelberg, p. 266, 2010.
- [26] Rannacher, R.: *Analysis 2 Übungen*. Vorlesungsskript Universität Heidelberg, p. 56, 2010.
- [27] Riemenschneider, O.: *Analysis II*. Vorlesungsskript Universität Hamburg, p. 282, 2004.
- [28] Timmann, S.: *Repetitorium der Analysis, Teil 2*. Binomi Verlag, 1st ed., 2002.
- [29] Walter, W.: *Analysis 2*. Springer-Lehrbuch, 5th ed., 2013.