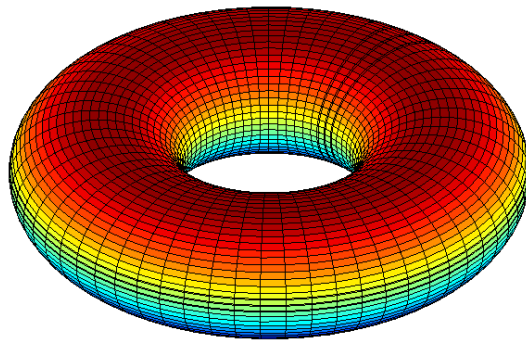


Skript zur Vorlesung

# Topologie



gelesen von

Dr. K. J. Becher

Martin Gubisch

Konstanz, Sommersemester 2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Varianten des Auswahlaxioms</b>	<b>3</b>
1.1 Geordnete Mengen	3
1.2 Auswahlaxiom und Lemma von Zorn	5
1.3 Der Wohlordnungssatz	7
<b>2 Topologische Räume</b>	<b>8</b>
2.1 Topologien	8
2.2 Metrisierbarkeit	9
2.3 Umgebungen	10
2.4 Inneres und Abschluss	11
2.5 Basen und Subbasen	13
2.6 Unterräume	15
2.7 Abzählbarkeitseigenschaften	16
<b>3 Stetigkeit</b>	<b>18</b>
3.1 Abbildungen zwischen topologischen Räumen	18
3.2 Initialtopologien	21
3.3 Finaltopologien	22
3.4 Ringe stetiger Funktionen	24
<b>4 Konvergenz</b>	<b>25</b>
4.1 Folgen	25
4.2 Netze	27
4.3 Filter	28
4.4 Ultrafilter	31
<b>5 Kompaktheit</b>	<b>32</b>
5.1 Charakterisierung kompakter Räume	32
5.2 Kompakte Mengen in Hausdorffräumen	35
5.3 Die Alexandroff-Kompaktifizierung	36
<b>6 Trennung</b>	<b>38</b>
6.1 Trennungsaxiome	38
6.2 Normale und reguläre Räume	40
6.3 Vollständig reguläre Räume	43
<b>7 Produkte</b>	<b>44</b>
7.1 Struktur von Produkträumen	44
7.2 Trennung in Produkten	46
7.3 Die Sätze von Tychonoff	47
7.4 Die Stone-Cech-Kompaktifizierung	48
7.5 Abzählbare Produkte	50
<b>8 Zusammenhang</b>	<b>52</b>
8.1 Zusammenhängende Mengen	52
8.2 Wege	55
8.3 Lokaler Zusammenhang	57
<b>9 Kontraktion</b>	<b>58</b>
9.1 Homotopien	58
9.2 Homotopie-Äquivalenz und Zusammenziehbarkeit	60
9.3 Verknüpfung und Homotopie von Wegen	63
<b>10 Überlagerung</b>	<b>65</b>
10.1 Lokale Homöomorphismen	65
10.2 Hebung von Wegen und Homotopien	69
<b>11 Die Fundamentalgruppe</b>	<b>72</b>
11.1 Schleifen	72
11.2 Einfach zusammenhängende Räume	74
11.3 Die Fundamentalgruppe des Kreises	75
<b>Übungsaufgaben</b>	<b>76</b>

# 1 Varianten des Auswahlaxioms

## 1.1 Geordnete Mengen

### DEFINITION 1.1

Sei  $X$  eine Menge.  $\sigma \in X \times X$  heißt *Anordnung* auf  $X$ , falls gilt:

(O1)  $\forall x, y, z \in X : (x, y) \in \sigma$  und  $(y, z) \in \sigma \Rightarrow (x, z) \in \sigma$  (*Transitivität*),

(O2)  $\forall x \in X : (x, x) \in \sigma$  (*Reflexivität*) und

(O3)  $\forall x, y \in X : (x, y) \in \sigma$  und  $(y, x) \in \sigma \Rightarrow x = y$  (*Antisymmetrie*).

$\sigma \subseteq X \times X$  heißt *totale* bzw. *lineare Ordnung*, falls zusätzlich gilt:

(O4)  $\forall x, y \in X : (x, y) \in \sigma$  oder  $(y, x) \in \sigma$  (*Linearität*).

Wir nennen  $(X, \sigma)$  eine (*an*)geordnete bzw. *total geordnete Menge*.

### BEMERKUNG 1.2

Sei  $(X, \sigma)$  eine angeordnete Menge. Dann gilt:

(1) Für  $Y \subseteq X$  ist  $\sigma|_Y := \sigma \cap (Y \times Y)$  eine Anordnung auf  $Y$ .

(2) Ist  $\sigma$  total, dann ist auch  $\sigma|_Y$  total.

(3)  $\bar{\sigma} := \{(y, x) \mid (x, y) \in \sigma\}$  definiert eine Anordnung.

(4)  $\sigma$  total  $\Leftrightarrow \bar{\sigma}$  total.

### DEFINITION 1.3

Sei  $(X, \sigma)$  eine angeordnete Menge.  $Y \subseteq X$  heißt eine *Kette* (bzgl.  $\sigma$ ), falls  $\sigma|_Y$  linear ist.

### NOTATION 1.4

Wir können eine Anordnung  $\sigma$  auf  $X$  auch mit einem *Infix-Symbol*  $<$  (oder  $\leq, \prec, \subseteq, \dots$ ) bezeichnen, indem wir  $x < y$  statt  $(x, y) \in \sigma$  schreiben. Dann ersetzen wir auch  $(X, \sigma)$  durch  $(X, <)$ .

### DEFINITION 1.5

Sei  $(X, <)$  eine angeordnete Menge,  $A \subseteq X$ . Ein Element  $c \in X$  heißt ...

(1) *Supremum* von  $A$ , falls  $\forall x \in X : c < x \Leftrightarrow (\forall y \in A : y < x)$ .

(2) *Infimum* von  $A$ , falls  $\forall x \in X : x < c \Leftrightarrow (\forall y \in A : x < y)$ .

(3) *maximales Element* von  $A$ , falls  $c \in A$  und  $\forall x \in A : (c < x \Rightarrow c = x)$ .

(4) *minimales Element* von  $A$ , falls  $c \in A$  und  $\forall x \in A : (x < c \Rightarrow c = x)$ .

### BEMERKUNG 1.6

$A$  hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.

Ist  $c \in A$  Supremum (Infimum) von  $A$ , so ist  $c$  das einzige maximale (minimale) Element von  $A$ .  $c$  wird dann *Maximum (Minimum)* genannt.

### NOTATION 1.7

$\sup(A)$ ,  $\inf(A)$ ,  $\max(A)$ ,  $\min(A)$  (falls vorhanden).

### DEFINITION 1.8

Ist  $\mathcal{A}$  eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind, so nennt man  $\mathcal{A}$  ein *Mengensystem*.

Wir setzen  $\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$  und analog  $\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ .

**BEISPIEL 1.9**

Zu einer Menge  $M$  ist  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$  ( $\mathcal{P}(M) := \{A \subseteq M\}$ ) eine bzgl. der Mengeninklusion  $\subseteq$  geordnete, aber nicht linear geordnete Menge (die *Potenzmenge*).

Außerdem gibt es zu  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$  stets Supremum und Infimum in  $\mathcal{P}(M)$ : Es gilt nämlich  $\sup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$  und  $\inf(\mathcal{A}) = \bigcap \mathcal{A}$ .

**KONVENTION 1.10**

Wir setzen  $\bigcup \emptyset := \emptyset$  und  $\bigcap \emptyset := M$ .

**LEMMA 1.11**

Seien  $M$  eine Menge und  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$  derart, dass für jede Kette  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$  gilt:  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ . Weiter sei  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  eine Abbildung mit  $A \subseteq f(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{F}$ .

Dann gibt es ein  $X_0 \in \mathcal{F}$  mit  $f(X_0) = X_0$  (d.h.  $X_0$  ist ein *Fixpunkt* von  $f$ ).

**BEWEIS**

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$  heiße *f-induktiv*, falls gelten:

- (1)  $f(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ , d.h.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{F}$ .
- (2) Für jede Kette  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$  gilt:  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$ .

Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{F}$  *f-induktiv*, weiter ist  $\mathcal{F}_0 := \bigcap \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \mid \mathcal{A} \text{ ist } f\text{-induktiv} \}$  ebenfalls *f-induktiv* und somit das kleinste *f-induktive* Teilmengensystem in  $\mathcal{F}$ .

Wir wollen für  $X_0 := \bigcup \mathcal{F}_0$  zeigen:  $f(X_0) = X_0$ . Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{ A \in \mathcal{F}_0 \mid \forall B \in \mathcal{F}_0 : B \subsetneq A \Rightarrow f(B) \subseteq A \} \text{ und} \\ \mathcal{H}_A &:= \{ B \in \mathcal{F}_0 \mid B \subseteq A \text{ oder } f(A) \subseteq B \} \text{ für alle } A \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Dann ist für  $A \in \mathcal{H}$  das System  $\mathcal{H}_A$  *f-induktiv*:

- (1) Sei  $A' \in \mathcal{H}_A$ . Dann  $A' \in \mathcal{F}_0$  und ( $A' \subseteq A$  oder  $f(A) \subseteq A'$ ), d.h.  $A' \in \mathcal{F}_0$  und ( $A' \subsetneq A$  oder  $f(A) \subseteq A'$ ), also ( $f(A') \subseteq A$  oder  $A' = A$  oder  $f(A) \subseteq f(A')$ ). Nach der Definition von  $\mathcal{H}_A$  folgt dann:  $f(A') \in \mathcal{H}_A$ .
- (2) Sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}_A$  eine Kette. Dann  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$  und ( $\bigcup \mathcal{C} \subseteq A$  oder es gibt ein  $C_0 \in \mathcal{C}$  mit  $C_0 \not\subseteq A$ ). Nach der Definition von  $\mathcal{H}_A$  folgt dann:  $\bigcup \mathcal{C} \subseteq A$  oder es gibt  $C_0 \in \mathcal{C}$  mit  $f(A) \subseteq C_0 \subsetneq \bigcup \mathcal{C}$ . Also  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{H}_A$ .

Also gilt für  $A \in \mathcal{H}$  stets  $\mathcal{H}_A = \mathcal{F}_0$  bzw.

$$\forall A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{F}_0 : B \subseteq A \text{ oder } f(A) \subseteq B. \quad (*)$$

$\mathcal{H}$  ist *f-induktiv*:

- (1) Sei  $A \in \mathcal{H}$ . Dann  $A \in \mathcal{F}_0$  und somit  $f(A) \in \mathcal{F}_0$ . Wegen (\*) gilt für  $B \in \mathcal{F}_0$  mit  $B \subsetneq f(A) : B \subseteq A$ . Weiter folgt nach Voraussetzung:  $B \subsetneq A \Rightarrow f(B) \subseteq A \subseteq f(A)$ , also stets  $f(B) \subseteq f(A)$ .
- (2) Sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$  Kette. Dann  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_0$  und somit  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$ . Für  $B \in \mathcal{F}_0$  mit  $B \subsetneq \bigcup \mathcal{C}$  gibt es  $C_0 \in \mathcal{C}$  mit  $C_0 \not\subseteq B$  und wegen  $C_0 \subseteq f(C_0)$  folgt dann  $f(C_0) \not\subseteq B$ . Also (\*)  $B \subsetneq C_0$ . Nach Definition von  $\mathcal{H}$  ist dann  $f(B) \subseteq C_0 \subseteq \bigcup \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{H}$ .

Also ist auch  $\mathcal{H} = \mathcal{F}_0$  und mit (\*) gilt für alle  $A, B \in \mathcal{F}_0 : B \subseteq A$  oder  $A \subseteq f(A) \subseteq B$ . Also ist  $\mathcal{F}_0$  eine Kette.

Sei nun  $X_0 := \bigcup \mathcal{F}_0$ . Dann  $X_0 \in \mathcal{F}_0$ , also  $f(X_0) \in \mathcal{F}_0$  und somit  $X_0 \subseteq f(X_0) \subseteq \bigcup \mathcal{F}_0 = X_0$ , also  $f(X_0) = X_0$ .

## 1.2 Auswahlaxiom und Lemma von Zorn

**DEFINITION 1.12**

Für eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  sei

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Dies heißt das *kartesische Produkt* über  $(X_i)_{i \in I}$ .

**NOTATION 1.13**

Für  $f \in \prod_{i \in I} X_i$  schreiben wir meist  $(x_i)_{i \in I}$ , wobei  $x_i = f(i) \in X_i$ .

**AXIOM 1.14 (Auswahlaxiom nach Zermelo, 1904)**

Ist  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von nicht-leeren Mengen, so ist  $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ .

**BEMERKUNG 1.15**

Äquivalente Formulierung: Zu jeder Menge  $X$  gibt es eine *Auswahlfunktion*  $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$  derart, dass  $c(U) \in U$  für jedes  $U \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  ist.

**SATZ 1.16 (Hausdorff)**

In einer geordneten Menge  $(X, <)$  gibt es stets eine maximale Kette.

**BEWEIS**

Sei  $\mathcal{F} := \{C \in \mathcal{P}(X) \mid (C, <) \text{ ist Kette}\}$ . Für jede Kette  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$  (bzgl.  $\subseteq$  auf  $\mathcal{P}(X)$ ) ist  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ , denn zu  $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$  gibt es stets  $C_0 \in \mathcal{C}$  mit  $x, y \in C_0$ , da  $\mathcal{C}$  Kette. Dann ist  $(C_0, <)$  eine Kette, also  $x < y$  oder  $y < x$ .

Zu  $A \in \mathcal{F}$  sei  $\mathcal{F}_A = \{B \in \mathcal{F} \mid A \subsetneq B\}$ .

Angenommen,  $\mathcal{F}$  hätte kein maximales Element. Dann gilt für alle  $A \in \mathcal{F}$ :  $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$ . Nach dem Auswahlaxiom gilt dann auch  $\prod_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{F}_A \neq \emptyset$ .

Es gibt also ein  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $f(A) \in \mathcal{F}_A$  für alle  $A \in \mathcal{F}$ , d.h.  $A \subsetneq f(A)$  im Widerspruch zu Lemma 1.10. Damit hat  $\mathcal{F}$  ein maximales Element, d.h. es gibt eine maximale Kette in  $(X, <)$ .

**SATZ 1.17 (Lemma von Zorn, 1935)**

Sei  $(X, <)$  eine geordnete Menge derart, dass jede Kette in  $(X, <)$  eine obere Schranke in  $X$  hat. Dann gibt es zu jedem  $a \in X$  stets ein maximales Element  $m \in X$  mit  $a < m$ .

Insbesondere hat  $X$  ein maximales Element.

**BEWEIS**

Sei  $a \in X$ ,  $X_a = \{x \in X \mid a < x\}$ . Nach dem Satz von Hausdorff gibt es in  $(X_a, <)$  eine maximale Kette  $C$ . Für diese gilt: Liegt  $y$  in  $X_a$  mit  $(\forall x \in C : x < y)$  oder  $(\forall x \in C : y < x)$ , so folgt jeweils  $y \in C$ , denn sonst wäre  $C \cup \{y\}$  eine Kette bzgl.  $<$ , die  $C$  echt enthält im Widerspruch zur Maximalität von  $C$ . Insbesondere gilt  $a \in C$ .

Nach Voraussetzung hat  $C$  eine obere Schranke  $m$  in  $X$ . Dann  $a < m$ , also  $m \in X_a$ . Bleibt zu zeigen, dass  $m$  ein maximales Element von  $X$  ist. Sei dazu  $m' \in X$  mit  $m < m'$ . Für  $x \in C$  gilt dann  $x < m < m'$ , also  $x < m'$ . Also ist auch  $C \cup \{m'\}$  eine Kette in  $X_a$ . Da  $C$  eine maximale Kette in  $X_a$  ist, muss also  $m'$  in  $C$  liegen und damit folgt insbesondere  $m' < m$ . Da jedoch auch  $m < m'$  gilt, folgt  $m' = m$ .

**BEMERKUNG 1.18** ( $\rightarrow$  Aufgabe 1)

- (1) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- (2) Zu zwei beliebigen Mengen  $X$  und  $Y$  gibt es stets eine injektive Abbildung  $X \rightarrow Y$  oder eine injektive Abbildung  $Y \rightarrow X$ .  
Zu jeder surjektiven Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gibt es eine injektive Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$ .
- (3) Jede Äquivalenzrelation induziert ein vollständiges Vertretersystem der Äquivalenzklassen.
- (4) Jedes Ideal eines kommutativen Rings mit Eins ist in einem maximalen Ideal enthalten.
- (5) Seien  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $U$  ein Unterraum von  $V$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges Funktional. Dann existiert eine Fortsetzung  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F|_U = f$  und  $\|F\| = \|f\|$  (**Hahn-Banach**).
- (6) Das Produkt kompakter topologischer Räume ist kompakt (**Tychonoff**, Kap. 7.3).
- (7) Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten (Kap. 4.4).
- (8) Jeder Körper ist in einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper enthalten.

### 1.3 Der Wohlordnungssatz

**DEFINITION 1.19**

Eine geordnete Menge  $(X, <)$  heißt *wohlgeordnet*, falls jede nicht-leere Teilmenge von  $X$  ein bzgl.  $<$  kleinstes Element hat.

**BEMERKUNG 1.20**

Also heißt  $\sigma \in X \times X$  *Wohlordnung* auf  $X$ , falls  $(X, \sigma)$  wohlgeordnet ist.

**BEMERKUNG 1.21**

Jede wohlgeordnete Menge ist total geordnet, denn zu  $x, y \in X$  besitzt die Menge  $\{x, y\} \subseteq X$  stets ein kleinstes Element.

**BEISPIEL 1.22**

$(\mathbb{N}, \leq)$  ist wohlgeordnet, wobei  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  mit  $\leq$  wie üblich.

**SATZ 1.23 (Wohlordnungssatz von Zermelo)**

Auf jeder Menge  $X$  gibt es eine Wohlordnung.

**BEWEIS**

Sei  $\Omega$  definiert durch

$$\Omega := \{(U, \sigma) \mid U \subseteq X, \sigma \subseteq U \times U \text{ Wohlordnung auf } U\}.$$

Für  $(U, \sigma)$  und  $(V, \tau)$  setzen wir

$$(U, \sigma) < (V, \tau) :\Leftrightarrow U \subseteq V, \tau|_U = \sigma \text{ und } (\forall u \in U, v \in V : (u, v) \in \tau).$$

Dann ist  $(\Omega, <)$  eine geordnete Menge.

In  $(\Omega, <)$  hat jede Kette eine obere Schranke: Sei  $\mathcal{C} \subseteq \Omega$  eine Kette bzgl.  $<$ ,  $T := \bigcup\{U \subseteq X \mid (U, \sigma) \in \mathcal{C}\}$  und  $\tau := \bigcup\{\sigma \mid (U, \sigma) \in \mathcal{C}\} \subseteq T \times T$ . Für  $(U, \sigma) \in \mathcal{C}$  ist  $\tau|_U = \sigma$ . Damit ist  $\tau$  eine Anordnung auf  $T$ . Zu zeigen:  $\tau$  ist eine Wohlordnung auf  $\mathcal{C}$ . Sei  $M \subseteq T$ ,  $M \neq \emptyset$  gegeben. Dann gibt es  $(U_0, \sigma_0) \in \mathcal{C}$  mit  $M \cap U_0 \neq \emptyset$ . Da  $\sigma_0$  Wohlordnung, gibt es ein minimales Element  $m$  in  $M \cap U_0$  bzgl.  $\sigma_0 = \tau|_{U_0}$ . Also ist  $m \in M$ .

Noch zu zeigen:  $m$  ist minimal in  $M$  bzgl.  $\tau$ . Sei dazu  $x \in M$ . Liegt  $x$  in  $U_0$ , dann  $(m, x) \in \sigma_0 \subseteq \tau$ , da  $\tau|_{U_0} = \sigma_0$ . Andernfalls  $(x \in M \setminus U_0)$  gibt es  $(U_1, \sigma_1) \in \mathcal{C}$  mit  $x \in U_1 \Rightarrow U_1 \not\subseteq U_0$ , da  $x \in M \subseteq T$ . Dann gilt aber  $U_0 \subsetneq U_1$ , sogar  $(U_0, \sigma_0) < (U_1, \sigma_1)$ . Mit  $x \in U_1 \setminus U_0, m \in U_0 : (m, x) \in \sigma_1 \subseteq \tau$ . Also  $m$  minimal in  $M$  bzgl.  $\tau$ .

Damit ist  $(T, \tau) \in \Omega$  eine obere Schranke von  $\mathcal{C}$  in  $\Omega$ . Dann ist das Lemma von Zorn anwendbar; dies sichert die Existenz eines maximalen Elements  $(U, \sigma)$  in  $\Omega$  bzgl.  $<$ . Also ist  $(U, \sigma)$  eine wohlgeordnete Menge. Es genügt nun zu zeigen, dass  $U = X$  sein muss.

Angenommen,  $U \subsetneq X$ , d.h. es gibt  $v \in X \setminus U$ . Dann gilt  $(U, \sigma) \leq (V, \sigma') \in \Omega$  für  $V = U \cup \{v\}$  und  $\sigma' = \sigma \cup \{(x, v) \mid x \in V\}$ , Widerspruch.

**BEMERKUNG 1.24**

Aus dem Wohlordnungssatz gewinnen wir das Auswahlaxiom zurück. Sei nämlich  $X$  eine Menge, dazu  $<$  eine Wohlordnung auf  $X$ , dann definiert  $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ ,  $c(A) := \min(A)$  eine Auswahlfunktion auf  $X$ .

## 2 Topologische Räume

### 2.1 Topologien

**DEFINITION 2.1** (Alexandroff, 1925)

Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt ein Teilmengensystem  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  *Topologie* auf  $X$ , falls gilt:

(Top1) Für  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$  gilt  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$  (insbesondere  $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathcal{T}$ ).

(Top2)  $X \in \mathcal{T}$  und  $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$  (insbesondere  $X = \bigcap \emptyset \in \mathcal{T}$ ).

**BEMERKUNG 2.2**

Für  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$  endliches Teilmengensystem ist stets  $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ .

**DEFINITION 2.3**

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$  mit  $X$  Menge und  $\mathcal{T}$  Topologie auf  $X$ .

Ist auf  $X$  eine Topologie fixiert, so heißt  $U \subseteq X$  *offen*, falls  $U \in \mathcal{T}$ , und *abgeschlossen*, falls  $X \setminus U \in \mathcal{T}$ .

Damit ist  $\mathcal{T}$  das *System der offenen Teilmengen*.

Falls  $\mathcal{T}$  klar ist, wird auch  $X$  topologischer Raum genannt.

Die Elemente von  $X$  werden dann als *Punkte* bezeichnet.

**BEISPIEL 2.4**

(1)  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  heißt die *chaotische Topologie*.

(2)  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  wird als die *diskrete Topologie* bezeichnet.

(3)  $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid U = \emptyset \text{ oder } X \setminus U \text{ endlich}\}$  ist die *kofinale Topologie* auf  $X$ .

**DEFINITION 2.5**

Seien  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  zwei Topologien auf  $X$ .

$\mathcal{T}_1$  heißt *feiner* als  $\mathcal{T}_2$ , falls  $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$  (d.h. „offen bzgl.  $\mathcal{T}_1$ “  $\Rightarrow$  „offen bzgl.  $\mathcal{T}_2$ “).

$\mathcal{T}_1$  heißt *gröber* als  $\mathcal{T}_2$ , falls  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$  (d.h. falls  $\mathcal{T}_2$  feiner als  $\mathcal{T}_1$  ist).



## 2.2 Metrisierbarkeit

**DEFINITION 2.6 (Frechet, 1906)**

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Metrik* auf  $X$ , falls gilt:

- (1)  $\forall (x, y) \in X \times X : d(x, y) = d(y, x)$  (*Symmetrie*).
- (2)  $\forall (x, y) \in X \times X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (*Treue*).
- (3)  $\forall (x, y, z) \in X \times X \times X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (*Dreiecksungleichung*)

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$ , wobei  $X$  Menge und  $d$  Metrik auf  $X$ .

**BEMERKUNG 2.7**

Es gilt stets  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$ .

**BEISPIEL 2.8** ( $\rightarrow$  Aufgabe 5)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für  $a \in X$ ,  $\epsilon > 0$  seien

$$\begin{aligned} B_\epsilon(a) &= \{x \in X \mid d(x, a) < \epsilon\} \text{ und} \\ \overline{B}_\epsilon(a) &= \{x \in X \mid d(x, a) \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Dann ist eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  gegeben durch

$$\mathcal{T}_d = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U : \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subseteq U\}$$

In dieser Topologie sind die Mengen  $B_\epsilon(x)$  offen und die  $\overline{B}_\epsilon(x)$  abgeschlossen für alle  $x \in X$ ,  $\epsilon > 0$ .

**DEFINITION 2.9**

$\mathcal{T}_d$  heißt die von  $d$  *induzierte Topologie* auf  $X$ .

$B_\epsilon(x)$  heißt *offene  $\epsilon$ -Kugel* um den Punkt  $x \in X$ ;  $\overline{B}_\epsilon(x)$  heißt *abgeschlossene  $\epsilon$ -Kugel* um  $x$ .

**BEISPIEL 2.10**

$X = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit der durch  $d(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$  definierten *euklidischen Metrik* heißt der  *$n$ -dimensionale euklidische Raum*.

**DEFINITION 2.11**

Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt *metrisierbar*, wenn  $\mathcal{T}$  von einer Metrik  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  induziert wird (d.h. wenn  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$  gilt).

**BEISPIEL 2.12**

- (1) Die diskrete Topologie  $\mathcal{P}(X)$  auf einer beliebigen Menge  $X$  ist metrisierbar: Es ist  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$  mit der *diskreten Metrik*  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ .
- (2) Falls  $X$  eine mindestens zweielementige Menge ist, ist die chaotische Topologie  $(\emptyset, X)$  nicht metrisierbar: Sei  $d : X \times X$  eine Metrik. Zu  $x \neq y$  und  $\epsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$  ist  $B_\epsilon(x)$  offen bzgl.  $\mathcal{T}_d$ , aber nicht bzgl.  $\mathcal{T}$ , da  $x \in B_\epsilon(x)$ ,  $y \notin B_\epsilon(x)$ , d.h.  $B_\epsilon(x) \notin \mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ .

**DEFINITION 2.13 (Hausdorff, 1914)**

Ein topologischer Raum heißt *Hausdorffraum (Hausdorffsch)* oder *separiert*, falls gilt:

$$\forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y : \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset.$$

**BEMERKUNG 2.14** ( $\rightarrow$  Aufgabe 7)

Jeder metrisierbare topologische Raum ist ein Hausdorffraum.

## 2.3 Umgebungen

**DEFINITION 2.15** (Hausdorff, 1914)

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Dann heißt  $V \subseteq X$  eine *Umgebung* von  $x$ , falls es eine offene Menge  $U$  in  $X$  gibt mit  $x \in U \subseteq V$ .

Wir schreiben  $\mathcal{U}_x$  für die Menge aller Umgebungen von  $x$ .

**BEISPIEL 2.16**

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

$$V \in \mathcal{U}_x \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subseteq V.$$

**PROPOSITION 2.17**

Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $V \subseteq X$ . Dann gilt:

$$V \text{ offen} \Leftrightarrow \forall v \in V : V \in \mathcal{U}_v.$$

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ : Sei  $V$  offen,  $v \in V$ . Setze  $U := V$ ; dann  $U$  offen und  $v \in U \subseteq V$ . Also  $V \in \mathcal{U}_v$ .

$\Leftarrow$ : Mit dem Auswahlaxiom gilt:  $\forall v \in V : V \in \mathcal{U}_v \Rightarrow$  zu jedem  $v \in V$  gibt es  $U_v \subseteq V$  offen mit  $v \in U_v$ .  
Dann  $V \subseteq \bigcup_{v \in V} U_v \subseteq V$ , also  $V = \bigcup_{v \in V} U_v$ . Diese Menge ist offen nach (Top1).

**PROPOSITION 2.18**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt für jedes  $x \in X$ :

(N1)  $x \in \bigcap \mathcal{U}_x$ .

(N2) Ist  $V \subseteq V' \subseteq X$  und  $V \in \mathcal{U}_x$ , dann auch  $V' \in \mathcal{U}_x$ .

(N3) Für  $V_1, V_2 \in \mathcal{U}_x$  ist auch  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}_x$ .

(N4) Zu  $V \in \mathcal{U}_x$  gibt es  $U \in \mathcal{U}_x$  mit  $U \subseteq V$  und  $U \in \mathcal{U}_u$  für alle  $u \in U$ .

**BEWEIS**

(N1)-(N3): klar.

(N4): Nach Voraussetzung gibt es  $U$  offen mit  $x \in U \subseteq V$ . Nach Prop. 2.19 ist dann  $U \in \mathcal{U}_u$  für alle  $u \in U$ , insbesondere also  $U \in \mathcal{U}_x$ .

**BEMERKUNG 2.19** ( $\rightarrow$  Aufgabe 8)

Auf der Menge  $X$  sei eine Familie von Teilmengensystemen  $(\mathcal{U}_x)_{x \in X}$  gegeben derart, dass (N1)-(N4) für jedes  $x \in X$  gelten.

Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  derart, dass für jedes  $x \in X$  die Elemente von  $\mathcal{U}_x$  gerade die  $\mathcal{T}$ -Umgebungen von  $x$  sind.

## 2.4 Inneres und Abschluss

### DEFINITION 2.20

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt *innerer Punkt* von  $Y$ , wenn  $Y$  eine Umgebung von  $x$  ist.

$Y^\circ$  bezeichnet die Menge der inneren Punkte von  $Y$  und wird *Inneres* oder *Kern* von  $Y$  genannt.

### BEMERKUNG 2.21

$Y \subseteq X \Rightarrow Y^\circ \subseteq X$ . Außerdem gilt mit Prop. 2.19:  $Y = Y^\circ \Leftrightarrow Y$  offen.

### PROPOSITION 2.22

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gelten:

- (1) Für  $Y \subseteq X$  ist  $Y^\circ$  die größte in  $X$  offene Teilmenge von  $Y$ .
- (2) Für  $Y \subseteq X$  ist  $(Y^\circ)^\circ = Y^\circ$ .
- (3) Für  $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$  gilt  $Y_1^\circ \subseteq Y_2^\circ \subseteq X$ .
- (4) Für  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  gilt:  $(Y_1 \cap Y_2)^\circ = Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$ .
- (5) Für  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  gilt:  $(Y_1 \cup Y_2)^\circ \supseteq Y_1^\circ \cup Y_2^\circ$ .

### BEWEIS

(1)  $x \in Y^\circ \Leftrightarrow$  es gibt  $U \subseteq X$  offen mit  $x \in U \subseteq Y$ , d.h.  $Y^\circ = \bigcup \{U \subseteq Y \mid U \text{ offen in } X\}$ .

(2) Mit (1):  $Y^\circ$  offen  $\Rightarrow (Y^\circ)^\circ \supseteq Y^\circ \Rightarrow (Y^\circ)^\circ = Y^\circ$ .

(3)  $x \in Y_1^\circ \Rightarrow \exists U \subseteq X$  offen mit  $x \in U \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow x \in Y_2^\circ$ .

(4)  $Y_1 \cap Y_2 \subseteq Y_i \xrightarrow{(3)} (Y_1 \cap Y_2)^\circ \subseteq Y_i^\circ \Rightarrow (Y_1 \cap Y_2)^\circ \subseteq Y_1^\circ \cap Y_2^\circ, i = 1, 2$ .

Sei  $x \in Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$ . Dann gibt es  $U_i$  offen in  $X$  mit  $x \in U_i \subseteq Y_i, i = 1, 2$ . Dann  $U_1 \cap U_2$  offen und  $x \in U_1 \cap U_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow x \in (Y_1 \cap Y_2)^\circ$ .

(5)  $Y_i^\circ \subseteq (Y_1 \cup Y_2)^\circ \Rightarrow Y_1^\circ \cup Y_2^\circ \subseteq (Y_1 \cup Y_2)^\circ, i = 1, 2$ .

### BEMERKUNG 2.23

Sei  $X = \mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie versehen und  $Y_1 = \mathbb{Q}, Y_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann haben  $Y_1$  und  $Y_2$  keine inneren Punkte, da für  $x \in X$  jede Umgebung von  $x$  sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält. Damit  $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ = \emptyset \subsetneq X = (Y_1 \cup Y_2)^\circ$ .

### DEFINITION 2.24

Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt *Berührungspunkt* von  $Y$ , falls  $U \cap Y \neq \emptyset$  für jede Umgebung  $U$  von  $x$ .

Die Menge aller Berührungspunkte von  $Y$  heißt der *Abschluss* von  $Y$  in  $X$  und wird mit  $\bar{Y}$  bezeichnet.

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt *dicht* in  $X$ , falls  $\bar{Y} = X$ .

### BEMERKUNG 2.25

Offensichtlich gilt  $Y \subseteq \bar{Y}$ , d.h. alle  $y \in Y$  sind Berührungspunkte von  $Y$ .

### PROPOSITION 2.26

Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ . Dann gelten:

- (1)  $(X \setminus Y)^\circ = X \setminus \bar{Y}$ .
- (2)  $\overline{X \setminus Y} = X \setminus Y^\circ$ .

**BEWEIS**

- (1) Sei  $x \in X$ . Dann  $x \notin \overline{Y} \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq X \setminus Y \Leftrightarrow x \in (X \setminus Y)^\circ$ .  
 (2) Sei  $x \in X$ . Dann  $x \notin Y^\circ \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \not\subseteq Y \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus Y}$ .

**PROPOSITION 2.27**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gelten:

- (1) Für  $Y \subseteq X$  ist  $\overline{Y}$  die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $Y$  enthält.  
 (2) Für  $Y \subseteq X$  ist  $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ .  
 (3) Für  $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$  gilt  $\overline{Y_1} \subseteq \overline{Y_2} \subseteq X$ .  
 (4) Für  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  gilt:  $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$ .  
 (5) Für  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  gilt:  $\overline{Y_1 \cap Y_2} \supseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$ .

**BEWEIS**

Analog zum Beweis von Prop. 2.24 oder durch Argumentation über Komplemente (Prop. 2.28) und dann direkt aus Prop. 2.24.

**PROPOSITION 2.28**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Man definiert den *Rand* einer Teilmenge  $A \subseteq X$  als  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ .

$\partial A$  besteht genau aus denjenigen Punkten  $a \in X$ , für die jede Umgebung von  $a$  sowohl ein Element aus  $A$  als auch ein Element aus  $X \setminus A$  enthält.

**BEWEIS**

- (1) Sei  $a \in \partial A$ ,  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ . Zu zeigen ist:  $U_a \cap A \neq \emptyset$ ,  $U_a \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ .

Sei  $x \in \partial A \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow (\forall U_a \in \mathcal{U}_a : U_a \cap A \neq \emptyset)$ .  $U_a \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$  erhält man durch die Überlegung  $\partial A = \partial(X \setminus A)$ . Dazu:  $\partial(X \setminus A) = (\overline{X \setminus A}) \setminus (X \setminus A)^\circ = (X \setminus A^\circ) \setminus (X \setminus \overline{A}) = \overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$ .

- (2) Sei  $a \in X$ . Zu zeigen:  $(\forall U_a \in \mathcal{U}_a : U_a \cap A \neq \emptyset \text{ und } U_a \cap (X \setminus A) \neq \emptyset) \Rightarrow (a \in \overline{A} \text{ und } a \notin A^\circ)$ . Die erste Forderung erhält man direkt aus der Definition von  $\overline{A}$ , die zweite aus der von  $A^\circ$ .

**BEMERKUNG 2.29**

$\partial A$  kann innere Punkte besitzen: Betrachte  $(X, \mathcal{T})$  mit  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T}$  euklidische Metrik. Dann  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ , denn zu  $x \in \mathbb{R}$  liegen in jeder Umgebung von  $x$  stets sowohl Punkte aus  $\mathbb{Q}$  als auch aus  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ :  $\mathbb{Q}$  liegt dicht in  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}$  ist offen, besitzt also jede Menge innere Punkte.

**BEMERKUNG 2.30** ( $\rightarrow$  Aufgabe 9)

Sei  $X$  eine Menge und  $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (C1)  $c(\emptyset) = \emptyset$ .  
 (C2)  $Y \subseteq X \Rightarrow Y \subseteq c(Y)$ .  
 (C3)  $Y \subseteq X \Rightarrow c(c(Y)) = c(Y)$ .  
 (C4)  $Y, Z \subseteq X \Rightarrow c(Y \cup Z) = c(Y) \cup c(Z)$ .

Dann gibt es genau eine Topologie auf  $X$ , bzgl. der  $c(Y)$  der Abschluss von  $Y$  ist für alle  $Y \subseteq X$ .

## 2.5 Basen und Subbasen

**LEMMA 2.31**

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Genau dann ist  $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$  eine Topologie auf  $X$ , wenn  $X = \bigcup \mathcal{B}$  ist und es zu  $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$  und  $x \in U_1 \cap U_2$  stets ein  $V \in \mathcal{B}$  gibt mit  $x \in V \subseteq U_1 \cap U_2$ .

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ : Sei  $\mathcal{T}$  eine Topologie. Dann  $X \in \mathcal{T}$ , also  $X = \bigcup \mathcal{C}$  mit  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , dann auch  $X = \bigcup \mathcal{B}$ . Seien nun  $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$  und  $x \in U_1 \cap U_2$  gegeben. Dann  $U_1, U_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ . Mit Top2:  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ , also  $U_1 \cap U_2 = \bigcup \tilde{\mathcal{C}}$  mit  $\tilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{B}$ . Wegen  $x \in U_1 \cap U_2$  gibt es also ein  $V \in \tilde{\mathcal{C}}$  mit  $x \in V \subseteq U_1 \cap U_2$  und  $V \in \mathcal{B}$ .

$\Leftarrow$ :  $\mathcal{T}$  erfüllt stets Top1 per Definition. Mit  $X = \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{T}$  bleibt für Top2 zu zeigen: Zu  $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$  ist  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$ . Es gibt  $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{B}$  mit  $V_i = \bigcup \mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Sei  $\mathcal{C} = \{V \in \mathcal{B} \mid V \subseteq V_1 \cap V_2\}$ . Dann  $\bigcup \mathcal{C} \subseteq V_1 \cap V_2$  und  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ . Sei  $x \in V_1 \cap V_2$ . Dann gibt es  $W_i \in \mathcal{C}$  mit  $x \in W_i \subseteq V_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dann  $x \in W_1 \cap W_2 \subseteq V_1 \cap V_2$  und wegen  $W_1, W_2 \in \mathcal{B}$  gibt es nach Voraussetzung  $V \subseteq W_1 \cap W_2$  mit  $x \in V$ . Dann  $V \in \mathcal{C}$  und somit  $x \in \bigcup \mathcal{C}$ . Also  $V_1 \cap V_2 = \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ .

**DEFINITION 2.32**

Unter einer *Basis* eines topologischen Raumes  $(X; \mathcal{T})$  versteht man ein Teilmengensystem  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , für welches  $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$  gilt.

**BEMERKUNG 2.33**

$\mathcal{B}$  ist genau dann eine Basis von  $(X, \mathcal{T})$ , wenn  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ,  $\bigcup \mathcal{B} = X$  und gilt:  $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ ,  $x \in U_1 \cap U_2$  gibt es  $V \in \mathcal{B}$  :  $x \in V \subseteq U_1 \cap U_2$ .

**BEMERKUNG 2.34** ( $\rightarrow$  Aufgabe 10)

Seien  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Genau dann ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $\mathcal{T}$ , wenn  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$  gilt und zu jedem  $V \in \mathcal{T}$ ,  $x \in V$  ein  $U \in \mathcal{B}$  mit  $x \in U \subseteq V$  existiert.

**BEISPIEL 2.35**

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Mögliche Basen von  $\mathcal{T}_d$  sind z.B.  $\mathcal{B}_1 = \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$  und  $\mathcal{B}_2 = \{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ .

**PROPOSITION 2.36**

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Sei dazu  $\mathcal{S}^* := \{\bigcap \mathcal{E} \mid \mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \text{ endlich}\}$ , wobei auch  $\bigcap \emptyset := X \in \mathcal{S}^*$ .

Dann ist  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} := \{\bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}^*\}$  eine Topologie auf  $X$  und  $\mathcal{S}^*$  eine Basis von  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ .

$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  ist die grösste Topologie auf  $X$ , in der alle Mengen aus  $\mathcal{S}$  offen sind.

**BEWEIS**

Wegen  $X \in \mathcal{S}^*$  ist  $X = \bigcup \mathcal{S}^*$ . Für  $U_1, U_2 \in \mathcal{S}^*$  gibt es  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{S}$  endlich mit  $U_i = \bigcap \mathcal{E}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dann ist  $\mathcal{E} := \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$  endlich und  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ . Weiter  $U_1 \cap U_2 = \bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{S}^*$ . Mit dem Lemma gilt dann:  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  ist eine Topologie auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{S}^*$  eine Basis von  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  und offensichtlich  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ .

Sei nun  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$  mit  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ . Dann ist  $\mathcal{T}$  feiner als  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ : Nach Top2:  $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{T}$  und mit Top1:  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$ . Also ist  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  die grösste Topologie auf  $X$ , die  $\mathcal{S}$  umfasst.

**DEFINITION 2.37**

Zu einem Mengensystem  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heisst  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  die von  $\mathcal{S}$  *erzeugte Topologie* auf  $X$ .

Ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ , so heisst  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  eine *Subbasis* von  $(X, \mathcal{T})$ , wenn  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ , d.h. wenn  $\mathcal{S}^*$  eine Basis von  $\mathcal{T}$  ist.

**BEISPIEL 2.38**

Sei  $X$  eine Menge.

- (1) Die diskrete Topologie  $\mathcal{P}(X)$  auf  $X$  wird erzeugt von  $\{\{x\} \mid x \in X\}$ . Dies ist sogar eine Basis.
- (2) Die chaotische Topologie  $\{\emptyset, X\}$  wird erzeugt von dem leeren Mengensystem  $\emptyset$ .
- (3) Die kofinale Topologie hat als Subbasis  $\{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ .

**BEMERKUNG 2.39**

Sei  $(X, \leq)$  eine geordnete Menge. Wir verwenden  $\infty$  und  $-\infty$  zur Bezeichnung von Elementen außerhalb von  $X$  und setzen die Anordnung  $\leq$  auf  $X^* := X \cup \{\pm\infty\}$  fort, indem wir  $-\infty < x < \infty$  setzen für alle  $x \in X$ .

Mit  $a, b \in X^*$  schreiben wir  $(a, b) := \{x \in X \mid a < x < b\}$ .

**DEFINITION 2.40**

Die von den Mengen  $(-\infty, a)$  und  $(a, \infty)$  erzeugte Topologie auf  $X$  heißt die *Ordnungstopologie* zu  $\leq$ .

**BEMERKUNG 2.41** ( $\rightarrow$  Aufgabe 11)

Seien  $(X, \leq)$  eine total geordnete Menge und  $\mathcal{T}$  die Ordnungstopologie auf  $X$ .

Dann ist  $X$  ein Hausdorffraum und die offenen Intervalle  $(a, b)$  mit  $a, b \in X^*$ ,  $a < b$  bilden eine Basis von  $X$ .

**DEFINITION 2.42**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Ein System von Umgebungen  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_x$  heißt *Umgebungsbasis* von  $x$ , falls es zu jeder Umgebung  $U \in \mathcal{U}_x$  ein  $V \in \mathcal{V}$  gibt mit  $V \subseteq U$ .

Man bezeichnet  $\mathcal{V}$  als *offene* bzw. *abgeschlossene Umgebungsbasis* von  $x$ , falls alle Mengen in  $\mathcal{V}$  offen bzw. abgeschlossen sind.

**BEMERKUNG 2.43**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gelten:

- (1)  $\mathcal{B}$  Basis von  $X \Rightarrow$  Für  $x \in X$  ist  $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{B} \mid x \in V\}$  eine offene Umgebungsbasis von  $x$ .
- (2) Ist zu jedem  $x \in X$  eine offene Umgebungsbasis  $\mathcal{V}_x$  von  $x$  gegeben, so ist  $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$  Basis von  $X$ .
- (3) Ist  $\mathcal{V}$  eine Umgebungsbasis von  $x \in X$ , so ist  $\mathcal{V}^\circ := \{V^\circ \mid V \in \mathcal{V}\}$  eine offene Umgebungsbasis von  $x$ .
- (4)  $\{\bar{V} \mid V \in \mathcal{V}\}$  muss keine Umgebungsbasis von  $x$  sein. Ein Gegenbeispiel wäre z.B. die kofinale Topologie.

## 2.6 Unterräume

### DEFINITION 2.44

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Für eine beliebige Teilmenge  $Y \subseteq X$  wird dann die Topologie  $\mathcal{T}|_Y := \{V \cap Y \mid V \in \mathcal{T}\}$  auf  $Y$  als die *Spurtopologie* auf  $Y$  bezeichnet.

Unter einem *Unterraum* von  $(X, \mathcal{T})$  versteht man ein Paar  $(Y, \mathcal{T}|_Y)$  für eine Teilmenge  $Y$  von  $X$ .

Ist  $Y$  ein Unterraum von  $X$ , so heißt  $U \subseteq Y$  *offen* bzw. *abgeschlossen in  $Y$* , wenn  $U$  offen bzw. abgeschlossen in  $\mathcal{T}|_Y$  ist, d.h. wenn ein  $V \in \mathcal{T}$  existiert mit  $U = V \cap Y$ .

Ist  $Y$  offen bzw. abgeschlossen in  $X$ , so sprechen wir von einem *offenen* bzw. *abgeschlossenen* Unterraum von  $X$ .

### BEMERKUNG 2.45

Ein  $U \subseteq Y$  kann in  $Y$  offen bzw. abgeschlossen sein, ohne dass  $U$  offen bzw. abgeschlossen in  $X$  ist.

### PROPOSITION 2.46

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $Y$  ein Unterraum von  $X$  und  $U \subseteq Y$ . Dann gelten:

- (1) Ist  $X$  ein Hausdorffraum, so auch  $Y$ .
- (2)  $U$  ist genau dann offen bzw. abgeschlossen in  $Y$ , wenn  $U = V \cap Y$  für eine offene bzw. abgeschlossene Teilmenge  $V$  von  $X$  ist.
- (3) Ist  $Y$  ein offener (abgeschlossener) Unterraum von  $X$ , so ist  $U$  genau dann offen (abgeschlossen) in  $X$ , wenn  $U$  offen (abgeschlossen) in  $Y$  ist.
- (4) Die Spurtopologien von  $X$  und von  $Y$  auf  $U$  stimmen überein, d.h.  $\mathcal{T}|_{Y|_U} = \mathcal{T}|_U$ .
- (5) Ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $X$ , so ist  $\mathcal{B}|_Y := \{V \cap Y \mid V \in \mathcal{B}\}$  eine Basis von  $Y$ .
- (6) Ist  $\mathcal{S}$  eine Subbasis von  $X$ , so ist  $\mathcal{S}|_Y := \{V \cap Y \mid V \in \mathcal{S}\}$  eine Subbasis von  $Y$ .
- (7) Ist  $y \in Y$  und  $\mathcal{V}$  eine Umgebungsbasis von  $y$  in  $X$ , so ist  $\mathcal{V}|_Y := \{V \cap Y \mid V \in \mathcal{V}\}$  eine Umgebungsbasis von  $y$  in  $Y$ .

### BEWEIS

Alle Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition.

### BEMERKUNG 2.47 (→ Aufgabe 11)

Seien  $(X, \leq)$  eine total geordnete Menge,  $\mathcal{T}$  die Ordnungstopologie auf  $X$  und  $Y \subseteq X$ . Dann ist die Spurtopologie auf  $Y$  stets feiner als die durch  $\leq$  auf  $Y$  definierte Ordnungstopologie. Es muss keine Gleichheit gelten.

### BEMERKUNG 2.48 (→ Aufgabe 12)

Jeder Unterraum  $Y$  eines metrisierbaren Raumes  $(X, d)$  ist metrisierbar. Die Spurtopologie auf  $Y$  wird von  $d|_{Y \times Y}$  induziert.

## 2.7 Abzählbarkeitseigenschaften

### DEFINITION 2.49

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *separabel*, wenn es in  $X$  eine abzählbare, dichte Teilmenge gibt.

$X$  heißt *A1-Raum*, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

$X$  heißt *A2-Raum*, wenn  $X$  eine abzählbare Basis besitzt.

Letztere Eigenschaften werden als das *erste* bzw. *zweite Abzählbarkeitsaxiom* bezeichnet.

### BEISPIEL 2.50

- (1)  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Topologie ist separabel, denn  $\mathbb{Q}^n$  liegt dicht in  $\mathbb{R}^n$ , und metrisierbar. Es gelten beide Abzählbarkeitsaxiome.
- (2) Sei  $X$  ein diskreter topologischer Raum. Dann erfüllt  $X$  stets (A1) und ist metrisierbar. Weiter gilt:  $X$  ist abzählbar  $\Leftrightarrow X$  hat eine abzählbare Basis  $\Leftrightarrow X$  ist separabel.
- (3) Seien  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  die Kofinaltopologie auf  $X$ . Dann liegt jede unendliche Menge dicht in  $X$ , d.h.  $X$  ist separabel. Ist  $X$  jedoch überabzählbar, so erfüllt  $X$  weder (A1) noch (A2). Genauer gesagt besitzt kein Punkt  $x \in X$  eine abzählbare Umgebungsbasis. Für ein abzählbares System von Umgebungen  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_x$  ist nämlich auch  $X \setminus \bigcap \mathcal{V} = \bigcup \{V^c \mid V \in \mathcal{V}\}$  abzählbar, also  $\bigcap \mathcal{V}$  überabzählbar, d.h. es gibt  $y \in \bigcap \mathcal{V}$ ,  $y \neq x$ . Also ist  $X \setminus \{y\}$  eine offene Umgebung von  $x$ , die kein  $V \in \mathcal{V}$  enthält.

### PROPOSITION 2.51

Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis  $\mathcal{B}$ .

Dann ist  $X$  separabel und für  $x \in X$  ist  $\{V \in \mathcal{B} \mid x \in V\}$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $X$ .

### BEWEIS

Nur die Separabilität ist zu zeigen. Sei  $c : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$  eine Auswahlfunktion, also  $c(U) \in U$  für jedes  $U \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Dann ist  $A = c(\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\})$  eine abzählbare Teilmenge von  $X$ . Wir zeigen:  $\overline{A} = X$ .

Sei  $x \in X$  und  $\mathcal{U} = \{V \in \mathcal{B} \mid x \in V\}$  eine beliebige Umgebungsbasis von  $x$ . Diese ist abzählbar, zu einer beliebigen Umgebung  $U$  von  $x$  gibt es also ein  $V \in \mathcal{B}$  mit  $x \in V \subseteq U$ . Also  $c(V) \in V \cap A \subseteq U \cap A$ , d.h.  $U \cap A \neq \emptyset$ . Somit liegt  $A$  dicht in  $X$ .

### PROPOSITION 2.52

Sei  $X$  ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann hat jeder Punkt in  $X$  eine abzählbare Umgebungsbasis.

Weiter gilt:  $X$  hat eine abzählbare Basis  $\Leftrightarrow X$  ist separabel.

### BEWEIS

Sei  $d : X \times X$  eine Metrik, welche die Topologie von  $X$  induziert. Zu  $x \in X$  ist  $\{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$ .

$\Rightarrow$ : Folgt aus Prop. 2.54.

$\Leftarrow$ : Sei  $A \subseteq X$  abzählbar und dicht in  $X$ . Dann  $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(a) \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  abzählbar. Dann ist  $\mathcal{B}$  eine Basis: Offensichtlich  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$ . Zu zeigen: Für  $x \in X$  und  $U \subseteq X$  offen mit  $x \in U$  gibt es  $V \in \mathcal{B}$  mit  $x \in V \subseteq U$ . Wegen  $x \in U$  und  $U$  offen gibt es  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(x) \subseteq U$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , also  $\epsilon > \frac{1}{n}$ . Dann  $x \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$ . Da  $A \subseteq X$  dicht, gibt es ein  $a \in B_{\frac{1}{2n}}(x) \cap A$ . Dann  $x \in B_{\frac{1}{2n}}(a) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$ .

### PROPOSITION 2.53

Die Eigenschaften (A1) und (A2) vererben sich auf Unterräume.



**BEWEIS**

Folgt sofort aus Prop. 2.50 (7) und (5).

**BEMERKUNG 2.54** ( $\rightarrow$  Aufgabe 13)

Auf  $\mathbb{R}$  bilden die halboffenen Intervalle  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  die Basis einer Topologie  $\mathcal{T}$ . Der topologische Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  heißt die *Sorgenfrey-Gerade*.

- (1)  $\mathcal{T}$  ist eine Verfeinerung der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}$ .
- (2) Der Raum  $X$  ist Hausdorffsch und separabel.
- (3) Jeder Punkt von  $X$  hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
- (4)  $X$  besitzt keine abzählbare Basis und ist nicht metrisierbar.

**BEISPIEL 2.55**

Sei  $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ . Für  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  sei  $B_\epsilon(x)$  die  $\epsilon$ -Kugel um  $x$  bzgl. der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ . Setze

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &:= \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}^+, 0 < \epsilon < x_2\}, \\ \mathcal{B}_2 &:= \{B_\epsilon(x) \cup \{(x, 0)\} \mid x \in X, \epsilon = x\}.\end{aligned}$$

Dann ist  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  Basis einer Topologie, die feiner ist als die Spurtopologie der euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^2$  auf  $X$ . Insbesondere ist diese Topologie Hausdorffsch.

Mit dieser Topologie versehen heißt  $X$  der *Niemitzky-Raum*. Er hat folgende Eigenschaften:

- (1)  $X$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und ist separabel, denn  $\mathbb{Q}^2 \cap X$  liegt dicht in  $X$ .
- (2)  $Y := \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$  (die „ $x$ -Achse“) in der Spurtopologie von  $X$  ist diskret und überabzählbar, erfüllt also (A1), aber nicht (A2). Außerdem ist  $Y$  nicht separabel.
- (3) Somit erfüllt  $X$  wegen Prop. 2.56 auch nicht (A2).
- (4) Insbesondere ist  $X$  wegen Prop. 2.55 nicht metrisierbar.

## 3 Stetigkeit

### 3.1 Abbildungen zwischen topologischen Räumen

**DEFINITION 3.1**

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

$f$  heißt *offen*, wenn für jede offene Menge  $U \subseteq X$  gilt:  $f(U)$  ist offen.

$f$  heißt *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Menge  $U \subseteq X$  gilt:  $f(U)$  ist abgeschlossen.

**BEISPIEL 3.2**

(1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (x, 0)$  ist abgeschlossen, aber nicht offen.

(2)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x$  ist offen, aber nicht abgeschlossen.

**PROPOSITION 3.3**

Für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  sind äquivalent:

- (1) Für jedes  $a \in X$  und jede Umgebung  $V$  von  $f(a)$  ist  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $a$  in  $X$ .
- (2) Für jede offene Umgebung  $V$  in  $Y$  ist  $f^{-1}(V)$  offen.
- (3) Für jede abgeschlossene Umgebung  $V$  in  $Y$  ist  $f^{-1}(V)$  abgeschlossen.

**BEWEIS**

(a) (2)  $\Leftrightarrow$  (3):

Für jede Teilmenge  $T \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(Y \setminus T) = X \setminus f^{-1}(T)$ . Da Komplemente von abgeschlossenen Mengen offen sind und umgekehrt, ergibt sich hiermit die Äquivalenz von (2) und (3).

(b) (1)  $\Rightarrow$  (2):

Sei  $V \subseteq Y$  offen. Für jedes  $a \in f^{-1}(V)$  ist dann  $V$  eine Umgebung von  $f(a)$ , somit nach Voraussetzung auch  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $a$ . Damit ist  $f^{-1}(V)$  offen.

(c) (2)  $\Rightarrow$  (1):

Sei  $a \in X$  und  $V$  eine Umgebung von  $f(a)$ . Dann gibt es eine offene Menge  $V'$  in  $Y$  mit  $f(a) \in V' \subseteq V$ . Nach Voraussetzung ist dann  $f^{-1}(V')$  offen und wegen  $a \in f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(V)$  folgt dann, dass  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $a$  ist.

**DEFINITION 3.4**

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *stetig im Punkt*  $a \in X$ , falls für jede Umgebung  $V$  von  $f(a)$  in  $Y$  auch  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $a$  in  $X$  ist.

Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  wird *stetig* genannt, falls sie in jedem Punkt von  $X$  stetig ist und somit die äquivalenten Aussagen der letzten Proposition erfüllt.

**BEMERKUNG 3.5**

(1)  $f : X \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn zu jedem  $a \in X$  und jedem  $V \in \mathcal{U}_{f(a)}$  ein  $U \in \mathcal{U}_a$  existiert mit  $f(U) \subseteq V$ .

(2) Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Seien weiter  $a \in X$ ,  $\mathcal{V}$  eine Umgebungsbasis von  $a$  in  $X$  und  $\mathcal{W}$  eine Umgebungsbasis von  $f(a)$  in  $Y$ . Dann gilt:

$f$  ist stetig in  $a \Leftrightarrow$  zu jedem  $W \in \mathcal{W}$  gibt es ein  $V \in \mathcal{V}$  mit  $f(V) \subseteq W$ .

(3) Sind  $X$  und  $Y$  metrische Räume, so erhalten wir damit das bekannte  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium:

$f : X \rightarrow Y$  ist stetig im Punkt  $a \in X \Leftrightarrow$  zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$ .

**LEMMA 3.6**

Seien  $X$  und  $Z$  topologische Räume und  $\mathcal{S}$  eine Subbasis von  $X$ . Dann gilt:

Eine Abbildung  $f : Z \rightarrow X$  ist stetig  $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$  ist offen in  $Z$  für jede Menge  $U \in \mathcal{S}$ .

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ : Jede Menge  $U \in \mathcal{S}$  ist offen in  $Z$ . Ist  $f$  stetig, so folgt, dass auch  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$  ist.

$\Leftarrow$ : Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass  $f^{-1}(U)$  offen in  $Z$  ist für jedes  $U \in \mathcal{S}$ . Sind  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}$ , so ist dann  $f^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_n) = f^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f^{-1}(U_n)$  offen in  $Z$ . Somit ist  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$  für alle  $V \in \mathcal{S}^*$ . Eine beliebige offene Menge in  $X$  ist nun von der Form  $\bigcup \mathcal{V}$  mit  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}^*$  und wegen  $f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}) = \bigcup f^{-1}(V)$  ist dann auch das Urbild unter  $f$  offen in  $Z$ .

**LEMMA 3.7**

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen zwischen topologischen Räumen  $X, Y$  und  $Z$ . Sind sowohl  $f$  als auch  $g$  offen (abgeschlossen, stetig) so gilt dies auch für  $g \circ f : X \rightarrow Z$ .

**BEWEIS**

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

**BEMERKUNG 3.8** ( $\rightarrow$  Aufgabe 14)

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann gelten:

- (1)  $\forall A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .
- (2)  $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ .
- (3)  $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$ .

**LEMMA 3.9**

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $Y_0$  ein Unterraum von  $Y$ . Dann ist die *Inklusionsabbildung*  $j : Y_0 \rightarrow Y$  stetig. Weiter gilt:  $f : X \rightarrow Y_0$  ist stetig  $\Leftrightarrow j \circ f : X \rightarrow Y$  ist stetig.

**BEWEIS**

Für jede offene Teilmenge  $V \subseteq Y_0$  ist  $j^{-1}(V) = V \cap Y_0$  offen in  $Y_0$ . Also ist  $j$  stetig.

$\Rightarrow$ : Mit  $f : X \rightarrow Y_0$  ist dann auch  $j \circ f : X \rightarrow Y$  stetig.

$\Leftarrow$ : Sei umgekehrt  $f : X \rightarrow Y_0$  derart, dass  $j \circ f$  stetig ist. Da jede offene Menge in  $Y_0$  von der Form  $V \cap Y_0 = j^{-1}(V)$  für eine offene Menge  $V \subseteq Y$  ist und dann  $f^{-1}(V \cap Y_0) = (j \circ f)^{-1}(V)$  offen in  $X$  ist, folgt die Stetigkeit von  $f$ .

**BEMERKUNG 3.10** ( $\rightarrow$  Aufgabe 15)

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $A, B$  abgeschlossene Unterräume von  $X$  mit  $X = A \cup B$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn  $f|_A$  und  $f|_B$  stetig (in der Spurtopologie) sind.

**PROPOSITION 3.11**

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Für eine stetige, bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $f$  ist offen.
- (2)  $f$  ist abgeschlossen.
- (3) Die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ist stetig.

**BEWEIS**

Dies folgt aus den Äquivalenzen in Prop. 3.4 und der Tatsache, dass für eine Teilmenge von  $X$  das Urbild unter der Umkehrabbildung  $f^{-1}$  nichts anderes ist als das Bild unter der Abbildung  $f$ .

**DEFINITION 3.12**

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine stetige, bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , deren Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls stetig ist, wird als *Homöomorphismus (topologische Abbildung)* bezeichnet.

Die Räume  $X$  und  $Y$  heißen *homöomorph* (in Zeichen:  $X \cong Y$ ), falls es einen Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

Eine stetige, injektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , die durch Einschränkung des Bildes einen Homöomorphismus  $X \rightarrow f(X)$  ergibt, wird als *Einbettung* bezeichnet.

**BEMERKUNG 3.13**

Sind  $X$  und  $Y$  homöomorphe topologische Räume, so übertragen sich alle topologischen Eigenschaften von  $X$  unmittelbar (via  $f$ ) auf  $Y$  und umgekehrt.

**BEMERKUNG 3.14** ( $\rightarrow$  Aufgabe 17)

Jedes Intervall in  $\mathbb{R}$ , das mindestens zwei Punkte enthält, ist homöomorph zu genau einem der Intervalle  $[0, 1]$ ,  $[0, 1)$ ,  $(0, 1)$ .

**BEMERKUNG 3.15**

Für eine Bijektion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind äquivalent:

- (1)  $f$  ist stetig.
- (2)  $f$  ist ein Homöomorphismus.
- (3)  $f$  ist streng monoton.

**BEISPIEL 3.16**

Seien auf einer Menge  $X$  zwei Topologien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  gegeben. Für  $i = 1, 2$  sei der topologische Raum  $(X, \mathcal{T}_i)$  mit  $X_i$  bezeichnet. Die Identitätsabbildung von  $X$  fassen wir nun als Abbildung topologischer Räume  $X_1 \rightarrow X_2$  auf. Sie ist genau dann stetig, wenn  $\mathcal{T}_1$  feiner als  $\mathcal{T}_2$  ist, hingegen ist sie gerade dann offen, wenn  $\mathcal{T}_2$  feiner als  $\mathcal{T}_1$  ist. Auf diese Weise erhält man sofort Beispiele stetiger und bijektiver Abbildungen, die keine Homöomorphismen sind.

**BEMERKUNG 3.17**

$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^2$  ist Bild der stetigen Bijektion  $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}$ ,  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ . Aber  $f$  ist nicht abgeschlossen, da  $U := [\pi, 2\pi)$  abgeschlossen in  $[0, 2\pi)$ , aber  $f(0) = (1, 0) \in f(\overline{U}) \setminus f(U)$ , also  $f(U)$  nicht abgeschlossen. Somit ist  $f$  kein Homöomorphismus.

## 3.2 Initialtopologien

### PROPOSITION 3.18

Seien  $X, I$  Mengen, zu  $\alpha \in I$  sei  $Y_\alpha$  ein topologischer Raum und  $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$  gegeben. Weiter sei  $\mathcal{S} = \{f_\alpha^{-1}(V) \mid \alpha \in I, V \subseteq Y_\alpha \text{ offen}\}$ . Dann gilt:

- (1) Die von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie ist die größte Topologie auf  $X$ , bzgl. der alle  $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$  stetig sind.
- (2) Sei  $X$  mit dieser Topologie versehen. Ist  $Z$  ein topologischer Raum, so ist  $h : Z \rightarrow X$  genau dann stetig, wenn  $f_\alpha \circ h$  stetig ist für alle  $\alpha \in I$ .

### BEWEIS

- (1) Ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ , so ist die Abbildung  $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$  für alle  $\alpha \in I$  stetig genau dann, wenn  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ . Die von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie ist die größte Topologie auf  $X$ , die  $\mathcal{S}$  enthält.
- (2) Sei  $h : Z \rightarrow X$  gegeben,  $Z$  ein topologischer Raum und mit der von  $\mathcal{S}$  erzeugten Topologie versehen. Ist  $h$  stetig, so auch  $f_\alpha \circ h : Z \rightarrow Y_\alpha$  für jedes  $\alpha \in I$ , da  $f_\alpha$  stetig.  
Sei nun angenommen, für alle  $\alpha \in I$  ist  $f_\alpha \circ h$  stetig. Für  $W \in \mathcal{S}$  schreibe  $W = f_\alpha^{-1}(V)$  mit  $\alpha \in I$  und  $V \subseteq Y_\alpha$  offen, dann  $h^{-1}(W) = h^{-1}(f_\alpha^{-1}(V)) = (f_\alpha \circ h)^{-1}(V)$  offen, da  $f_\alpha \circ h$  stetig. Somit  $h^{-1}(W)$  offen in  $Z$  für alle  $W \in \mathcal{S}$ . Nach Lemma 3.4 ist  $h$  dann stetig.

### DEFINITION 3.19

Seien  $X, I, (Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$  wie eben. Die durch  $(Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$  in der Proposition charakterisierte Topologie heißt *Initialtopologie* zu  $(Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ .

### BEISPIEL 3.20

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $U \subseteq X$  und  $\iota : U \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung. Die Initialtopologie auf  $U$  zur (eielementigen) Familie  $(U, \iota)$  ist gerade die Spurtopologie.

### DEFINITION 3.21

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie von topologischen Räumen. Sei  $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ .

Für  $\alpha \in I$  sei  $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$  die Projektion auf  $X_\alpha$ , definiert durch  $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ , falls  $\alpha \in (X_\gamma)_{\gamma \in I}$ .

Die Initialtopologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  zur Familie  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  heißt die *Produkttopologie* auf  $X$ .

Der Raum  $X$  mit dieser Topologie heißt das *direkte Produkt* der  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ .

### BEMERKUNG 3.22

- (1) Diese Topologie wird erzeugt von  $\mathcal{S} = \{\pi_\alpha^{-1}(V) \mid \alpha \in I, V \subseteq X_\alpha \text{ offen}\}$ .
- (2) Die von  $\mathcal{S}$  erzeugte Basis  $\mathcal{S}^*$  wird als *natürliche Basis* von  $X$  bezeichnet; sie besteht aus den  $\prod U_\alpha$ , wobei  $\forall \alpha \in I : U_\alpha$  ist offen und  $\#\{\alpha \in I \mid U_\alpha \subsetneq X_\alpha\}$  endlich.
- (3) Seien  $X_1, \dots, X_n$  topologische Räume,  $X = X_1 \times \dots \times X_n$ . Dann besteht die natürliche Basis von  $X$  aus den  $U_1 \times \dots \times U_n$ , wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen für  $1 \leq i \leq n$  ist.

### BEMERKUNG 3.23 (→ Aufgabe 18)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die von der euklidischen Topologie von  $\mathbb{R}$  gelieferte Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  stimmt mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  überein.

### PROPOSITION 3.24

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie topologischer Räume und  $X = \prod X_\alpha$ , dann sind die  $\pi_\alpha$  stetig und offen.

Sei  $Z$  ein topologischer Raum, dann gilt:  $h : Z \rightarrow X$  ist stetig  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in I : \pi_\alpha \circ h : Z \rightarrow X_\alpha$  ist stetig.

### 3.3 Finaltopologien

#### PROPOSITION 3.25

Seien  $X, I$  Mengen und zu  $\alpha \in I$  sei  $Z_\alpha$  ein topologischer Raum und  $f_\alpha : Z_\alpha \rightarrow X$  eine Abbildung.

- (1)  $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid f_\alpha^{-1}(U) \text{ offen in } Z_\alpha \text{ f\u00fcr alle } \alpha \in I\}$  ist eine Topologie auf  $X$ , und zwar die feinste Topologie auf  $X$ , bzgl. der alle  $f_\alpha : Z_\alpha \rightarrow X$  stetig sind.
- (2) Sei  $X$  mit der Topologie  $\mathcal{T}$  versehen. Ist  $Y$  ein topologischer Raum und  $g : X \rightarrow Y$ , so ist  $g$  genau dann stetig, wenn  $g \circ f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$  f\u00fcr alle  $\alpha \in I$  stetig ist.

#### BEWEIS

- (1) Sei  $\mathcal{T}'$  eine Topologie auf  $X$ . Genau dann sind  $f_\alpha : Z_\alpha \rightarrow X$  stetig bzgl.  $\mathcal{T}'$  f\u00fcr alle  $\alpha \in I$ , wenn  $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$  ist. Also ist noch zu zeigen, dass  $\mathcal{T}$  eine Topologie ist.

(Top1): Sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ . Dann gilt f\u00fcr alle  $\alpha \in I : f_\alpha^{-1}(\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup \{f_\alpha^{-1}(V) \mid V \subseteq \mathcal{C}\}$  offen in  $Z_\alpha$  als Vereinigung von in  $Z_\alpha$  offenen Mengen. Somit  $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ .

(Top2):  $X \in \mathcal{T}$  ist klar. Seien  $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall \alpha \in I : f_\alpha^{-1}(U_1 \cap U_2) = f_\alpha^{-1}(U_1) \cap f_\alpha^{-1}(U_2)$  offen in  $Z_\alpha$  als endlicher Schnitt von in  $Z_\alpha$  offenen Mengen.

- (2) Sei  $Y$  ein topologischer Raum und  $g : X \rightarrow Y$ . Ist  $g$  stetig, so auch  $g \circ f_\alpha$  stetig f\u00fcr alle  $\alpha \in I$ , da  $f_\alpha$  stetig nach (1).

Sei nun umgekehrt angenommen, dass  $g \circ f_\alpha : Z_\alpha \rightarrow Y$  stetig f\u00fcr alle  $\alpha \in I$ . Sei  $V \subseteq Y$  offen. Dann gilt f\u00fcr  $\alpha \in I : f_\alpha^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_\alpha)^{-1}(V)$  ist offen in  $Z_\alpha$ . Also  $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ , d.h. offen in  $X$ . Somit ist  $g$  stetig.

#### DEFINITION 3.26

Zu  $X, I, (Z_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$  wie oben hei\u00dft die in der Proposition charakterisierte Topologie  $\mathcal{T}$  die *Finaltopologie* zu  $(Z_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ .

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie paarweise disjunkter, topologischer R\u00e4ume und  $X = \bigcup X_\alpha$ . Zu  $\alpha \in I$  sei  $\iota_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung. Dann hei\u00dft  $X$ , versehen mit der Finaltopologie zu  $(X_\alpha, \iota_\alpha)_{\alpha \in I}$ , die *topologische Summe* der  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ .

#### BEMERKUNG 3.27

- (1) Seien  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  wie oben,  $X = \bigcup X_\alpha$  die topologische Summe. Eine Teilmenge  $V \subseteq X$  ist genau dann offen in  $X$ , wenn  $V \cap X_\alpha$  offen in  $X_\alpha$  ist f\u00fcr alle  $\alpha \in I$ .
- (2) Insbesondere ist f\u00fcr  $\alpha \in I$  stets  $X_\alpha$  offener Unterraum von  $X$  und  $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$  ist eine offene Einbettung.
- (3) Ist umgekehrt  $X$  ein topologischer Raum und ist  $X = \bigcup X_\alpha$  disjunkte Zerlegung in offene Unterr\u00e4ume, so ist  $X$  die topologische Summe der  $X_\alpha$ .

#### DEFINITION 3.28

Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine \u00c4quivalenzrelation auf  $X$ . Weiter sei  $X_\sim$  die Menge der \u00c4quivalenzklassen  $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$  mit  $x \in X$ .

Die Abbildung  $p : X \rightarrow X_\sim, x \mapsto [x]$  hei\u00dft die *kanonische Projektion*.

Die durch die (eielementige) Familie  $(X, p)$  definierte Finaltopologie auf  $X_\sim$  hei\u00dft *Quotiententopologie* und  $X_\sim$  (mit dieser Topologie versehen) der *Quotientenraum* von  $X$  *modulo*  $\sim$ .

#### BEMERKUNG 3.29

- (1) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf der Menge  $X_\sim$ , bzgl. der  $p$  stetig ist.
- (2)  $V \subseteq X_\sim$  ist genau dann offen, wenn  $\{x \in X \mid [x] \in V\} = \bigcup V = p^{-1}(V)$  offen in  $X$  ist.

**PROPOSITION 3.30**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Auf  $X$  sei  $\sim$  definiert durch

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \text{ in } Y \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Sei  $p : X \rightarrow X_{\sim}$  die kanonische Projektion und  $X_{\sim}$  mit der Quotiententopologie versehen und sei  $j : f(X) \hookrightarrow Y$  die Inklusionsabbildung und  $\tilde{f} : X_{\sim} \rightarrow f(X)$ ,  $[x] \mapsto f(x)$  die von  $f$  induzierte Abbildung.

Dann sind  $p, \tilde{f}, j$  stetig und  $f = j \circ \tilde{f} \circ p$ , d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & & \uparrow f \\ X_{\sim} & \xrightarrow{\tilde{f}} & f(X) \end{array}$$

ist „kommutativ“.

Ist zudem  $f$  offen oder abgeschlossen, so ist  $\tilde{f}$  ein Homöomorphismus.

**BEWEIS**

Nach Konstruktion sind  $p, j$  stetig,  $\tilde{f}$  bijektiv und  $f = j \circ \tilde{f} \circ p$ .

Da  $f(X)$  die Initialtopologie zu  $(Y, j)$  trägt, ist mit  $f = j \circ (\tilde{f} \circ p)$  auch  $\tilde{f} \circ p$  stetig und da  $X_{\sim}$  die Finaltopologie zu  $(X, p)$  trägt, ist mit  $\tilde{f} \circ p$  bereits  $\tilde{f}$  stetig.

Sei nun o.B.d.A.  $f$  offen und  $U \subseteq X_{\sim}$  offen. Dann ist  $p^{-1}(U)$  offen in  $X$  und da  $f$  offen ist, ist auch  $\tilde{f}(U) = (j \circ \tilde{f})(U) = f(p^{-1}(U))$  offen in  $Y$ , also auch offen in  $f(X)$ . Also ist  $\tilde{f}$  offen und damit ein Homöomorphismus.

**BEISPIEL 3.31**

Sei  $\mathbb{C}$  mit der euklidischen Topologie versehen und  $\sim$  auf  $\mathbb{C}$  definiert durch  $x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2$  bzw.  $x = \pm y$ . Dann ist  $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}_{\sim}$ .

Betrachte dazu  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) := z^2$ . Dann ist  $\sim$  die durch Prop. 3.32 induzierte Äquivalenzrelation.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ p \downarrow & & \uparrow \text{id} \\ \mathbb{C}_{\sim} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Da  $f$  stetig und offen, folgt:  $\tilde{f} : \mathbb{C}_{\sim} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein Homöomorphismus.

**BEMERKUNG 3.32** ( $\rightarrow$  Aufgabe 20)

Der Einheitskreis  $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  ist als Unterraum von  $\mathbb{R}^2$  homöomorph zu  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

### 3.4 Ringe stetiger Funktionen

#### NOTATION 3.33

Sei  $\mathbb{K}$  einer der Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Wir fassen  $\mathbb{K}$  als topologischen Raum auf, versehen mit der zur euklidischen Metrik  $d$  gehörigen Topologie  $\mathcal{T}_{eukl.}$ .

#### BEMERKUNG 3.34

Die (Produkt-)Topologie des  $\mathbb{K}^n$  wird durch die Metrik  $d: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2,$$

induziert: Betrachtet man die kanonische Basis  $\mathcal{B}_{eukl.} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in \mathbb{K}^n, \epsilon > 0\}$  der euklidischen Topologie  $\mathcal{T}_{eukl.}$  und die kanonische Basis  $\mathcal{P}_{Prod} := \{W_\epsilon(x) \mid x \in \mathbb{K}^n, \epsilon > 0\}$  der Produkttopologie  $\mathcal{T}_{Prod}$ , wobei

$$\begin{aligned} B_\epsilon(x) &:= \{y \in \mathbb{K}^n \mid d(x, y) < \epsilon\}; \\ W_\epsilon(x) &:= \{y \in \mathbb{K}^n \mid |y_i - x_i| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

dann gilt zu  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $\epsilon > 0$  stets  $B_{\epsilon/n}(x) \subseteq W_\epsilon(x) \subseteq B_\epsilon(x)$ , also  $\mathcal{T}_{eukl.} = \mathcal{T}_{Prod}$ .

#### BEMERKUNG 3.35 (→ Aufgabe 21)

Addition und Multiplikation  $\alpha, \mu: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  sind stetig, ebenso die Betragsfunktion  $|\cdot|: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$  und die Invertierung  $(\cdot)^{-1}: \mathbb{K}^\times \rightarrow \mathbb{K}$ .

#### PROPOSITION 3.36

Für einen topologischen Raum  $X$  bezeichne  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$  die Menge der stetigen Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann gelten:

- (1) Für  $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  sind auch  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $fg \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ .
- (2) Für  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$  ist  $|f| \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ .
- (3) Für  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$  ist  $U_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  offen in  $X$  und  $\frac{1}{f}: U_f \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  ist stetig.

#### BEWEIS

- (1) Mit  $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$  ist auch  $(f, g): X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (f(x), g(x))$  stetig und damit auch  $f + g = \alpha \circ (f, g)$  und  $fg = \mu \circ (f, g)$  als Verkettung stetiger Funktionen.

Insbesondere ist  $\lambda$ , aufgefasst als stetige Abbildung  $\lambda: X \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \lambda$ , stetig, also auch  $\lambda f$ .

- (2)  $|\cdot|: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, d.h. für stetiges  $f$  auch  $|\cdot| \circ f = |f|$ .

- (3) Sei  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ , dann ist  $U_f = f^{-1}(\mathbb{K}^\times)$  offen als Urbild einer offenen Menge und mit  $f$  ist auch  $f|_{U_f}: U_f \rightarrow \mathbb{K}$  stetig. Dann ist auch  $(\cdot)^{-1} \circ f = \frac{1}{f}: U_f \rightarrow \mathbb{K}$  stetig.

#### DEFINITION 3.37

$\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ , versehen mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$ , heißt der *Ring der stetigen Funktionen* auf  $X$ .



## 4 Konvergenz

### 4.1 Folgen

#### DEFINITION 4.1

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  *konvergiert gegen*  $x$  bzw.  $x$  ist *Grenzwert* von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}_x : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in U.$$

#### NOTATION 4.2

Man schreibt dann auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ .

#### PROPOSITION 4.3

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $c \in X$  ein Punkt, der eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

- (1) Sei  $A \subseteq X$ . Genau dann gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow c$ , wenn  $c \in \bar{A}$ .
- (2) Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen topologischen Raum  $Y$  ist genau dann stetig in  $c$ , wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow c$  auch  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(c)$  gilt.

#### BEWEIS

Sei  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}_c$  eine (abzählbare) Umgenungsbasis von  $c$ . O.B.d.A. sei dabei  $U_n \supseteq U_{n+1}$  (In jedem Fall ist  $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so eine Umgebungsbasis, wenn  $U'_n = U_0 \cap \dots \cap U_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  definiert wird.).

- (1)  $\Rightarrow$ : Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow c$ . Zu  $U \in \mathcal{U}_c$  gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit (insbesondere)  $x_{n_0} \in U \cap A$ , also  $U \cap A \neq \emptyset$ . Damit  $c \in \bar{A}$ .  
 $\Leftarrow$ : Sei  $c \in \bar{A}$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist dann  $U_n \cap A$  nicht leer. Wir wählen (mit dem Auswahlaxiom)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod (U_n \cap A)$ . Dann  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ . Für  $U \in \mathcal{U}_c$  gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $U_{n_0} \subseteq U$ ; dann gilt  $x_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq U$  für  $n \geq n_0$ . Also  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow c$ .
- (2)  $\Rightarrow$ : Seien  $f$  stetig in  $c$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow c$  gegeben. Zu  $V \in \mathcal{U}_{f(c)}$  ist  $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_c$  und daher gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $(x_n)_{n \geq n_0} \subseteq f^{-1}(V)$ , also  $(f(x_n))_{n \geq n_0} \subseteq V$ . Damit konvergiert  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(c)$ .  
 $\Leftarrow$ : Sei  $A \subseteq Y$  abgeschlossen. Wir zeigen, dass  $f^{-1}(A) \subseteq X$  abgeschlossen ist. Sei hierfür  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $f^{-1}(A)$  mit  $x_n \rightarrow x \in X$ , dann konvergiert nach Voraussetzung  $f(x_n)$  gegen  $f(x)$  und da  $A$  abgeschlossen, liegt  $f(x)$  in  $A$ , d.h.  $x \in f^{-1}(A)$ . Nach (1) ist  $f^{-1}(A)$  damit abgeschlossen.

#### BEMERKUNG 4.4 ( $\rightarrow$ Aufgabe 22)

- (1)  $\Rightarrow$  gilt jeweils auch, ohne dass  $c$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.
- (2) Für  $\Leftarrow$  ist diese Forderung allerdings notwendig. Betrachte dazu eine überabzählbare, wohlgeordnete Menge  $(X, \preccurlyeq)$  mit einem größten Element  $\eta$  derart, dass für jedes  $a \in A := X \setminus \{\eta\}$  die Menge  $(-\infty, a] := \{x \in X \mid x \preccurlyeq a\}$  abzählbar ist ( $\rightarrow$  Aufgabe 2). Dann ist  $(X, \mathcal{T}_{\preccurlyeq})$  ein Hausdorffraum mit folgenden Eigenschaften:
  - (a)  $\eta \in \bar{A}$ , aber es gibt keine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  mit  $x_n \rightarrow \eta$ .
  - (b) Sei  $\{0, 1\}$  mit der diskreten Topologie versehen, dann ist die charakt. Funktion  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$  nicht stetig, aber folgenstetig (d.h. für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  mit  $x_n \rightarrow x$  gilt auch  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ).
  - (c) Insbesondere erfüllt  $(X, \mathcal{T}_{\preccurlyeq})$  keines der beiden Abzählbarkeitsaxiome und ist nicht metrisierbar.

#### DEFINITION 4.5

Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt *Häufungspunkt* von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn es zu  $U \in \mathcal{U}_x$  und  $N \in \mathbb{N}$  stets ein  $n \geq N$  gibt mit  $x_n \in U$ .

**PROPOSITION 4.6**

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  und  $x \in X$  ein Punkt mit abzählbarer Umgebungsbasis. Genau dann ist  $x$  Häufungspunkt von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $x$  konvergierende Teilfolge enthält.

**BEWEIS**

- $\Rightarrow$ : Sei  $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$ . Setze  $W_i := \bigcap_{j=1}^i V_j$ , dann ist auch  $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$  abzählbare und zusätzlich absteigende Umgebungsbasis von  $x$ . Zu gegebenem  $U \in \mathcal{U}_x$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x \in W_N \subseteq U$ . Also gilt:  $x_{n_N} \in W_N$ ,  $x_{n_{N+1}} \in W_{N+1} \subseteq W_N$ ,  $x_{n_{N+i}} \in W_{N+i} \subseteq W_N \subseteq U$ , also  $\forall j \geq N : x_{n_j} \in W_N \subseteq U$ .
- $\Leftarrow$ : Sei  $(x_{i_n})_n \subseteq (x_n)$  mit  $(x_{i_n}) \rightarrow x$ . Dann gibt es zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_{i_j} \in U$  für alle  $j \geq N$ ; insbesondere gibt es also zu jedem Index  $i_j$  ein  $i_m \in \mathbb{N}_{i_j}$  mit  $x_{i_m} \in U$ : wähle einfach  $i_m > \max\{i_j, N\}$ . Damit ist  $x$  ein Häufungspunkt von  $(x_{i_n})_n$ . Da  $(x_{i_n})_n$  eine Teilfolge von  $(x_n)$  ist, ist  $x$  dann auch ein Häufungspunkt von  $(x_n)$ .

## 4.2 Netze

### DEFINITION 4.7

Eine geordnete Menge  $(M, \prec)$  heißt *nach oben* bzw. *nach unten gerichtet*, falls es zu  $x, y \in M$  stets ein  $z \in M$  gibt mit  $x \prec z$  und  $y \prec z$  (bzw.  $z \prec x$  und  $z \prec y$ ).

### BEMERKUNG 4.8

Wir sagen auch „gerichtete Menge“ statt „nach oben gerichtete Menge“. Ist nämlich  $\succ$  die zu  $\prec$  inverse Relation auf  $M$  (d.h.  $x \succ y \Leftrightarrow y \prec x$ ), so ist  $(M, \prec)$  genau dann nach oben gerichtet, wenn  $(M, \succ)$  nach unten gerichtet ist.

### BEISPIEL 4.9

- (1) Jede total geordnete Menge ist nach oben und nach unten gerichtet.
- (2) Zu einer Menge  $M$  ist  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$  nach oben und nach unten gerichtet.

### DEFINITION 4.10

Sei  $X$  eine Menge. Ein *Netz* in  $X$  über der gerichteten Indexmenge  $(I, \leq)$  ist eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$ .

Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, dann heißt  $(f(x_i))_{i \in I} \subseteq Y$  das *Bildnetz* von  $(x_i)_{i \in I}$  unter  $f$ .

Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $(x_i)_{i \in I}$  ein Netz in  $X$  über  $(I, \leq)$ , so sagt man,  $(x_i)_{i \in I}$  *konvergiert gegen* den Punkt  $x \in X$ , falls gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}_x : \exists i_0 \in I : \forall i \in I, i \geq i_0 : x_i \in U.$$

Schreibweise:  $(x_i)_{i \in I} \rightarrow x$ . Dann heißt  $x$  *Grenzwert* von  $(x_i)_{i \in I}$ .

### BEMERKUNG 4.11 (→ Aufgabe 23+24)

- (1) Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $c \in X$  und  $A \subseteq X$ . Genau dann ist  $c \in \overline{A}$ , wenn es ein Netz  $(x_i)_{i \in I}$  in  $A$  zu einer geeigneten Menge  $(I, \leq)$  gibt mit  $(x_i)_{i \in I} \rightarrow c$ .
- (2) Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen  $X, Y$  und sei  $c \in X$ . Genau dann ist  $f$  stetig in  $c$ , wenn für jedes Netz  $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$  mit  $x_i \rightarrow c$  in  $X$  auch  $f(x_i) \rightarrow f(c)$  in  $Y$  gilt.

### PROPOSITION 4.12

In einem Hausdorffraum hat jedes Netz höchstens einen Grenzwert.

### BEWEIS

Sei  $X$  ein Hausdorffraum,  $(x_i)_{i \in I}$  ein Netz und seien  $c, c' \in X$  mit  $(x_i)_{i \in I} \rightarrow c, c'$ . Angenommen,  $c \neq c'$ . Nach Voraussetzung gibt es dann  $V \in \mathcal{U}_c, V' \in \mathcal{U}_{c'}$  mit  $V \cap V' = \emptyset$ . Wegen der Konvergenz gibt es  $j, j' \in I$  mit  $(x_i)_{i \geq j} \subseteq V$  und  $(x_i)_{i \geq j'} \subseteq V'$ . Da  $I$  gerichtet, gibt es ein  $k \in I$  mit  $j \leq k, j' \leq k$ . Dann  $x_k \in V \cap V' = \emptyset$ , Widerspruch.

### NOTATION 4.13

Ist  $X$  ein Hausdorffraum und  $(x_i)_{i \in I}$  ein konvergentes Netz in  $X$ , so schreiben wir  $\lim(x_i)_{i \in I}$  für seinen Grenzwert.

### 4.3 Filter

**DEFINITION 4.14** (Cartan, 1937)

Sei  $X$  eine Menge. Ein Teilmengensystem  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt *Filter* auf  $X$ , falls gelten:

- (F1)  $\forall U \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{P}(X) : U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{F}$ .  
 (F2)  $\forall U, U' \in \mathcal{F} : U \cap U' \in \mathcal{F}$ .  
 (F3)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  und  $X \in \mathcal{F}$ .

**BEMERKUNG 4.15**

- (1)  $\mathcal{F}$  ist bzgl.  $\subseteq$  nach unten gerichtet (und auch nach oben gerichtet).  
 (2)  $\emptyset \neq \mathcal{F} \neq \mathcal{P}(M)$ .

**BEISPIEL 4.16**

- (1) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zu  $p \in X$  ist  $\mathcal{U}_p$  ein Filter, der *Umgebungsfilter* von  $p$ .  
 (2) Sei  $M$  eine unendliche Menge. Dann ist  $\{C \in \mathcal{P}(M) \mid M \setminus C \text{ endlich}\}$  ein Filter, der *Kofinalfilter*.  
 (3) Sei  $(x_i)_{i \in I}$  ein nicht-leeres Netz im topologischen Raum  $X$ . Dann ist

$$\mathcal{F} := \{U \subseteq X \mid \exists i_0 \in I : \forall i \in I, i \geq i_0 : x_i \in U\}$$

ein Filter, der zu  $(x_i)_{i \in I}$  *assoziierte Filter* Es gilt:  $(x_i)_{i \in I} \rightarrow p \in X \Leftrightarrow \mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{F}$ .

**DEFINITION 4.17**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Der Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  *konvergiert gegen*  $p \in X$ , falls  $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{F}$ . Dafür schreibt man auch  $\mathcal{F} \rightarrow p$ .

**BEMERKUNG 4.18** ( $\rightarrow$  Aufgabe 25)

Seien  $M$  eine Menge und  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ . Das Mengensystem

$$\mathcal{F} := \{V \in \mathcal{P}(M) \mid \exists U \in \mathcal{B} : U \subseteq V\}$$

ist genau dann ein Filter, wenn gilt:

- (FB1)  $\forall U, U' \in \mathcal{B} : \exists V \in \mathcal{B} : V \subseteq U \cap U'$  und  
 (FB2)  $\emptyset \notin \mathcal{B}, \mathcal{B} \neq \emptyset$ .

**DEFINITION 4.19**

Zu einem Mengensystem  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ , das (FB1) und (FB2) erfüllt, heißt

$$\mathcal{F} := \{V \in \mathcal{P}(M) \mid \exists U \in \mathcal{B} : U \subseteq V\}$$

der von  $\mathcal{B}$  *erzeugte Filter*.  $\mathcal{B}$  heißt dann eine *Filterbasis* von  $\mathcal{F}$ .

Sind  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  Filter auf  $M$ , so heißt  $\mathcal{F}_1$  *gröber* als  $\mathcal{F}_2$  und  $\mathcal{F}_2$  *feiner* als  $\mathcal{F}_1$ , wenn  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$  ist.

**BEMERKUNG 4.20**

In einem topologischen Raum  $X$  ist eine Umgebungsbasis von  $a \in X$  gerade eine Filterbasis von  $\mathcal{U}_a$ .

**LEMMA 4.21**

Sind  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$  zwei Filter auf  $X$  mit zugehörigen Filterbasen  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$ , so gilt:

$$\mathcal{F}_2 \text{ ist feiner als } \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}_1 : \exists V \in \mathcal{B}_2 : V \subseteq U.$$

**BEWEIS**

$$\begin{aligned} \forall U \in \mathcal{B}_1 : \exists V \in \mathcal{B}_2 : V \subseteq U & \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{F}_1 : \exists V \in \mathcal{B}_2 : V \subseteq W \\ & \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{F}_1 : \exists W' \in \mathcal{F}_2 : W' \subseteq W \\ \text{da } \mathcal{F}_2 \text{ Bed. (F1) erfüllt} & \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \end{aligned}$$

**DEFINITION 4.22**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x_i)_{i \in I}$  ein Netz in  $X$ . Ein Punkt  $p \in X$  heißt ein *Häufungspunkt* von  $(x_i)_{i \in I}$ , falls  $\forall U \in \mathcal{U}_p, \forall i \in I : \exists j \in I, j \geq i : x_j \in U$ .

**PROPOSITION 4.23**

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$  ein Netz und  $\mathcal{F}$  der dazu assoziierte Filter. Dann gilt:

$$p \in X \text{ ist Häufungspunkt von } (x_i)_{i \in I} \Leftrightarrow p \in \bigcap \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{F}\}.$$

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ : Seien  $p$  ein Häufungspunkt von  $(x_i)_{i \in I}$  und  $V \in \mathcal{F}$ . Dazu gibt es ein  $i_0 \in I$  mit  $(x_i)_{i \geq i_0} \subseteq V$ . Zu  $U \in \mathcal{U}_p$  gibt es ein  $j \in I$  mit  $j \geq i_0$  und  $x_j \in U$ . Dann  $x_j \in U \cap V$ , also  $U \cap V \neq \emptyset$ . Damit gilt für alle  $U \in \mathcal{U}_p$ , dass  $U \cap V \neq \emptyset$ , d.h.  $p \in \bar{V}$ .

$\Leftarrow$ : Seien  $p \in \bigcap \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{F}\}$ ,  $U \in \mathcal{U}_p$  und  $i_0 \in I$ . Dann  $\{x_i \mid i \in I_{\geq i_0}\} \in \mathcal{F}$ , also  $p \in \overline{\{x_i \mid i \in I_{\geq i_0}\}}$ , d.h.  $U \cap \{x_i \mid i \in I_{\geq i_0}\} \neq \emptyset$ , d.h. es gibt ein  $i \in I_{\geq i_0}$  mit  $x_i \in U$ . Also ist  $p$  ein Häufungspunkt von  $(x_i)_{i \in I}$ .

**DEFINITION 4.24**

Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf dem topologischen Raum  $X$ . Ein Punkt  $p \in X$  heißt *Häufungspunkt* von  $\mathcal{F}$ , falls  $p \in \bigcap \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{F}\}$  ist.

**BEMERKUNG 4.25** ( $\rightarrow$  Aufgabe 26)

Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf einer Menge  $X$  mit  $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$  ( $\mathcal{F}$  heißt dann *frei*). Dann gelten:

- (1)  $X$  ist unendlich.
- (2) In der kofinalen Topologie auf  $X$  ist jedes Element von  $X$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ .
- (3) In der diskreten Topologie auf  $X$  hat  $\mathcal{F}$  keinen Häufungspunkt.

$\bigcap \mathcal{F} \subseteq M$  heißt das *Zentrum* von  $\mathcal{F}$ . Ist  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ , dann heißt  $\mathcal{F}$  *fixiert*.

**PROPOSITION 4.26**

Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf dem topologischen Raum  $X$ . Gilt  $\mathcal{F} \rightarrow p \in X$ , so ist  $p$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ .

**BEWEIS**

$\mathcal{F} \rightarrow p$ , d.h.  $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{F}$ . Für  $V \in \mathcal{F}$  und  $U \in \mathcal{U}_p$  gilt  $V, U \in \mathcal{F}$ , also  $V \cap U \in \mathcal{F}$ , insbesondere  $V \cap U \neq \emptyset$ . Für  $V \in \mathcal{F}$  ist also  $p \in \bar{V}$ .

**SATZ 4.27**

Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf dem topologischen Raum  $X$ . Dann gilt:

$p$  ist Häufungspunkt von  $\mathcal{F} \Leftrightarrow$  es gibt einen Filter  $\mathcal{F}'$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}' \rightarrow p$ .

**BEWEIS**

Ist  $\mathcal{F}'$  ein Filter auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}' \rightarrow p$ , so ist mit Prop. 4.28  $p \in \bigcap \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{F}\}$  und somit  $p$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ .

Sei nun umgekehrt  $p$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ . Dann erfüllt  $\mathcal{B}' := \{A \cap U \mid A \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}_p\}$  die Bedingungen (FB1) und (FB2) (dazu:  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ , da  $p$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}'$  ist), erzeugt also einen Filter  $\mathcal{F}'$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$  und  $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{F}'$ , d.h.  $\mathcal{F}' \rightarrow p$ .

**KOROLLAR 4.28**

- (1) Seien  $X$  ein Hausdorffraum,  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$  und  $p \in X$ . Gilt  $\mathcal{F} \rightarrow p$ , so ist  $p$  der einzige Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ .
- (2) Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn jeder Filter auf  $X$  höchstens einen Grenzwert hat.

**BEWEIS**

- (1) Konvergiert  $\mathcal{F}$  gegen  $p$ , so  $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{F}$  und  $p$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$  (Prop. 4.28).

Sei nun  $a$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ . Dann gibt es einen feineren Filter  $\mathcal{F}'$  mit  $\mathcal{F}' \rightarrow a$ , also gilt  $\mathcal{U}_p \cup \mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{F}'$ . Für  $U \in \mathcal{U}_p$  und  $V \in \mathcal{U}_a$  gilt dann  $U \cap V \in \mathcal{F}'$ , also  $U \cap V \neq \emptyset$ . Da  $X$  Hausdorffsch ist, folgt  $a = p$ .

- (2)  $\Rightarrow$ : Direkt mit (1).

$\Leftarrow$ : Ist  $X$  kein Hausdorffraum und  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ ,  $U \cap V \neq \emptyset$  für alle  $U \in \mathcal{U}_a, V \in \mathcal{U}_b$ , so ist  $\mathcal{B} := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}_a, V \in \mathcal{U}_b\}$  Basis eines Filters  $\mathcal{F}$  mit  $\mathcal{F} \rightarrow a$ ,  $\mathcal{F} \rightarrow b$ .

**BEMERKUNG 4.29**

Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf der Menge  $M$  und sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Dann ist

$$f(\mathcal{F}) = \{V \subseteq N \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{F}\}$$

ein Filter auf  $N$  und  $\{f(U) \mid U \in \mathcal{F}\}$  ist eine Filterbasis von  $f(\mathcal{F})$ .

**DEFINITION 4.30**

$f(\mathcal{F})$  heißt der *Bildfilter* von  $\mathcal{F}$  unter  $f$ .

**BEMERKUNG 4.31**

Ist  $\mathcal{F}$  der zu einem Netz  $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$  assoziierte Filter, so ist für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  der Bildfilter  $f(\mathcal{F})$  gerade der zum Bildnetz assoziierte Filter auf  $Y$ .

**SATZ 4.32**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und  $a \in X$ . Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } a \Leftrightarrow \text{für jeden Filter } \mathcal{F} \text{ auf } X \text{ mit } \mathcal{F} \rightarrow a \text{ gilt auch } f(\mathcal{F}) \rightarrow f(a).$$

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ : Sei  $f$  stetig in  $a$  und  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \rightarrow a$ . Dann  $\mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{F}$ . Zu  $U \in \mathcal{U}_{f(a)}$  ist  $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{F}$ , somit  $U \in f(\mathcal{F})$ . also  $\mathcal{U}_{f(a)} \subseteq f(\mathcal{F})$ , d.h.  $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(a)$ .

$\Leftarrow$ : Zu jedem Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \rightarrow a$  gelte auch  $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(a)$ . Für  $\mathcal{F} = \mathcal{U}_a$  ergibt sich damit  $f(\mathcal{U}_a) \rightarrow f(a)$ , d.h.  $\forall U \in \mathcal{U}_{f(a)} : f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_a$ . Also ist  $f$  stetig in  $a$ .

## 4.4 Ultrafilter

### PROPOSITION 4.33

Für einen Filter  $\mathcal{F}$  auf einer Menge  $M$  sind äquivalent:

- (1) Ist  $\mathcal{F}'$  ein Filter auf  $M$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ , so ist  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ .
- (2) Für alle  $A \in \mathcal{P}(M)$  gilt entweder  $A \in \mathcal{F}$  oder  $A^c \in \mathcal{F}$ .

$\mathcal{F}$  heißt dann ein *Ultrafilter*.

### BEWEIS

$\Rightarrow$ : Sei  $A \subseteq M$  derart, dass weder  $A$  noch  $A^c$  in  $\mathcal{F}$  liegen. Dann ist  $\mathcal{B}' := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{F}\}$  Basis eines Filters  $\mathcal{F}'$  auf  $M$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ . Wegen  $A^c \notin \mathcal{F}$  gilt dabei für  $U \in \mathcal{F}$  stets  $U \not\subseteq A^c$ , also  $U \cap A \neq \emptyset$ . Da  $A \in \mathcal{F}'$ , ist  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ .

$\Leftarrow$ : Seien  $\mathcal{F}'$  ein Filter mit  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$  und  $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ . Dann  $A^c \notin \mathcal{F}'$ , also  $A, A^c \notin \mathcal{F}$ .

### BEISPIEL 4.34

Zu  $a \in M$  ist  $\{V \in \mathcal{P}(M) \mid a \in V\}$  ein Ultrafilter auf  $M$ . Diese heißen *Hauptultrafilter*.

### BEMERKUNG 4.35 ( $\rightarrow$ Aufgabe 27)

Sei  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf der Menge  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $\mathcal{F}$  ist kein Hauptultrafilter.
- (2)  $\mathcal{F}$  ist frei.
- (3)  $\mathcal{F}$  enthält keine endliche Menge.
- (4)  $M$  ist unendlich und  $\mathcal{F}$  ist eine Verfeinerung des Filters der koendlichen Teilmengen von  $M$ .

### SATZ 4.36

Sei  $M$  eine Menge. Jeder Filter auf  $M$  ist in einem Ultrafilter enthalten.

### BEWEIS

Sei  $\Omega$  die Menge der Filter auf  $M$  (partiell geordnet durch  $\subseteq$ ). Ist  $\omega \subseteq \Omega$  eine nicht leere Kette in  $\Omega$ , so ist  $\bigcup \omega$  wieder ein Filter auf  $M$ , also eine obere Schranke von  $\omega$  in  $\Omega$ . Zu jedem  $\mathcal{F}$  gibt es also ein maximales Element  $\mathcal{F}' \in \Omega$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ . Die Maximalität bedeutet gerade, dass  $\mathcal{F}'$  ein Ultrafilter ist.

### BEMERKUNG 4.37

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Ist  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf  $M$ , so ist  $f(\mathcal{F})$  ein Ultrafilter auf  $N$ .

Für  $A \in \mathcal{P}(N)$  mit  $f^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$  ist nämlich  $f^{-1}(N \setminus A) = M \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$  und somit  $N \setminus A \in f(\mathcal{F})$ .

### SATZ 4.38

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$  und  $p \in X$ . Dann gilt:

$p$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F} \Leftrightarrow$  es gibt einen Ultrafilter  $\mathcal{F}'$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}' \rightarrow p$ .

### BEWEIS

$\Leftarrow$ : Folgt aus Satz 4.29.

$\Rightarrow$ : Sei  $p$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ . Dann gibt es nach Satz 4.29 einen Filter  $\mathcal{F}^*$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$  und  $\mathcal{F}^* \rightarrow p$ . Weiter gibt es dann nach Satz 4.37 einen Ultrafilter  $\mathcal{F}'$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}'$ . Dann  $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}'$ , also  $\mathcal{F}' \rightarrow p$ .

### FOLGERUNG 4.39

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf  $X$  und  $x \in X$ . Genau dann ist  $x$  Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ , wenn  $\mathcal{F}$  gegen  $x$  konvergiert.

## 5 Kompaktheit

### 5.1 Charakterisierung kompakter Räume

**SATZ 5.1**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Jede offene Überdeckung von  $X$  enthält eine endliche Überdeckung, d.h. ist  $\mathcal{V}$  ein System offener Mengen von  $X$  mit  $X = \bigcup \mathcal{V}$ , dann existiert ein endliches Teilsystem  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  mit  $X = \bigcup \mathcal{V}'$ .
- (2) In jedem System  $\mathcal{A}$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  mit  $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$  gibt es ein endliches Teilsystem  $\mathcal{A}'$  mit  $\bigcap \mathcal{A}' = \emptyset$ .
- (3) Jeder Filter auf  $X$  hat einen Häufungspunkt.
- (4) Jeder Ultrafilter auf  $X$  konvergiert.

$X$  heißt dann *kompakt*.

**BEWEIS**

(1)  $\Leftrightarrow$  (2):

Klar mit

$$\bigcap \mathcal{A} = \emptyset \text{ und } \mathcal{V} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{V} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A) = X \setminus \bigcap \mathcal{A} = X.$$

Wegen (1) gibt es  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  endlich mit  $\bigcup \mathcal{V}' = X$ , d.h.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  mit  $X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus A_i) = X \setminus (\bigcap_{i=1}^n A_i)$ . Also  $A_1 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$ . Rückrichtung ähnlich.

(3)  $\Rightarrow$  (4):

Ist  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf  $X$  und  $p \in X$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ , so gilt  $\mathcal{F} \rightarrow p$  (Satz 40).

(4)  $\Rightarrow$  (3):

Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$ . Dann gibt es nach Satz 4.38 einen Ultrafilter  $\mathcal{F}'$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ . Wegen (4) konvergiert  $\mathcal{F}'$  gegen ein  $p \in X$ . Dann ist  $p$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$  (Satz 40).

(2)  $\Rightarrow$  (3):

Seien  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$  und  $\mathcal{A} = \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{F}\}$ . Für  $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{F}$  ist  $\emptyset \neq V_1 \cap \dots \cap V_n \subseteq \bar{V}_1 \cap \dots \cap \bar{V}_n$ . Somit  $\bigcap \mathcal{A}' \neq \emptyset$  für jedes endliche Teilsystem  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ . Wegen (2) folgt  $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ . Somit gibt es ein  $p \in X$  mit  $p \in \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{F}\}$ . Dann ist  $p$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2):

Sei  $\mathcal{A}$  ein System von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ . Wir nehmen an, es gelte  $\bigcap \mathcal{A}' \neq \emptyset$  für alle  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  endlich. Zu zeigen:  $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ .

Wegen der Annahme ist  $\mathcal{B} := \{\bigcap \mathcal{A}' \mid \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \text{ ist endlich}\}$  eine Filterbasis eines Filters  $\mathcal{F}$  auf  $X$ . Dann

$$\emptyset \neq \bigcap_{\substack{(3) \\ \supseteq \mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}}} \underbrace{\{\bar{V} \mid V \in \mathcal{F}\}}_{\supseteq \mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}} \subseteq \bigcap \mathcal{B} \stackrel{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}}{\subseteq} \bigcap \mathcal{A},$$

also  $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ .

**KOROLLAR 5.2**

$X$  ist kompakt und Hausdorffsch  $\Leftrightarrow$  jeder Ultrafilter von  $X$  konvergiert gegen genau einen Punkt.

**BEWEIS**

( $X$  kompakt  $\Leftrightarrow$  jeder Ultrafilter konvergiert) und ( $X$  Hausdorffsch  $\Leftrightarrow$  Konvergenz von (Ultra)-Filtern ist eindeutig).

**DEFINITION 5.3**

Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt *kompakt*, wenn  $A$  als Unterraum ein kompakter topologischer Raum ist, d.h. wenn es zu jedem System  $\mathcal{V}$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit  $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$  ein endliches System  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  gibt mit  $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}'$  gibt.

$X$  heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt in  $X$  eine kompakte Umgebung besitzt.



**BEMERKUNG 5.4**

In einigen Büchern wird für die Kompaktheit eines Raumes zusätzlich gefordert, dass der Raum hausdorffsch ist. Zur Unterscheidung verwendet man dann auch die Bezeichnung „quasikompakt“ in der Art, wie hier „kompakt“ eingeführt wurde. Wir werden kompakte Hausdorffräume im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

**BEISPIEL 5.5**

- (1) Endliche Teilmengen eines topologischen Raumes sind kompakt.
- (2) Sei  $X$  ein Raum mit der kofinalen Topologie. Dann ist  $X$  kompakt. Jeder Unterraum von  $X$  trägt (als Spurtopologie) die kofinale Topologie, d.h. jede Teilmenge von  $X$  ist kompakt. Allerdings sind neben  $X$  nur die endlichen Teilmengen von  $X$  abgeschlossen.
- (3) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Genau dann ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt, wenn  $U$  beschränkt und abgeschlossen ist (**Satz von Heine-Borel**). Insbesondere ist  $\mathbb{R}^n$  lokal kompakt.
- (4)  $\mathbb{Q}$  ist als Unterraum von  $\mathbb{R}$  nicht lokal kompakt.

**PROPOSITION 5.6**

- (1) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge im kompakten Raum  $X$ . Dann hat  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stets einen Häufungspunkt.
- (2) Falls dieser Häufungspunkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, so enthält die Folge eine konvergente Teilfolge.

**BEWEIS**

- (1) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  und  $\mathcal{F}$  der zugehörige assoziierte Filter. Da  $X$  kompakt, hat  $\mathcal{F}$  einen Häufungspunkt und dieser ist dann auch Häufungspunkt von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (2) Dies besagt Prop. 4.7.

**BEMERKUNG 5.7** (→ Aufgabe 28)

Sei  $(X, \preceq)$  eine total geordnete Menge. Dann besitzt jede nicht leere, kompakte Teilmenge von  $(X, \mathcal{T}_{\preceq})$  bzgl.  $\preceq$  ein Maximum und ein Minimum.

**PROPOSITION 5.8**

Sei  $X$  ein kompakter topologischer Raum. Dann gelten:

- (1) Jede abgeschlossene Teilmenge von  $X$  ist kompakt.
- (2) Ist  $f : X \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung in den topologischen Raum  $Z$ , so ist  $f(X)$  in  $Z$  kompakt.

**BEWEIS**

- (1) Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Die abgeschlossenen Teilmengen von  $A$  sind dann in  $X$  abgeschlossen. Ist nun  $\mathcal{A}$  ein System abgeschlossener Teilmengen in  $A$  (dann auch in  $X$  abgeschlossen) mit  $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ , so folgt aus der Kompaktheit von  $X$  die Existenz von  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  endlich mit  $\bigcap \mathcal{A}' = \emptyset$ .
- (2) Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $f(X)$ . Für  $i \in I$  ist dann  $U_i := V_i \cap f(X)$  für ein offenes  $V_i \subseteq Z$ . Da  $f$  stetig ist und

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1} \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{offen in } X},$$

gibt es wegen der Kompaktheit von  $X$  ein  $J \subseteq I$  endlich mit

$$X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i).$$

Dann  $f(X) = \bigcup_{i \in J} U_i$ , d.h.  $(U_i)_{i \in J}$  ist endliche, offene Überdeckung von  $f(X)$ .

**KOROLLAR 5.9**

Sei  $U$  eine nicht leere, kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes  $X$ . Dann nimmt jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $U$  Maximum und Minimum an.

**BEWEIS**

$\emptyset \neq f(U) \subseteq \mathbb{R}$  kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Dann existieren  $\max f(U)$  und  $\min f(U)$ .

**BEMERKUNG 5.10** ( $\rightarrow$  Aufgabe 29)

Sei  $X = \mathbb{R}$  die Sorgenfrey-Gerade, d.h. mit der von  $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$  erzeugten Topologie  $\mathcal{T}_{Sorg.}$  versehen. Dann ist kein echtes Intervall in  $\mathbb{R}$  kompakt in  $X$  und  $X$  ist nicht lokal kompakt.

## 5.2 Kompakte Mengen in Hausdorffräumen

### SATZ 5.11

Seien  $X$  ein Hausdorffraum und  $A, B \subseteq X$  kompakt mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann gibt es offene Teilmengen  $U, V \subseteq X$  mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

### BEWEIS

Für jedes Paar  $(a, b) \in A \times B$  wählen wir offene Mengen  $U_{a,b}, V_{a,b} \subseteq X$  mit  $a \in U_{a,b}$ ,  $b \in V_{a,b}$  und  $U_{a,b} \cap V_{a,b} = \emptyset$ . Zu festem  $b \in B$  ist dann  $A \subseteq \bigcup\{U_{a,b} \mid a \in A\}$ . Wegen der Kompaktheit von  $A$  folgt die Existenz einer endlichen Teilmenge  $A_b$  mit  $A \subseteq \bigcup\{U_{a,b} \mid a \in A_b\}$ . Seien dazu  $U_b = \bigcup\{U_{a,b} \mid a \in A_b\}$  und  $V_b := \bigcap\{V_{a,b} \mid a \in A_b\}$ . Diese Mengen sind offen in  $X$  und  $A \subseteq U_b$ ,  $b \in V_b$  sowie  $U_b \cap V_b = \emptyset$ .

Wegen  $B \subseteq \bigcup\{V_b \mid b \in B\}$  und der Kompaktheit von  $B$  gibt es eine endliche Teilmenge  $B' \subseteq B$  mit  $B \subseteq \bigcup\{V_b \mid b \in B'\}$ . Mit  $V := \bigcup\{V_b \mid b \in B'\}$  und  $U := \bigcap\{U_b \mid b \in B'\}$  sind  $U, V$  offen in  $X$  und  $B \subseteq V$ ,  $A \subseteq U$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

### KOROLLAR 5.12

In einem Hausdorffraum sind kompakte Teilmengen stets abgeschlossen.

### BEWEIS

Sei  $A$  eine kompakte Teilmenge im Hausdorffraum  $X$ . Damit  $A$  abgeschlossen ist, reicht es zu zeigen: Für  $x \in A^c$  ist  $x \in (A^c)^\circ$ . Da  $\{x\}$  und  $A$  disjunkte, kompakte Mengen in  $X$  sind, gibt es  $U, V$  offen mit  $\{x\} \subseteq U$ ,  $A \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Dann  $x \in U \subseteq V^c \subseteq A^c$ , also ist  $U \subseteq A^c$  eine Umgebung von  $x$ .

### BEMERKUNG 5.13

Ist  $X$  kein Hausdorffraum, so kann es kompakte Teilmengen geben, die nicht abgeschlossen in  $X$  sind.

Beispielsweise ist in der kofinalen Topologie einer unendlichen Menge jede Teilmenge kompakt, aber nur die endlichen Teilmengen sowie  $X$  sind abgeschlossen.

### SATZ 5.14

Seien  $X$  ein kompakter topologischer Raum,  $Y$  ein Hausdorffraum und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $f$  abgeschlossen. Ist  $f$  zudem bijektiv, so ist  $f$  ein Homöomorphismus.

### BEWEIS

Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt, also auch  $f(A)$  kompakt nach Prop. 5.9. Da  $Y$  Hausdorffsch, ist  $f(A)$  nach Korollar 5.13 abgeschlossen in  $Y$ . Der Zusatz ist klar.

### SATZ 5.15

Sei  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum. Dann hat jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebungsbasis aus kompakten, insbesondere abgeschlossenen Umgebungen.

### BEWEIS

Sei  $x \in X$ . Zu zeigen ist: Jede offene Umgebung in  $X$  von  $x$  enthält eine kompakte Umgebung.

Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $x$ . Nach Vor. gibt es eine kompakte Umgebung  $K$  von  $x$ . Dann ist  $K \setminus U = U^c \cap K$  abgeschlossen in der kompakten Menge  $K$ , also selbst kompakt, und  $x \notin K \setminus U$ . Nach Satz 5.12 gibt es  $V, W \subseteq X$  offen mit  $x \in V$ ,  $K \setminus U \subseteq W$  und  $V \cap W = \emptyset$ . Dann  $x \in V \cap K \subseteq K \setminus W$ , eine in  $K$  abgeschlossene Teilmenge, also kompakt. Damit ist  $K \setminus W \subseteq U$  eine kompakte Umgebung von  $x$ .

### BEMERKUNG 5.16 ( $\rightarrow$ Aufgabe 30)

Offene und abgeschlossene Unterräume lokal kompakter Hausdorffräume sind wieder lokal kompakt.

### 5.3 Die Alexandroff-Kompaktifizierung

**SATZ 5.17 (Alexandroff)**

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $X' = X \cup \{\omega\}$  mit  $\omega \notin X$ . Dann ist

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen in } X\} \cup \{X' \setminus K \mid K \text{ abgeschlossen und kompakt in } X\}$$

eine Topologie auf  $X'$ .

Bezüglich dieser Topologie gelten:

- (1)  $X$  ist ein offener Unterraum von  $X'$ .
- (2)  $X'$  ist kompakt.
- (3) Ist  $X$  nicht kompakt, so liegt  $X$  dicht in  $X'$ .
- (4)  $X'$  ist genau dann Hausdorffsch, wenn  $X$  Hausdorffsch und lokal kompakt ist.

**BEWEIS**

Sei  $\mathcal{T}$  die Topologie auf  $X$  und

$$\mathcal{K} := \{K \subseteq X \mid K \text{ kompakt und abgeschlossen in } X\}.$$

Somit gilt  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{X' \setminus K \mid K \in \mathcal{K}\}$ . Wir überprüfen, dass  $\mathcal{T}'$  eine Topologie auf  $X'$  ist:

(TOP1) Sei  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}'$ . Schreibe  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$  mit  $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{T}$  und  $\mathcal{V}_2 \subseteq \{X' \setminus K \mid K \in \mathcal{K}\}$ . Sei  $V_1 = \bigcup \mathcal{V}_1$  und  $V_2 = \bigcup \mathcal{V}_2$ ; dann  $V := V_1 \cup V_2 = \bigcup \mathcal{V}$ . Zu zeigen:  $V \in \mathcal{T}'$ . Wegen  $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{T}$  ist  $V_1 \in \mathcal{T}$ , da  $\mathcal{T}$  Topologie. Bei  $\mathcal{V}_2 = \emptyset$  ist  $V_2 = \emptyset$ , also  $V = V_1 \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ . Sei jetzt also  $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ . Dann  $V_2 = X' \setminus (\bigcap_{U \in \mathcal{V}_2} (X' \setminus U)) = X' \setminus K$  mit  $K = \bigcap_{U \in \mathcal{V}_2} (X' \setminus U) \in \mathcal{K}$ . Somit  $V = V_1 \cup V_2 = V_1 \cup (X' \setminus K) = X' \setminus (K \setminus V_1)$ . Da  $K \setminus V_1$  abgeschlossene Teilmenge von  $K$  ist, ist  $K \setminus V_1 \in \mathcal{K}$ , somit  $V \in \mathcal{T}'$ .

(TOP2) Da  $\emptyset$  kompakt und abgeschlossen ist, ist  $X' = X' \setminus \emptyset \in \mathcal{T}'$ . Seien  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}'$ . Zu zeigen ist:  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}'$ . Falls  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ , so  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ . Gilt dagegen  $U_1, U_2 \in \{X' \setminus K \mid K \in \mathcal{K}\}$ , so  $X' \setminus (U_1 \cap U_2) = (X' \setminus U_1) \cup (X' \setminus U_2) \in \mathcal{K}$  und damit  $U_1 \cap U_2 \in \{X' \setminus K \mid K \in \mathcal{K}\} \subseteq \mathcal{T}'$ . Letzte Möglichkeit: o.B.d.A.  $U_1 \in \mathcal{T}$  und  $U_2 \in \{X' \setminus K \mid K \in \mathcal{K}\}$ , also  $X' \setminus U_2 \in \mathcal{K}$ . Dann ist  $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus (X' \setminus U_2) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ .

Somit ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X'$ .

Zu den übrigen Aussagen:

- (1) Es gilt  $\mathcal{T} = \{W \cap X \mid W \in \mathcal{T}'\}$  und  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ , insbesondere  $X \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ .
- (2) Sei  $\mathcal{V}$  eine offene Überdeckung von  $X'$ . Wähle  $V_0 \in \mathcal{V}$  mit  $\omega \in V_0$ . Da  $V_0$  offen in  $X'$ ,  $V_0 \notin \mathcal{T}$ , folgt, dass  $X' \setminus V_0 \in \mathcal{K}$ . Außerdem  $X' \setminus V_0 \subseteq \bigcup \mathcal{V}^*$  mit  $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \setminus \{V_0\}$ . Da  $X' \setminus V_0$  kompakt und  $\mathcal{V}^*$  offene Überdeckung von  $X' \setminus V_0$ , gibt es  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}^*$  endlich mit  $X' \setminus V_0 \subseteq \bigcup \mathcal{V}'$  und damit  $\mathcal{V}' \cup \{V_0\}$  endliche Überdeckung von  $X'$  und in  $\mathcal{V}$  enthalten.
- (3) Wegen  $X \subseteq \bar{X} \subseteq X' = X \cup \{\omega\}$ , gilt entweder  $\bar{X} = X'$  oder  $\bar{X} = X$ . Bei  $\bar{X} = X$  ist  $X$  abgeschlossen in  $X'$ , dann also auch  $X$  kompakt nach Prop. 5.9.
- (4)  $\Rightarrow$ :  $X'$  Hausdorffsch  $\Rightarrow X$  Hausdorffsch und lokal kompakt nach Bemerkung 5.17, da  $X \subseteq X'$  offen (1) und  $X'$  kompakt (2), also insbesondere lokal kompakt.  
 $\Leftarrow$ : Sei nun  $X$  Hausdorffsch und lokal kompakt. Damit  $X'$  Hausdorffsch ist, muss wegen (1) nur gezeigt werden, dass es zu  $x \in X$  stets  $U, V \in \mathcal{T}'$  gibt mit  $U \cap V = \emptyset$ ,  $x \in U$  und  $\omega \in V$ . Zu  $x \in X$  gibt es nach Vor. eine kompakte Umgebung  $K$  in  $X$ ; da  $X$  Hausdorffsch ist, ist  $K$  auch abgeschlossen in  $X$  und somit  $\omega \in X' \setminus K \in \mathcal{T}'$ . Wähle  $U = K^\circ$  und  $V = X' \setminus K$ , dann  $x \in U$ ,  $\omega \in V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .

**DEFINITION 5.18**

Für einen lokal kompakten, nicht kompakten Hausdorffraum  $X$  wird der um einen Punkt erweiterte, topologische Raum  $X' = X \cup \{\omega\}$  mit der Alexandroff-Topologie mit  $\alpha(X)$  bezeichnet und *Alexandroff-Kompaktifizierung* von  $X$  oder auch *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* genannt.

Wir schreiben dann  $\omega_X$  für  $\omega$ .

**BEMERKUNG 5.19**

$\alpha(X)$  ist kompakt und Hausdorffsch.  $X$  liegt dicht in  $\alpha(X)$ .

**SATZ 5.20**

Sei  $Y$  ein kompakter Hausdorffraum und  $x_0 \in Y$  nicht isoliert, d.h.  $\{x_0\}$  ist nicht offen. Sei dazu  $X = Y \setminus \{x_0\}$ , dann ist  $X$  ein lokal kompakter, nicht kompakter Hausdorffraum und die Abbildung

$$f: \begin{array}{ccc} \alpha(X) & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & x \in X \\ x_0 & x = \omega_X \end{cases} \end{array}$$

ein Homöomorphismus, insbesondere also  $\alpha(X) \cong Y$ .

**BEWEIS**

$X = Y \setminus \{x_0\}$  ist offen in  $Y$ . Mit  $Y$  ist auch  $X$  lokal kompakt (Bemerkung 5.17) und natürlich Hausdorffsch. Da  $x_0$  kein isolierter Punkt ist, ist  $X$  nicht abgeschlossen in  $Y$  und damit auch nicht kompakt. Offensichtlich ist  $f$  bijektiv. Für  $U \subseteq \alpha(X)$  ist zu zeigen:  $U$  ist offen in  $\alpha(X)$  genau dann, wenn  $f(U)$  offen in  $Y$ .

Für  $U \subseteq X$  ist  $U$  offen in  $\alpha(X)$  genau dann, wenn  $U = f(U)$  offen in  $X$  ist.

Andernfalls ( $U \not\subseteq X$ ) liegt  $\omega_X$  in  $U$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \text{ offen in } \alpha(X) &\Leftrightarrow U^c = \alpha(X) \setminus U \text{ kompakt (nach Def. von } \alpha(X) \text{ bzw. Alexandroff)} \\ &\Leftrightarrow U^c \text{ abgeschlossen in } Y \text{ (da } X \setminus U \subseteq Y, Y \text{ kompakt und Hausdorffsch)} \\ &\Leftrightarrow f(U) = (U \cap X) \cup \{x_0\} = Y \setminus U^c \text{ offen in } Y. \end{aligned}$$

**BEMERKUNG 5.21** ( $\rightarrow$  Aufgabe 34)

Wir untersuchen die Alexandroff-Kompaktifizierung des lokal kompakten, euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$ .

Versieht man die  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  mit der Spurtopologie zu  $\mathcal{T}_{eukl.}$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dann ist  $\mathbb{S}^n$  ein kompakter Hausdorffraum. Setze  $\omega := e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$ , dann ist  $\mathbb{S}^n \setminus \{\omega\}$  nach Bemerkung 5.17 ein lokal kompakter Unterraum, jedoch nicht kompakt.

Es existiert ein kanonischer Homöomorphismus  $h: \mathbb{S}^n \setminus \{\omega\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , den man erhält, wenn zu jedem  $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{\omega\}$  den Schnittpunkt der Gerade durch  $x$  und  $\omega$  und der Hyperebene  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  betrachtet und  $x$  via  $h$  mit diesem Schnittpunkt identifiziert ( $h$  heißt die *stereographische Projektion*).

Nach Satz 5.21 induziert  $h$  dann einen Homöomorphismus zwischen  $\mathbb{S}^n$  und  $\alpha(\mathbb{R}^n)$ . Somit lässt sich die  $n$ -Sphäre als die Alexandroff-Kompaktifizierung des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raums auffassen.

## 6 Trennung

### 6.1 Trennungsaxiome

#### DEFINITION 6.1

Für einen topologischen Raum  $X$  betrachtet man folgende Aussagen:

- $(T_0)$  Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  gibt es eine offene Menge in  $x$ , die genau einen der Punkte  $x, y$  enthält.
- $(T_1)$  Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  gibt es offene Mengen  $U, V$  in  $X$  mit  $x \in U$ ,  $x \notin V$ ,  $y \in V$ ,  $y \notin U$ .
- $(T_2)$  Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  gibt es offene Mengen  $U, V$  in  $X$  mit  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .
- $(T_3)$  Zu jeder abgeschlossenen Menge  $A \subseteq X$  gibt es offene Mengen  $U, V$  in  $X$  mit  $A \subseteq U$ ,  $x \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .
- $(T_4)$  Zu je zwei abgeschlossenen Mengen  $A, B \subseteq X$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gibt es offene Mengen  $U, V$  in  $X$  mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

Man bezeichnet  $(T_0)$ - $(T_4)$  als *Trennungsaxiome*.

Ein Raum, der eines der Trennungsaxiome  $(T_i)$  erfüllt, wird auch als  *$T_i$ -Raum* bezeichnet.

#### BEMERKUNG 6.2

Es gelten die Implikationen  $(T_1) \& (T_4) \Rightarrow (T_1) \& (T_3) \Rightarrow (T_2) \Rightarrow (T_1) \Rightarrow (T_0)$ .

#### BEISPIEL 6.3

- (1) Jeder diskrete Raum erfüllt  $(T_0) - (T_4)$ .
- (2) Die chaotische Topologie auf einer Menge  $M$  erfüllt stets  $(T_3)$  und  $(T_4)$ , jedoch für  $|M| > 1$  nicht  $(T_0) - (T_2)$ .

#### PROPOSITION 6.4

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gelten:

- (1)  $X$  ist ein  $T_0$ -Raum  $\Leftrightarrow u : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ ,  $u(x) := \mathcal{U}_x$  ist injektiv.
- (2) Es sind äquivalent:
  - (1)  $X$  ist ein  $T_1$ -Raum.
  - (2) Für jedes  $x \in X$  ist  $\bigcap \mathcal{U}_x = \{x\}$ .
  - (3) Für jedes  $x \in X$  ist  $\{x\}$  abgeschlossen in  $X$ .
  - (4) Jede endliche Teilmenge von  $X$  ist abgeschlossen in  $X$ .
  - (5) Die Topologie auf  $X$  ist eine Verfeinerung der Kofinaltopologie.
- (3)  $X$  ist ein  $T_3$ -Raum  $\Leftrightarrow$  jeder Punkt in  $X$  hat eine abgeschlossene Umgebung.
- (4)  $X$  ist ein  $T_4$ -Raum  $\Leftrightarrow$  zu  $A \subseteq V \subseteq X$  mit  $A$  abgeschlossen und  $V$  offen existiert stets eine offene Menge  $U$  in  $X$  mit  $A \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V \subseteq X$ .

#### BEWEIS

- (1) Für  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  gilt:  $\exists U \subseteq X$  offen mit  $x \in U$ ,  $y \notin U$  oder  $y \in U$ ,  $x \notin U \Leftrightarrow \mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$ .
- (2) (1)  $\Rightarrow$  (2):  
Sei  $x \in X$ . Stets ist  $x \in \bigcap \mathcal{U}_x$ . Sei  $y \in X \setminus \{x\}$ . Mit der Bedingung  $(T_1)$  gibt es ein  $U$  offen in  $X$  mit  $x \in U$ ,  $y \notin U$ . Dann  $U \in \mathcal{U}_x$  und somit  $y \notin \bigcap \mathcal{U}_x$ . Also folgt  $\bigcap \mathcal{U}_x = \{x\}$ .
- (2)  $\Rightarrow$  (1):  
Seien  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  gegeben. Mit (2) folgt dann  $y \notin \bigcap \mathcal{U}_x$ , d.h.  $\exists U \in \mathcal{U}_x$  mit  $y \notin U$ . Dann ist  $U^\circ$  offen und  $x \in U^\circ$ ,  $y \notin U$ .

(1)  $\Rightarrow$  (3):

Sei  $x \in X$ . Zu  $y \in X \setminus \{x\}$  gibt es  $V \subseteq X$  offen mit  $y \in V$ ,  $x \notin V$ . Dann  $y \in V \subseteq X \setminus \{x\}$  und da  $V$  offen ist, ist  $y$  innerer Punkt von  $X \setminus \{x\}$ . Somit  $X \setminus \{x\}$  offen, d.h.  $\{x\}$  abgeschlossen.

(3)  $\Rightarrow$  (1):

Seien  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ . Dann mit (3):  $y \in (X \setminus \{x\})^\circ = V$ ,  $x \in (X \setminus \{y\})^\circ = U$ , dann  $U, V$  offen in  $X$  mit  $x \in U$ ,  $y \notin U$ ,  $y \in V$ ,  $x \notin V$ .

(3)  $\Leftrightarrow$  (4):

Klar, da endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen stets abgeschlossen sind.

(4)  $\Leftrightarrow$  (5):

Klar, da  $\mathcal{T}_{kof.}$  die größte Topologie ist, in der alle endlichen Teilmengen abgeschlossen sind.

(3)  $\Rightarrow$ : Sei  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}$ . Es reicht zu zeigen, dass jede offene Umgebung von  $x$  eine abgeschlossene Umgebung von  $x$  enthält. Sei  $U$  offen in  $X$  mit  $x \in U$ ,  $A := U^c$ . Da  $X$  ein  $T_3$ -Raum ist, gibt es offene Mengen  $V, W$  in  $X$  mit  $x \in V$ ,  $A \subseteq W$  und  $V \cap W = \emptyset$ . Dann  $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W^c \subseteq A^c = U$ , somit  $\overline{V}$  abgeschlossene Umgebung von  $x$ , die in  $U$  liegt.

$\Leftarrow$ : Sei  $\mathcal{B}$  eine abgeschlossene Umgebungsbasis von  $x \in X$ . Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen mit  $x \notin A$ , dann  $A^c$  offene Umgebung von  $x$ , es gibt also ein  $B \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B \subseteq A^c$ . Sei  $V = B^\circ$  und  $U = B^c$ . Dann sind  $V$  und  $U$  offen und  $x \in V$ ,  $A \subseteq B^c = U$ ,  $V \cap U = \emptyset$ .

(4)  $\rightarrow$  Aufgabe 35.

### PROPOSITION 6.5

Sei  $0 \leq i \leq 3$ . Jeder Unterraum eines  $T_i$ -Raumes ist selbst ein  $T_i$ -Raum.

### BEWEIS

Klar für  $i = 0, 1, 2$ .

Sei  $X$  jetzt ein  $T_3$ -Raum und  $U$  ein Unterraum von  $X$ . Zu  $x \in U$  gibt es eine abgeschlossene Umgebungsbasis  $\mathcal{B}$  von  $x$  in  $X$ . Dann ist  $\{V \cap U \mid V \in \mathcal{B}\}$  eine abgeschlossene Umgebungsbasis von  $x \in U$ .

### BEMERKUNG 6.6

Für  $T_4$ -Räume ist dies nicht erfüllt!

### BEISPIEL 6.7 (Zariski-Topologie eines kommutativen Ringes)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Sei  $\text{spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ ist ein Primideal}\}$ , das *Spektrum* von  $R$ . Für  $f \in R$  sei  $D_f := \{\mathfrak{p} \in \text{spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ . Dann ist  $D_0 = \emptyset$  und  $D_1 = \text{spec}(R)$  und für  $f, g \in R$  ist  $D_f \cap D_g = D_{fg}$ . Somit ist  $\{D_f \mid f \in R\}$  Basis einer Topologie auf  $\text{spec}(R)$ , der *Zariski-Topologie*.

Sei  $X$  der Raum  $\text{spec}(R)$  mit dieser Topologie. Dann ist  $X$  ein  $T_0$ -Raum, jedoch i.A. kein  $T_1$  Raum (etwa für  $R = \mathbb{Z}$ ).

Genauer gilt für  $\mathfrak{q} \in X$ :  $\overline{\{\mathfrak{q}\}} = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}\}$ , also z.B.  $\overline{\{0\}} = \text{spec}(R)$ .

Dazu:  $\mathfrak{q} \in X \setminus \overline{\{\mathfrak{p}\}} \Leftrightarrow \exists f \in R : \mathfrak{q} \in D_f, \mathfrak{p} \notin D_f \Leftrightarrow \exists f \in R : f \in \mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ .

Beachte:  $\{0\}$  ist genau dann abgeschlossen in der Zariski-Topologie auf  $\text{spec}(R)$ , wenn  $R$  ein Körper ist.

### BEMERKUNG 6.8 ( $\rightarrow$ Aufgabe 36)

Auf der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  wird durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq (V \cap \mathbb{Q}) \mid U, V \text{ offen in } \mathcal{T}_{eukl.}\}$$

eine Topologie definiert, die feiner ist als  $\mathcal{T}_{eukl.}$ . Damit ist  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  offensichtlich Hausdorffsch. Allerdings ist  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  kein  $T_3$ -Raum, denn die Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist abgeschlossen, lässt sich aber nicht durch bzgl.  $\mathcal{T}$  offene Mengen von der 0 trennen.

Die  $T_3$ -Eigenschaft kann also (im Gegensatz zu  $T_0, T_1, T_2$ ) bei Verfeinerung der Topologie verloren gehen.

## 6.2 Normale und reguläre Räume

### DEFINITION 6.9

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *normal*, wenn er  $(T_1)$  und  $(T_4)$  erfüllt.

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *regulär*, wenn er  $(T_1)$  und  $(T_3)$  erfüllt.

### BEMERKUNG 6.10

- (1) Jeder normale Raum ist regulär.
- (2) Jeder Unterraum eines regulären Raumes ist regulär.

### SATZ 6.11

- (1) Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal.
- (2) Jeder lokal kompakte Hausdorffraum ist regulär.

### BEWEIS

- (1) Seien  $X$  ein kompakter Hausdorffraum,  $A, B \subseteq X$  abgeschlossen mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann sind  $A, B$  kompakt und mit Satz 5.12 folgt die Existenz offener Mengen  $U, V \subseteq X$  mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Also gilt  $(T_4)$ .
- (2) Sei  $X$  lokal kompakt und Hausdorffsch. Dann hat jeder Punkt in  $X$  gemäß (5.2) eine Umgebungsbasis aus kompakten, insbesondere abgeschlossenen Umgebungen.

### SATZ 6.12

Jeder metrisierbare Raum ist normal.

### BEWEIS

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $(X, d)$  Hausdorffsch. Für jede abgeschlossene Teilmenge  $S \subseteq X$  mit  $S \neq \emptyset$  ist

$$d_S : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_S(x) := \inf\{d(x, s) \mid s \in S\}$$

stetig und  $d_S^{-1}(\{0\}) = S$ . Sind nun  $A, B$  abgeschlossen in  $X$  mit  $A \cap B = \emptyset$  und o.B.d.A. weder  $A$  noch  $B$  leer, so wählen wir

$$U := \{x \in X \mid d_A(x) < d_B(x)\}, \quad V := \{x \in X \mid d_B(x) < d_A(x)\},$$

haben somit offene Mengen in  $X$ , da  $d_B - d_A$  und  $d_A - d_B : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

### LEMMA 6.13 (Lemma von Urysohn)

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $D \subseteq [0, 1]$  mit  $0 \in D$  und  $\overline{D} = [0, 1]$  sowie  $(U_s)_{s \in D}$  eine Familie offener Teilmengen von  $X$  mit  $U_0 \neq \emptyset$  und  $\overline{U_s} \subseteq U_t$  für  $s, t \in D$  mit  $s < t$ .

Dann ist

$$f : X \rightarrow [0, 1], \quad f(x) := \inf\{1\} \cup \{s \in D \mid x \in U_s\}$$

eine stetige Abbildung mit  $f|_{U_0} = 0$  und  $f|_{X \setminus U} = 1$  für  $U = \bigcup\{U_s \mid s \in D \setminus \{1\}\}$ .

### BEWEIS

Nur die Stetigkeit ist zu zeigen. Für  $t \in D$  ist  $f(\overline{U_t}) \subseteq [0, t]$ , denn bei  $t < f(x)$  gibt es, da  $D$  dicht in  $[0, 1]$ , ein  $s \in D$  mit  $t < s < f(x)$  und dann ist  $x \notin U_s \supseteq \overline{U_t}$ , also  $x \notin \overline{U_t}$ , damit  $\overline{U_t} \subseteq f^{-1}([0, t])$ .

Stetigkeit von  $f$  in beliebigem  $x \in X$ :

**Fall 1:**  $0 < f(x) < 1$ . Für  $s, s' \in D$  mit  $s < f(x) < s'$  liegt  $x$  in der offenen Menge  $U_{s'} \setminus \overline{U_s} \subseteq f^{-1}((s, s'))$ . Da die Intervalle  $(s, s')$  mit  $s, s' \in S$  und  $s < f(x) < s'$  eine Umgebungsbasis von  $f(x)$  in  $[0, 1]$  bilden,



deren Urbilder unter  $f$  Umgebungen von  $x$  in  $X$  sind, folgt die Stetigkeit in  $x$ .

**Fall 2:**  $f(x) = 0$ . Für  $s \in D \setminus \{0\}$  ist  $f^{-1}([0, s]) = \bigcup_{t < s}^{t \in D}$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$ ; da die  $[0, s]$  mit  $s \in D \setminus \{0\}$  eine Umgebungsbasis von 0 in  $[0, 1]$  bilden, folgt die Stetigkeit von  $f$  in  $x$ .

**Fall 3:**  $f(x) = 1$ . Für  $s \in D \setminus \{1\}$  liegt  $x$  in der offenen Menge  $X \setminus \overline{U}_s \subseteq f^{-1}((s, 1])$ ; da die Intervalle  $(s, 1]$  mit  $s \in D \setminus \{1\}$  eine Umgebungsbasis von 1 in  $[0, 1]$  bildet, folgt hiermit auch die Stetigkeit von  $f$  in  $x$ .

**SATZ 6.14 (Erster Satz von Urysohn)**

Sei  $X$  ein normaler Raum und seien  $A, B$  abgeschlossene Teilmengen von  $X$  mit  $A \cap B = \emptyset$ .

Dann gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f|_A = 0$  und  $f|_B = 1$ .

**BEWEIS**

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $D_n = \{\frac{k}{2^n} \mid 0 \leq k \leq 2^n\}$ . Dann ist  $D := \bigcup D_n$  dicht in  $[0, 1]$ . Wir wollen eine Familie  $(U_l)_{l \in D}$  von offenen Teilmengen von  $X$  finden mit  $\overline{U}_l \subseteq U_{l'}$  für  $l, l' \in D$  mit  $l < l'$  sowie  $A \subseteq U_0 \neq \emptyset$  und  $B \subseteq X \setminus \bigcup_{l < 1} U_l$ . Ist dies gefunden, so liefert das Lemma von Urysohn eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei o.B.d.A.  $A \neq \emptyset$ . Setze  $U_1 := X \setminus B$ , dann ist  $U_1$  offen und da  $X$  normal ist, gibt es ein  $U_0$  offen in  $X$  mit  $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_1$ . Rekursiv wählen wir nun zu  $n \in \mathbb{N}$  die Mengen  $U_l$  für  $l \in D_{n+1} \setminus D_n$ . Dabei sind die  $U_l$  für  $l \in D_n$  bereits so gewählt, dass  $\overline{U}_l \subseteq U_{l'}$  für  $l, l' \in D$  mit  $l < l'$ . Für  $l \in D_{n+1} \setminus D_n$  haben wir  $l = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$  mit  $0 \leq k < 2^n$  und haben dann zu  $l_0 := \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n}$  und  $l_1 := \frac{2k+2}{2^{n+1}} = \frac{2k+1}{2^n} \in D_n$  schon  $U_{l_0}$  und  $U_{l_1}$  definiert mit  $\overline{U}_{l_0} \subseteq U_{l_1}$ . Da  $X$  normal ist, können wir  $U_l$  so wählen, dass  $U_l$  offen ist und  $\overline{U}_{l_0} \subseteq U_l \subseteq \overline{U}_l \subseteq U_{l_1}$  ist. Damit sind dann  $U_l$  für alle  $l \in D_{n+1}$  gewählt mit  $\overline{U}_l \subseteq U_{l'}$  für  $l, l' \in D_{n+1}$  mit  $l < l'$ . Per Rekursion ergibt sich die Wahl von  $(U_l)_{l \in D}$  wie gewünscht.

**BEMERKUNG 6.15**

Mit einem solchen  $f$  hat man mit  $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  und  $V := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  sofort offene Mengen in  $X$  mit  $U \cap V = \emptyset$  und  $A \subseteq U, B \subseteq V$ .

**BEISPIEL 6.16**

Seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $A, B \subseteq X$  abgeschlossen und nicht leer mit  $A \cap B = \emptyset$ .

Dann tut die Funktion

$$f : X \rightarrow [0, 1], \quad f(x) := \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$$

das Gewünschte.

**LEMMA 6.17**

Sei  $X$  ein normaler Raum,  $C \subseteq X$  abgeschlossen,  $h : C \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $c \in \mathbb{R}$  mit  $|h(x)| \leq c$  für alle  $x \in C$ . Dann gibt es eine stetige Abbildung  $k : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (1)  $|k(x)| \leq \frac{1}{3}c$  für alle  $x \in X$ .
- (2)  $|h(x) - k(x)| \leq \frac{2}{3}c$  für alle  $x \in C$ .

**BEWEIS**

Setze  $A := h^{-1}([-c, -\frac{1}{3}c])$ ,  $B = h^{-1}([\frac{1}{3}c, c])$ ; diese sind abgeschlossen in  $C$ , also auch in  $X$ , da  $C$  abgeschlossen in  $X$ . Weiter ist  $A \cap B = \emptyset$ . Nach dem ersten Satz von Urysohn gibt es eine stetige Funktion  $g : X \rightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  mit  $g|_A = 0$  und  $g|_B = 1$ . Dann ist auch  $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(x) := \frac{2}{3}c(g(x) - \frac{1}{2})$  stetig und es gilt (1).

Es gilt auch (2), denn  $x \in A \Rightarrow h(x) \in [-c, -\frac{1}{3}c]$ ,  $g(x) = 0$ ,  $k(x) = -\frac{1}{3}c$ , also  $h(x) - k(x) \in [-\frac{2}{3}c, 0]$ . Liegt  $x$  dagegen in  $B$ , dann  $h(x) \in [\frac{1}{3}c, c]$ ,  $g(x) = 1$ ,  $k(x) = \frac{1}{3}c \Rightarrow h(x) - k(x) \in [0, \frac{2}{3}c]$ . Falls schließlich  $x \in X \setminus (A \cup B)$ , dann  $h(x) \in (-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c)$ , also mit (1)  $h(x) - k(x) \in (-\frac{2}{3}c, \frac{2}{3}c)$ .

**SATZ 6.18 (Tietze)**

Sei  $X$  ein normaler Raum,  $C \subseteq X$  abgeschlossen,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Jede stetige Funktion  $C \rightarrow [a, b]$  lässt sich zu einer stetigen Funktion  $X \rightarrow [a, b]$  fortsetzen.

**BEWEIS**

Wegen  $[a, b] \cong [-1, 1]$  sei o.B.d.A.  $a = -1, b = 1$ . Sei  $f : C \rightarrow [-1, 1]$  stetig. Mit dem Lemma wählen wir rekursiv stetige Funktionen  $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , so dass gelten:

- (1)  $|g_i(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1}$  für alle  $x \in X$  und  
 (2)  $|f(x) - \sum_{j=1}^i g_j(x)| \leq (\frac{2}{3})^i$  für alle  $x \in C$ .

Dazu wird im Schritt  $i$  das Lemma für  $h = f - \sum_{j=1}^{i-1} g_j : C \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $c = (\frac{2}{3})^{i-1}$  angewandt. Sei dann

$$g : \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \end{array} .$$

Wegen (1) konvergieren die Partialsummen  $(\sum_{j=1}^N g_j)_{N \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $g$  und mit den  $g_i$  ist daher auch die Grenzfunktion  $g$  stetig. Aus (2) folgt, dass  $g|_C = f$ .

**SATZ 6.19 (Jones)**

Ein separabler, normaler Raum enthält keinen diskreten, abgeschlossenen Unterraum mit der Kardinalität von  $\mathbb{R}$ .

**BEWEIS**

Setze  $c = |\mathbb{R}|$ . Sei  $X$  ein normaler Raum mit einer abzählbaren Teilmenge  $N$ , für die  $\overline{N} = X$  ist. Angenommen,  $U \subseteq X$  wäre ein diskreter, abgeschlossener Unterraum mit  $|U| = c$ . Für  $A \subseteq U$  gibt es eine stetige Funktion  $\tilde{\mathbb{I}}_A : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $\tilde{\mathbb{I}}_A|_A = 1$ ,  $\tilde{\mathbb{I}}_A|_{U \setminus A} = 0$ , denn man erhält so ein  $\tilde{\mathbb{I}}_A$  mit dem Satz von Tietze als Fortsetzung der charakteristischen Funktion  $\mathbb{I}_A : U \rightarrow \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$ , die wegen der Diskretheit von  $U$  stetig ist.

Wir betrachten  $\mathcal{P}(U) \rightarrow [0, 1]^N$ ,  $A \mapsto \mathbb{I}_A|_N$ . Es gilt

$$|[0, 1]^N| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = c.$$

Weiter ist  $|\mathcal{P}(U)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| > c = |[0, 1]^N|$ . Somit ist die gegebene Abbildung nicht injektiv und damit gibt es  $A_1, A_2 \subseteq U$  mit  $A_1 \neq A_2$  und  $\tilde{\mathbb{I}}_{A_1}|_N = \tilde{\mathbb{I}}_{A_2}|_N$ . Wegen  $\overline{N} = X$ , folgt dann, dass  $\tilde{\mathbb{I}}_{A_1} = \tilde{\mathbb{I}}_{A_2}$  (vgl. Aufgabe 37).

Also  $\mathbb{I}_{A_1} = \mathbb{I}_{A_2}$  als Abbildung  $U \rightarrow \{0, 1\}$ , also  $A_1 = A_2$ , Widerspruch.

**BEISPIEL 6.20**

Der Niemitzky-Raum ist nicht normal.

**BEMERKUNG 6.21** ( $\rightarrow$  Aufgabe 38)

Die Sorgenfrey-Gerade ist normal, die Sorgenfrey-Ebene hingegen nicht.

### 6.3 Vollständig reguläre Räume

**PROPOSITION 6.22**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{C}$  die Menge der stetigen Funktionen  $X \rightarrow [0, 1]$ . Dann sind äquivalent:

- (1) Zu jedem Punkt  $x \in X$  und jeder abgeschlossenen Menge  $A \subseteq X$  mit  $x \notin A$  gibt es ein  $f \in \mathcal{C}$  mit  $f(x) = 0$  und  $f|_A = 1$ .
- (2) Durch  $(f^{-1}([0, 1]))_{f \in \mathcal{C}}$  ist eine Basis der Topologie auf  $X$  gegeben.

$X$  heißt *vollständig regulär*, wenn  $X$  ein Hausdorffraum ist und (1), (2) erfüllt sind.

**BEWEIS**

Man stellt fest, dass  $f^{-1}([0, 1])$  für  $f \in \mathcal{C}$  offen in  $X$  ist.

$\Rightarrow$ : Seien  $x \in X$  und  $V \subseteq X$  offen mit  $x \in V$  gegeben. Dann  $A := X \setminus V$  abgeschlossen in  $X$  mit  $x \notin A$ . Dies zeigt, dass die  $f^{-1}([0, 1])$  mit  $f \in \mathcal{C}$  eine Basis der Topologie von  $X$  bilden.

$\Leftarrow$ : Seien  $x \in X$  und  $A \subseteq X$  abgeschlossen mit  $x \notin A$ . Nach Voraussetzung (2) ist  $x \in X \setminus A$  (offen), also gibt es ein  $f \in \mathcal{C}$  mit  $x \in f^{-1}([0, 1]) \subseteq X \setminus A$ . Dann  $c = f(x) \in [0, 1)$  und  $f|_A = 1$ . Dann ist auch  $g : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $g(y) := \max\{0, \frac{f(y)-c}{1-c}\}$  stetig und es gilt  $g|_A = 1$ ,  $g(x) = 0$ .

**PROPOSITION 6.23**

- (1) Jeder normale Raum ist vollständig regulär.
- (2) Jeder vollständig reguläre Raum ist regulär.

**BEWEIS**

(1) Klar nach dem ersten Satz von Urysohn.

(2) Sei  $X$  vollständig regulär. Zu  $x \in X$  und einer abgeschlossenen Teilmenge  $A \subseteq X$  mit  $x \notin A$  gibt es  $f : X \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $f(x) = 0$  und  $f|_A = 1$ . Dann sind  $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  und  $V := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  offen in  $X$ ,  $x \in U$ ,  $A \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

**PROPOSITION 6.24**

Jeder Unterraum eines vollständig regulären Raumes ist vollständig regulär.

**BEWEIS**

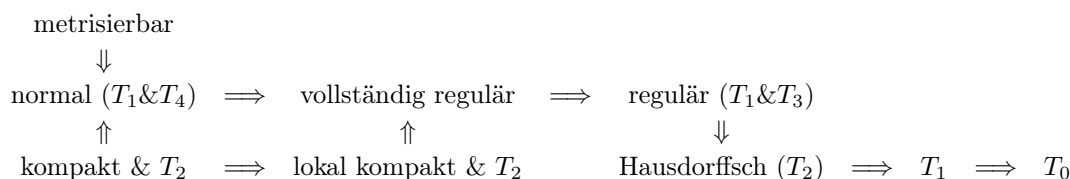
Seien  $Y$  ein Unterraum von  $X$ ,  $y \in Y$  und  $B \subseteq Y$  abgeschlossen mit  $y \notin B$ . Es gilt  $B = \overline{B} \cap Y$  (wobei  $\overline{B}$  Abschluss in  $X$ ), somit  $y \notin \overline{B}$ . Da  $X$  vollständig regulär, gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(y) = 0$  und  $f|_{\overline{B}} = 1$ . Dann ist  $f|_Y : Y \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $f|_Y(y) = 0$  und  $f|_{Y \setminus B} = 1$ .

**KOROLLAR 6.25**

- (1) Jeder Unterraum eines kompakten Hausdorffraums ist vollständig regulär.
- (2) Jeder lokal kompakte Hausdorffraum ist vollständig regulär (als Unterraum von  $\alpha(X)$ ).

**BEMERKUNG 6.26**

Nicht jeder reguläre Raum ist vollständig regulär (Gegenbeispiel von [E. van Douwen](#)).



## 7 Produkte

### 7.1 Struktur von Produkträumen

**WIEDERHOLUNG 7.1** ( $\rightarrow$  Initialtopologien, (3.2))

- (1) Das Produkt  $X := \prod_{\alpha} X_{\alpha}$  einer Familie von topologischen Räumen  $(X_{\alpha})_{\alpha \in I}$  wird als topologischer Raum aufgefasst vermöge der *Produkttopologie*, d.h. der Initialtopologie zur Familie der Projektionen  $(\pi_{\alpha} : X \rightarrow X_{\alpha})_{\alpha \in I}$ .
- (2) Die Mengen  $\prod_{\alpha} U_{\alpha}$  mit  $U_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}$  offen für alle  $\alpha \in I$  und  $U_{\alpha} = X_{\alpha}$  für fast alle  $\alpha \in I$  bilden die *natürliche Basis* von  $X$ .
- (3) Die Projektionen  $\pi_{\alpha} : X \rightarrow X_{\alpha}$  sind stetig und offen.
- (4) Ist  $Z$  ein topologischer Raum, so ist  $h : Z \rightarrow X$  stetig  $\Leftrightarrow \pi_{\alpha} \circ h : Z \rightarrow X_{\alpha}$  stetig für alle  $\alpha \in I$ .

**PROPOSITION 7.2**

Seien  $(X_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ,  $(Y_{\alpha})_{\alpha \in I}$  Familien nicht leerer topologischer Räume zur Indexmenge  $I$ . Sei weiter  $(f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha})_{\alpha \in I}$  eine Familie von Abbildungen. Dann gilt:

$$f : \prod_{\alpha} X_{\alpha} \rightarrow \prod_{\alpha} Y_{\alpha} \quad \text{ist stetig} \Leftrightarrow f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha} \text{ ist stetig für alle } \alpha \in I.$$

$$(x_{\alpha}) \mapsto (f_{\alpha}(x_{\alpha}))$$

**BEWEIS**

Seien  $X := \prod_{\alpha} X_{\alpha}$  und  $Y := \prod_{\alpha} Y_{\alpha}$ .

$\Leftarrow$ : Seien  $f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$  stetig für alle  $\alpha \in I$ . Für eine Menge  $V := \prod_{\alpha} V_{\alpha}$  aus der natürlichen Basis von  $Y$  ist  $f^{-1}(V) = \prod_{\alpha} f_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha})$  eine Menge aus der natürlichen Basis von  $X$ . Also ist  $f$  stetig.

$\Rightarrow$ : Sei  $f$  stetig. Für beliebiges  $\gamma \in I$  wollen wir die Stetigkeit von  $f_{\gamma} : X_{\gamma} \rightarrow Y_{\gamma}$  zeigen. Seien  $\pi_{\gamma} : X \rightarrow X_{\gamma}$  und  $\rho_{\gamma} : Y \rightarrow Y_{\gamma}$  die jeweiligen Projektionen. Für  $V \subseteq Y_{\gamma}$  offen ist  $f_{\gamma}^{-1}(V) = \pi_{\gamma}(f^{-1}(\rho_{\gamma}^{-1}(V)))$  offen in  $X_{\gamma}$  nach Wiederholung 7.1.

**PROPOSITION 7.3**

Sei  $(X_{\alpha})_{\alpha \in I}$  eine Familie topologischer Räume und zu jedem  $\alpha \in I$  sei  $U_{\alpha}$  ein Unterraum von  $X_{\alpha}$ .

Dann ist die Produkttopologie auf  $U := \prod_{\alpha} U_{\alpha}$  identisch mit der Spurtopologie von  $U$  als Teilmenge von  $X = \prod_{\alpha} X_{\alpha}$  und es gilt  $\bar{U} = \prod_{\alpha} \bar{U}_{\alpha}$  in  $X$ .

Insbesondere ist  $U$  genau dann abgeschlossen in  $X$ , wenn  $U_{\alpha}$  abgeschlossen ist für alle  $\alpha \in I$ .

**BEWEIS**

Sei  $\mathcal{B}$  die natürliche Basis von  $X$ . Dann ist  $\{V \cap U \mid V \in \mathcal{B}\}$  eine Basis der Spurtopologie auf  $U$ . Andererseits ist dies gerade die natürliche Basis von  $U$  als Produkt der  $U_{\alpha}$ , denn für  $V \in \mathcal{B}$ ,  $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$  ist  $V \cap U = \prod_{\alpha} (V_{\alpha} \cap U_{\alpha})$ .

Für  $\alpha \in I$  ist  $\pi_{\alpha}^{-1}(\bar{U}_{\alpha})$  abgeschlossen in  $X$  und  $U \subseteq \pi_{\alpha}^{-1}(\bar{U}_{\alpha})$ , also sogar  $\bar{U} \subseteq \pi_{\alpha}^{-1}(\bar{U}_{\alpha})$ . Somit gilt:

$$\bar{U} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} \pi_{\alpha}^{-1}(\bar{U}_{\alpha}) = \prod_{\alpha \in I} \bar{U}_{\alpha}.$$

Sei nun  $x \in \prod_{\alpha} \bar{U}_{\alpha}$ ; zu zeigen ist, dass  $x \in \bar{U}$ . Sei  $V \subseteq X$  offen mit  $x \in V$ , o.B.d.A.  $V \in \mathcal{B}$ , d.h.  $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$  mit  $V_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}$  offen für alle  $\alpha \in I$  und  $V_{\alpha} = X_{\alpha}$  für fast alle  $\alpha \in I$ . Für  $\alpha \in I$  ist dann  $x_{\alpha} = \pi_{\alpha}(x) \in V_{\alpha} \cap \bar{U}_{\alpha}$ , also  $V_{\alpha} \cap U_{\alpha} \neq \emptyset$ , somit ist auch  $V \cap U = \prod_{\alpha} V_{\alpha} \cap U_{\alpha} \neq \emptyset$  (mit dem Auswahlaxiom). Also  $x \in \bar{U}$  und damit ist  $\bar{U} = \prod_{\alpha} \bar{U}_{\alpha}$ .

Insbesondere ist  $U = \bar{U} \Leftrightarrow U_{\alpha} = \bar{U}_{\alpha}$  für alle  $\alpha \in I$ .

**PROPOSITION 7.4**

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Dann gilt:

(1) Ist  $\sigma : I \rightarrow I$  bijektiv, so ist

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha} X_{\alpha} &\rightarrow \prod_{\alpha} X_{\sigma(\alpha)} \\ (x_{\alpha})_{\alpha \in I} &\mapsto (x_{\sigma(\alpha)})_{\alpha \in I} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus.

(2) Ist  $I = \bigcup_i I_i$  eine disjunkte Vereinigung, so ist

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha} &\rightarrow \prod_{i \in I} \prod_{\alpha \in I_i} X_{\alpha} \\ (x_{\alpha})_{\alpha \in I} &\mapsto ((x_{\alpha})_{\alpha \in I_i})_{i \in I} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus.

**BEWEIS**

In beiden Fällen hat man offenbar eine Bijektion gegeben.

- (1) Die Abbildung liefert unmittelbar eine Bijektion zwischen den natürlichen Basen der Produkttopologien und ist daher ein Homöomorphismus.
- (2) Die Abbildung ist stetig nach Prop. 3.25 und die Elemente der natürlichen Basis von  $\prod X_{\alpha}$  werden auf offene Mengen abgebildet, d.h. die Abbildung ist auch offen und damit ein Homöomorphismus.

Details:  $\rightarrow$  Schubert, S. 34 f.

**PROPOSITION 7.5**

Seien  $(X_{\alpha})_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer, topologischer Räume,  $X = \prod X_{\alpha}$ ,  $x = (x_{\alpha})_{\alpha \in I} \in X$  und  $\pi_{\alpha} : X \rightarrow X_{\alpha}$  die Projektion auf  $X_{\alpha}$  für  $\alpha \in I$ . Sei weiter  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$ . Dann gilt:

$\mathcal{F}$  konvergiert gegen  $x \Leftrightarrow \forall \alpha \in I : \text{der Bildfilter } \pi_{\alpha}(\mathcal{F}) \text{ konvergiert gegen } x_{\alpha}$ .

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ :  $\mathcal{F} \rightarrow x \Rightarrow \pi_{\alpha}(\mathcal{F}) \rightarrow \pi_{\alpha}(x) = x_{\alpha}$  für jedes  $\alpha \in I$ , da  $\pi_{\alpha}$  stetig ist für alle  $\alpha \in I$ .

$\Leftarrow$ : Gelte  $\forall \alpha \in I : \pi_{\alpha}(\mathcal{F}) \rightarrow x_{\alpha}$ . Zu zeigen ist, dass dann  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , d.h.  $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ . Sei  $V$  eine Umgebung von  $x$  in  $X$ . Dann  $x \in U \subseteq V$  für ein  $U$  aus der natürlichen Basis von  $X$ , d.h.  $U = \prod U_{\alpha}$  mit  $U_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}$  offen für alle  $\alpha \in I$ . Weiter ist  $J := \{\alpha \in I \mid U_{\alpha} \neq X_{\alpha}\}$  endlich, also  $U = \bigcap \{\pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \mid \alpha \in J\}$ . Für  $\alpha \in I$  ist  $U_{\alpha}$  eine offene Umgebung von  $x_{\alpha}$ ; wegen  $\pi_{\alpha}(\mathcal{F}) \rightarrow x_{\alpha}$  ist also  $U_{\alpha} \in \pi_{\alpha}(\mathcal{F})$ , d.h.  $\pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \in \mathcal{F}$ . Da  $J$  endlich ist, ist also auch  $U = \bigcap \{\pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \mid \alpha \in J\} \in \mathcal{F}$  und wegen  $U \subseteq V$  dann auch  $V \in \mathcal{F}$ . Dies zeigt  $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ , also  $\mathcal{F} \rightarrow x$ .

## 7.2 Trennung in Produkten

### PROPOSITION 7.6

Sei  $(X_\alpha)_\alpha$  eine Familie nicht leerer topologischer Räume und  $X = \prod_\alpha X_\alpha$ . Für  $i \in \{0, 1, 2\}$  ist  $X$  genau dann ein  $T_i$ -Raum, wenn für jedes  $\alpha \in I$  der Raum  $X_\alpha$  ein  $T_i$ -Raum ist.

### BEWEIS

$\Leftarrow$ : Seien  $i \in \{0, 1, 2\}$  und  $x = (x_i)_{i \in I}$ ,  $y = (y_i)_{i \in I} \in X$  mit  $x \neq y$ . Es gibt also ein  $\gamma \in I$  mit  $x_\gamma \neq y_\gamma$ . Da  $X_\gamma$  ein  $T_i$ -Raum ist, gibt es offene Mengen  $U_\gamma, V_\gamma \subseteq X_\gamma$  mit  $x_\gamma \in U_\gamma$ ,  $y_\gamma \in V_\gamma$  und

$(i = 0) \Rightarrow x_\gamma \notin V_\gamma$  oder  $x_\gamma \notin U_\gamma$ ;

$(i = 1) \Rightarrow x_\gamma \notin V_\gamma$  und  $x_\gamma \notin U_\gamma$ ;

$(i = 2) \Rightarrow U_\gamma \cap V_\gamma = \emptyset$ .

Schreibe  $U := \prod_\alpha U_\alpha$  und  $V := \prod_\alpha V_\alpha$ . Wähle  $U = \prod_\alpha U_\alpha$ ,  $V = \prod_\alpha V_\alpha$ , wobei  $U_\alpha = V_\alpha = X_\alpha$  gew. wird für alle  $\alpha \in I \setminus \{\gamma\}$ . Dann gehören  $U, V$  zur natürlichen Basis von  $X$ , sind also offen in  $X$ , und damit ist auch  $X$  ein  $T_i$ -Raum:

$(i = 0) \Rightarrow x \notin V$  oder  $x \notin U$ ;

$(i = 1) \Rightarrow x \notin V$  und  $x \notin U$ ;

$(i = 2) \Rightarrow U \cap V = \emptyset$ .

$\Rightarrow$ : Seien  $\gamma \in I$ ,  $x_\gamma, y_\gamma \in X_\gamma$  mit  $x_\gamma \neq y_\gamma$ . Wähle  $(z_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_\alpha X_\alpha$ , dazu dann  $x_\alpha = y_\alpha = z_\alpha$  für alle  $\alpha \in I \setminus \{\gamma\}$ . Dann  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$  und  $x \neq y$ . Da  $X$  ein  $T_i$ -Raum ist, gibt es offene Mengen  $U, V \subseteq X$ , die als Mengen in der natürlichen Basis von  $X$  gewählt werden können mit  $x \in U$ ,  $y \in V$  und

$(i = 0) \Rightarrow y \notin U$  oder  $x \notin V$ ;

$(i = 1) \Rightarrow y \notin U$  und  $x \notin V$ ;

$(i = 2) \Rightarrow U \cap V = \emptyset$ .

Schreibe  $U := \prod_\alpha U_\alpha$  und  $V := \prod_\alpha V_\alpha$ . Da  $x_\alpha = y_\alpha$  für  $\alpha \in I \setminus \{\gamma\}$ , folgt wegen  $x_\gamma \in U_\gamma$ ,  $y_\gamma \in V_\gamma$  auch

$(i = 0) \Rightarrow y_\gamma \notin U_\gamma$  oder  $x_\gamma \notin V_\gamma$ ;

$(i = 1) \Rightarrow y_\gamma \notin U_\gamma$  und  $x_\gamma \notin V_\gamma$ ;

$(i = 2) \Rightarrow U_\gamma \cap V_\gamma = \emptyset$ .

Fall  $i = 3$ : vgl. Aufgabe 39.

### BEMERKUNG 7.7 ( $\rightarrow$ Aufgabe 19)

Ein topologischer Raum  $X$  ist Hausdorffsch  $\Leftrightarrow \Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$  ist in  $X \times X$  abgeschlossen.

### KOROLLAR 7.8

Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Ist  $Y$  Hausdorffsch, so ist  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  abgeschlossen in  $X$ .

### BEWEIS

$(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$  ist stetig und  $\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\}$  ist abgeschlossen in  $Y \times Y$ , da  $Y$  Hausdorffsch. Somit ist  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_Y)$  abgeschlossen in  $X$ .

### BEMERKUNG 7.9 ( $\rightarrow$ Aufgabe 40)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen  $X, Y$ . Wir betrachten den *Graphen*  $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$  als Unterraum von  $X \times Y$ . Es gelten:

- (1) Die Abbildung  $g : X \rightarrow G_f$ ,  $g(x) := (x, f(x))$  ist ein Homöomorphismus.
- (2) Ist  $Y$  Hausdorffsch, so ist  $G_f$  abgeschlossen in  $X \times Y$ .

### 7.3 Die Sätze von Tychonoff

#### SATZ 7.10 (Erster Satz von Tychonoff)

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer, topologischer Räume. Genau dann ist  $X = \prod X_\alpha$  kompakt, wenn  $X_\alpha$  kompakt ist für jedes  $\alpha \in I$ .

#### BEWEIS

$\Rightarrow$ :  $X$  kompakt  $\Rightarrow X_\alpha = \pi_\alpha(X)$  ist kompakt, da  $\pi_\alpha$  stetig, für  $\alpha \in I$  beliebig.

$\Leftarrow$ : Wir zeigen, dass jeder Ultrafilter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  konvergiert. Für  $\alpha \in I$  ist  $\pi_\alpha(\mathcal{F})$  ein Ultrafilter auf dem kompakten Raum  $X_\alpha$ , konvergiert also gegen ein  $x_\alpha \in X_\alpha$ . Mit dem Auswahlaxiom wählen wir dann  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$  mit  $\pi_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow x_\alpha$  für alle  $\alpha \in I$ . Nach Prop. 7.6 folgt dann  $\mathcal{F} \rightarrow x$ .

#### KOROLLAR 7.11

Ist  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie kompakter Hausdorffräume, so ist auch  $X = \prod X_\alpha$  kompakter Hausdorffraum.

#### NOTATION 7.12

- (1) Für einen topologischen Raum  $X$  schreiben wir  $\mathcal{C}_X$  für die Menge der stetigen Abbildungen  $X \rightarrow [0, 1]$ .
- (2) Für  $f \in \mathcal{C}$  sei  $W_f := f^{-1}([0, 1))$ .
- (3) Für  $A \subseteq \mathcal{C}_X$  sei  $\varphi_A : X \rightarrow [0, 1]^A$ ,  $x \mapsto (f(x))_{f \in A}$ .
- (4) Für  $g \in A \subseteq \mathcal{C}_X$  sei  $\pi_g : [0, 1]^A \rightarrow [0, 1]$  die zugehörige Projektion.
- (5) Insbesondere  $\pi_g \circ \varphi_A = g : X \rightarrow [0, 1]$ .

#### PROPOSITION 7.13

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq \mathcal{C}_X$ . Dann ist  $\varphi_A : X \rightarrow [0, 1]^A$  stetig.

Ist  $X$  Hausdorffsch und  $\{W_f \mid f \in A\}$  eine Basis von  $X$ , so ist  $\varphi_A$  eine Einbettung.

#### BEWEIS

Nach Konstruktion ist  $\varphi_A$  stetig, denn für  $f \in A$  ist  $\pi_f \circ \varphi_A = f$  stetig.

Sei nun  $X$  Hausdorffsch und  $\{W_f \mid f \in A\}$  eine Basis von  $X$ . Für  $a, b \in X$  mit  $a \neq b$  ist  $X \setminus \{b\}$  eine Umgebung von  $a$ , somit gibt es ein  $f \in A$  mit  $a \in W_f \subseteq X \setminus \{b\}$ , also  $f(b) = 1 \neq f(a)$ . Daher ist  $\varphi_A$  injektiv.

Es reicht, noch zu zeigen, dass  $\varphi_A : X \rightarrow \varphi_A(X)$  offen ist. Sei dazu  $f \in A$ . Es ist  $\pi_f \circ \varphi_A = f$ , somit  $\pi_f(\varphi_A(W_f)) = f(W_f) \subseteq [0, 1)$ , also ist  $\varphi_A(W_f) = \varphi_A(X) \cap \pi_f^{-1}([0, 1))$ . Dazu:  $\subseteq$  ist klar, zu  $\supseteq$  sei  $\varphi_A(x) \in \pi_f^{-1}([0, 1))$ ; dann  $f(x) = \pi_f(\varphi_A(x)) \in [0, 1)$  und somit  $x \in W_f$ , d.h.  $\varphi_A(x) \in \varphi_A(W_f)$ . Insbesondere ist dann  $\varphi_A(W_f)$  offen in  $\varphi_A(X)$  und da  $\{W_f \mid f \in A\}$  eine Basis von  $X$  ist, folgt auch, dass  $\varphi_A : X \rightarrow \varphi_A(X)$  offen ist.

#### SATZ 7.14 (Zweiter Satz von Tychonoff)

Für einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent:

- (1)  $X$  ist vollständig regulär (d.h.  $\{W_f \mid f \in \mathcal{C}_X\}$  ist eine Basis von  $X$ ).
- (2)  $X$  lässt sich in einen kompakten Hausdorffraum einbetten.
- (3)  $\varphi_{\mathcal{C}_X} : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{C}_X}$  ist eine Einbettung.

#### BEMERKUNG 7.15 ( $\rightarrow$ Aufgabe 41)

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer Hausdorffräume mit  $\prod X_\alpha$  lokal kompakt. Dann sind alle  $X_\alpha$  lokal kompakt und fast alle  $X_\alpha$  kompakt.

## 7.4 Die Stone-Cech-Kompaktifizierung

### NOTATION 7.16

Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\varphi_{\mathcal{C}_X} : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{C}_X}$ ,  $x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}_X}$  (stetig).

Wir schreiben  $\beta(X)$  für den Abschluss von  $\varphi_{\mathcal{C}_X}(X)$  in  $[0, 1]^{\mathcal{C}_X}$  und  $\varphi_X : X \rightarrow \beta(X)$  für die durch  $\varphi_{\mathcal{C}_X}$  definierte Abbildung.

### PROPOSITION 7.17

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gelten:

- (1)  $\beta(X)$  ist ein kompakter Hausdorffraum.
- (2)  $\varphi_X : X \rightarrow \beta(X)$  ist stetig und  $\varphi_X(X)$  liegt dicht in  $\beta(X)$ .
- (3)  $\varphi_X$  ist eine Einbettung  $\Leftrightarrow X$  ist vollständig regulär.
- (4)  $\varphi_X$  ist ein Homöomorphismus  $\Leftrightarrow X$  ist ein kompakter Hausdorffraum.

### BEWEIS

- (1)  $\beta(X)$  ist abgeschlossener Unterraum von  $[0, 1]^{\mathcal{C}_X}$ . Dieser Raum ist Hausdorffsch und nach dem ersten Satz von Tychonoff kompakt.
- (2)  $\varphi_X$  ist stetig, da  $\varphi_{\mathcal{C}_X}$  stetig, und  $\overline{\varphi_X(X)} = \beta(X)$  nach Definition.
- (3) Dies besagt der zweite Satz von Tychonoff.
- (4)  $\Rightarrow$ : Ist  $\varphi_X$  ein Homöomorphismus, dann ist mit  $\beta(X)$  auch  $X = \varphi_X^{-1}(\beta(X))$  kompakt.  
 $\Leftarrow$ : Ist  $X$  kompakt und Hausdorffsch, dann ist  $X$  vollständig regulär und  $\varphi_X(X)$  kompakt, insbesondere abgeschlossen in  $\beta(X)$ . Nach (3) ist  $\varphi_X : X \rightarrow \beta(X)$  eine Einbettung. Also ist  $\varphi_X$  ein Homöomorphismus.

### SATZ 7.18

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung in einen kompakten Hausdorffraum  $Z$ . Dann gibt es genau eine stetige Abbildung  $\bar{f} : \beta(X) \rightarrow Z$  mit  $f = \bar{f} \circ \varphi_X$ .

### BEWEIS

- (1) Eindeutigkeit: Sind  $g, h : \beta(X) \rightarrow Z$  stetig mit  $g \circ \varphi_X = h \circ \varphi_X$ , so gilt  $g|_{\varphi_X(X)} = h|_{\varphi_X(X)}$ . Da  $\varphi_X(X)$  in  $\beta(X)$  dicht liegt, folgt  $g = h$ .

$$\begin{array}{ccc} & [0, 1]^{\mathcal{C}_X} & \\ \varphi_{\mathcal{C}_X} \nearrow & & \searrow \pi_f \\ X \xrightarrow{\varphi_X} & \beta(X) & \xrightarrow{\bar{f}} [0, 1] \end{array}$$

- (2) Existenz: Wir betrachten erst den Spezialfall  $Z = [0, 1]$ . Wegen  $f \in \mathcal{C}_X$  liefert

$$\pi_f : \begin{array}{ccc} [0, 1]^{\mathcal{C}_X} & \rightarrow & [0, 1] \\ (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{C}_X} & \mapsto & x_f \end{array}$$

durch Einschränkung auf  $\beta(X)$  eine stetige Abbildung  $\bar{f} = \pi_f|_{\beta(X)} : \beta(X) \rightarrow [0, 1]$ , für die gilt  $\bar{f} \circ \varphi_X = \pi_f \circ \varphi_{\mathcal{C}_X} = f$ .

Allgemein: Wir betrachten  $Z$  als Unterraum von  $[0, 1]^A$  für eine gew. Menge  $A$  (dies ist möglich nach dem zweiten Satz von Tychonoff). Für  $a \in A$  gibt es nach dem Spezialfall eine stetige Abbildung  $\bar{f}_a : \beta(X) \rightarrow [0, 1]$  mit  $\bar{f}_a \circ \varphi_X = \pi_a \circ (\iota_Z \circ f) = \pi_a|_Z \circ f$ ,  $\iota_Z$  Inklusionsabbildung. Dann ist

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \beta(X) & \rightarrow & [0, 1]^A \\ x & \mapsto & (\bar{f}_a(x))_{a \in A} \end{array}$$

stetig mit  $\tilde{f} \circ \varphi_X = \iota_Z \circ f$ .



Setze  $Y := \varphi_X(X)$ , dann  $f(X) = \tilde{f}(Y)$ , somit  $\tilde{f}(\overline{Y}) \subseteq \overline{\tilde{f}(Y)} = \overline{f(X)} \subseteq Z$  in  $[0, 1]^A$ , da  $Z$  abgeschlossen in  $[0, 1]^A$  ist.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & \beta(X) \\ f \downarrow & & \downarrow f \quad \tilde{f}_a \\ Z & \xrightarrow{\iota_Z} [0, 1]^A & \xrightarrow{\pi_a} [0, 1] \end{array}$$

Wegen  $\overline{Y} = \beta(X)$ , ist die Einschränkung des Bildes von  $\tilde{f}$  auf  $Z$  möglich und liefert eine stetige Abbildung  $\bar{f} : \beta(X) \rightarrow Z$  mit  $\iota_Z \circ \bar{f} = \tilde{f}$ , also  $\iota_Z \circ \bar{f} \circ \varphi_X = \iota_Z \circ f$ , also  $\bar{f} \circ \varphi_X = f$ .

$$\begin{array}{ccc} \beta(X) & \xrightarrow{\bar{f}} & [0, 1]^A \\ \varphi_X \uparrow & & \uparrow \iota_Z \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

**DEFINITION 7.19**

Für einen vollständig regulären Raum  $X$  heißt  $\beta(X)$  die *Stone-Cech-Kompaktifizierung* von  $X$ .

**BEMERKUNG 7.20** ( $\rightarrow$  Aufgabe 42)

Für einen diskreten topologischen Raum  $X$  lassen sich die Elemente von  $\beta(X)$  mit den Ultrafiltern auf  $X$  identifizieren:

Für eine Menge  $X$  bezeichnen wir mit  $\hat{X}$  die Menge der Ultrafilter auf  $X$ . Zu einer Teilmenge  $U$  von  $X$  sei  $\hat{U}$  die Menge derjenigen Ultrafilter auf  $X$ , die  $U$  als Element enthalten. Wir betrachten  $X$  als Teilmenge von  $\hat{X}$ , indem wir die Elemente von  $x \in X$  mit dem in  $x$  zentrierten Hauptultrafilter  $\{U \subseteq X \mid x \in U\}$  identifizieren.

Sei nun  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann gelten:

(1) Die Mengen  $\hat{U}$  mit  $U \in \mathcal{T}$  bilden die Basis einer Topologie auf  $\hat{X}$ .

(2)  $\hat{X}$  ist kompakt und  $X$  ist homöomorph zu einem Unterraum von  $\hat{X}$ , der dicht in  $\hat{X}$  liegt.

Sei nun  $(X, \mathcal{T})$  diskret, dann ist  $\hat{X}$  ein Hausdorffraum und jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen kompakten Hausdorffraum besitzt eine eindeutige (stetige) Fortsetzung  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow Y$ .

Aus den Eigenschaften der Räume  $\hat{X}$  und  $\beta(X)$  ergibt sich, dass sich die Abbildung  $\varphi_X : X \rightarrow \beta(X)$  zu einer stetigen Abbildung  $\hat{X} \rightarrow \beta(X)$  fortsetzen lässt. Ebenso lässt sich die Einbettung  $X \rightarrow \hat{X}$  zu einer stetigen Abbildung  $\beta(X) \rightarrow \hat{X}$  fortsetzen. Durch Verkettung dieser beiden Fortsetzungen erhält man stetige Funktionen  $\beta(X) \rightarrow \beta(X)$  bzw.  $\hat{X} \rightarrow \hat{X}$  und da nur die Identität diese Eigenschaft haben kann, sind folglich die Abbildungen  $\hat{X} \rightarrow \beta(X)$  und  $\beta(X) \rightarrow \hat{X}$  zueinander inverse Homöomorphismen.

## 7.5 Abzählbare Produkte

**BEMERKUNG 7.21** (→ Aufgabe 43)

Seien  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer, topologischer Räume und  $X := \prod X_\alpha$ . Dann gilt:

Genau dann ist  $X$  ein (A1)-Raum, wenn alle  $X_\alpha$  (A1)-Räume sind und  $\{\alpha \in I \mid |X_\alpha| > 1\}$  abzählbar ist.

**FOLGERUNG 7.22**

Sei  $I$  überabzählbar und  $X = \prod X_\alpha$  Produkt topologischer Räume  $X_\alpha$  mit  $\alpha \in I$  und  $|X_\alpha| \geq 2$ . Dann ist  $X$  nicht metrisierbar.

Insbesondere ist  $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$  nicht metrisierbar.

**BEMERKUNG 7.23** (→ Aufgabe 44)

Seien  $X$  ein metrisierbarer topologischer Raum und  $\alpha > 0$ . Dann wird die Topologie von  $X$  durch eine Metrik  $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, für die  $\delta(x, y) < \alpha$  für alle  $x, y \in X$  gilt.

**SATZ 7.24**

Jedes abzählbare Produkt metrisierbarer Räume ist metrisierbar.

**BEWEIS**

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  abzählbare Familie topologischer Räume, o.B.d.A.  $I = \mathbb{N}$ . Im Fall  $I$  endlich wird das Produkt durch einpunktige topologische Räume verlängert. Weiter sei  $X = \prod X_n$ . Sei  $d_n : X_n \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Metrik mit  $d_n(x, y) < 2^{-n}$  für alle  $x, y \in X_n$ . Setze zu  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $y := (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$d : \begin{array}{ccc} X \times X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n(x_n, y_n) \end{array} .$$

Dann ist  $d$  eine Metrik auf  $X$ .

Sei  $\mathcal{T}_\pi$  die Produkttopologie und  $\mathcal{T}_d$  die von  $d$  induzierte Topologie auf  $X$ . Wir zeigen noch:  $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\pi$ .

(1) Zu  $\epsilon > 0$  ist  $B_\epsilon^{(d)}(x) \subseteq \pi_n^{-1}(B_\epsilon^{(d_n)}(x_n))$  für jedes  $x \in X$  (wobei  $x_n = \pi_n(x)$ ). Dann ist  $\pi_n : X \rightarrow X_n$  stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist  $\mathcal{T}_\pi \subseteq \mathcal{T}_d$ .

(2) Seien  $\epsilon > 0$  und  $x \in X$  gegeben. Wähle  $N \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\sum_{n > N} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$ . Weiter sei  $U := \prod U_n$ , wobei  $U_n = B_\delta^{(d_n)}(x_n)$  mit  $\delta := \frac{\epsilon}{2(N+1)}$  für alle  $n \leq N$  und  $U_n := X_n$  für alle  $n > N$ .

Dann ist  $U \in \mathcal{T}_\pi$  und es gilt  $x \in U \subseteq B_\epsilon^{(d)}(x)$ , denn für  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n(x_n, y_n) = \sum_{n \leq N} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n > N} d_n(x_n, y_n) < \delta + 2^{-N} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Also  $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_\pi$ .

Wir erhalten also insgesamt  $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\pi$ .

**LEMMA 7.25**

Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Dann gelten:

- (1) Jede offene Überdeckung von  $X$  enthält eine abzählbare Überdeckung.
- (2) Jede Basis von  $X$  enthält eine abzählbare Basis.

**BEWEIS**

Sei  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Basis von  $X$ .

(1) Sei  $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Sei  $N := \{n \in \mathbb{N} \mid U_n \subseteq V_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$ . Zu  $n \in N$  wählen wir  $\alpha(n) \in I$  mit  $U_n \subseteq V_{\alpha(n)}$ . Dann ist  $I' := \alpha(N)$  eine abzählbare Teilmenge von  $I$  und für  $x \in X$  gibt es  $\alpha \in I$  mit  $x \in V_\alpha$  und dazu ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \in U_n \subseteq V_\alpha$ .

Dann ist  $n \in N$  und  $x \in U_n \subseteq V_{\alpha(n)}$ . Somit ist  $X = \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha \in I'\}$  und damit ist  $(V_\alpha)_{\alpha \in I'}$  eine abzählbare Überdeckung von  $X$  und in  $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$  enthalten.

- (2) Sei  $\mathcal{V}$  eine Basis von  $X$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{V}_n := \{V \in \mathcal{V} \mid V \subseteq U_n\}$ . Dann ist  $U_n = \bigcup \mathcal{V}_n$ , also  $\mathcal{V}_n$  offene Überdeckung. Da  $(U_i \cap U_n)_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Basis von  $U_n$  bilden, gibt es nach (1) ein abzählbares Teilsystem  $\mathcal{V}'_n \subseteq \mathcal{V}_n$  mit  $U_n = \bigcup \mathcal{V}'_n$ . Dann ist  $\mathcal{V}' := \bigcup \{\mathcal{V}'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ein abzählbares Teilsystem von  $\mathcal{V}$  und eine Basis von  $X$ .

**PROPOSITION 7.26**

Sei  $X$  vollständig regulär mit abzählbarer Basis. Dann kann  $X$  in  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  eingebettet werden.

**BEWEIS**

Sei  $X$  vollständig regulär. Dann ist  $\{W_f \mid f \in \mathcal{C}_X\}$  eine Basis von  $X$ , wobei  $W_f := f^{-1}([0, 1])$  für  $f \in \mathcal{C}_X$ , d.h.  $f : X \rightarrow [0, 1]$  stetig. Nach Lemma 7.27 gibt es eine abzählbare Teilmenge  $A \subseteq \mathcal{C}_X$  derart, dass  $\{W_f \mid f \in A\}$  eine Basis von  $X$  ist. Dann ist  $\varphi_A : X \rightarrow [0, 1]^A$  eine Einbettung. Ist  $|A| = |\mathbb{N}|$ , so ist  $[0, 1]^A \cong [0, 1]^{\mathbb{N}}$ . Gilt dagegen  $|A| < \infty$ , so ist  $X$  ein endlicher, diskreter Raum und lässt sich somit auch in  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  einbetten.

**SATZ 7.27 (Zweiter Satz von Urysohn)**

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Dann sind äquivalent:

- (1)  $X$  ist metrisierbar.
- (2)  $X$  ist normal.
- (3)  $X$  ist vollständig regulär.
- (4)  $X$  kann in  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  eingebettet werden.

**FOLGERUNG 7.28**

Jeder lokal kompakte Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist metrisierbar, insbesondere normal.

**BEMERKUNG 7.29**

Der Raum  $X := \{0, 1\}^{\mathbb{R}}$  ist ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist  $Y = X \setminus \{0\}$  ein lokal kompakter Hausdorffraum. Aber  $Y$  ist nicht normal.

## 8 Zusammenhang

### 8.1 Zusammenhängende Mengen

#### PROPOSITION 8.1

Für einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent:

- (1) Es gibt außer  $\emptyset$  und  $X$  keine Teilmengen von  $X$ , die offen und abgeschlossen sind.
- (2)  $X$  lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier echter offener Teilmengen darstellen.
- (3) Es gibt keine stetige, surjektive Abbildung  $X \rightarrow \{0, 1\}$  in den diskreten Raum  $\{0, 1\}$ .
- (4) Jede stetige Abbildung  $X \rightarrow Y$  in einen diskreten Raum  $Y$  ist konstant.

$X$  heißt *zusammenhängend*, wenn er diese Äquivalenzen erfüllt.

#### BEWEIS

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Klar durch Komplementbildung.

(1) $\Rightarrow$ (4): Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $Y$  diskret. Wir wählen  $x_0 \in X$ , dazu  $y_0 := f(x_0)$ . Da  $Y$  diskret und  $f$  stetig, ist  $f^{-1}(\{y_0\})$  offen und abgeschlossen in  $X$  mit  $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$ , also nicht leer. Nach Voraussetzung ist also  $X = f^{-1}(\{y_0\})$ , somit  $f(x) = y_0$  für alle  $x \in X$ . Also ist  $f$  konstant.

(4) $\Rightarrow$ (3): Klar.

(3) $\Rightarrow$ (2): Wäre  $X = U \dot{\cup} V$  mit  $U, V$  offen und nicht leer, so wäre  $\mathbb{1}_U$  stetig und surjektiv.

#### DEFINITION 8.2

Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt *zusammenhängend*, wenn  $U$  in der Spurtopologie von  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum ist.

#### BEISPIEL 8.3

Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $U$  ein Intervall ist:

- (1) Sei zunächst  $U \subseteq \mathbb{R}$  kein Intervall, d.h. es gibt  $a, b, c \in X$  mit  $a, c \in U$  und  $b \notin U$ . Dann sind  $A := (-\infty, b) \cap U$  und  $B := (b, \infty) \cap U$  offen, nicht leer und disjunkt mit  $U = A \cup B$ .
- (2) Sei nun  $U$  ein Intervall. Angenommen, es gäbe  $A, B \subseteq U$  offen, nicht leer und disjunkt mit  $U = A \cup B$ . Sei  $a \in A$  beliebig, dann  $\{x \in U \mid a \leq x\} \subseteq A$ , denn gäbe es ein  $b \in B$  mit  $s := \sup\{x \in A \mid a \leq x\} < b$ , dann  $s \notin A$ , da  $A$  offen, und  $s \notin B$ , da auch  $B$  offen. Analog ist  $\{x \in U \mid x \leq a\} \subseteq A$ , also  $A = U$  und damit  $B = \emptyset$ , Widerspruch.

#### PROPOSITION 8.4

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist  $U \subseteq X$  zusammenhängend, so auch  $f(U)$  in  $Y$ .

#### BEWEIS

Ist  $f(U) = O_1 \cup O_2$  mit  $O_1, O_2$  offen in  $Y$ , nicht leer und disjunkt, dann ist auch

$$U = f^{-1}(f(U)) \cap U = (f^{-1}(O_1) \cap U) \cup (f^{-1}(O_2) \cap U)$$

nicht triviale, disjunkte Vereinigung von in  $U$  offenen Mengen.

#### BEISPIEL 8.5

- (1) Der Einheitskreis  $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist zusammenhängend, denn  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$  ist stetig und surjektiv und  $\mathbb{R}$  ist zusammenhängend.
- (2) Sind  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  zusammenhängend, so ist auch der Unterraum  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$  in  $X \times Y$  zusammenhängend, denn  $\Gamma_f$  ist das Bild der stetigen Abbildung  $X \rightarrow X \times Y$ ,  $x \mapsto (x, f(x))$ .

**SATZ 8.6**

Seien  $X$  topologischer Raum und  $A, B \subseteq X$  mit  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ . Ist  $A$  zusammenhängend, dann auch  $B$ .

**BEWEIS**

Sei  $U \subsetneq B$  offen und abgeschlossen in  $B$  und nicht leer. Dann ist  $U \cap A$  offen und abgeschlossen in  $A$  und wegen  $U \neq \emptyset$  auch  $A \neq \emptyset$ . Weil  $U$  abgeschlossen in  $B$  ist und  $U \subsetneq \bar{A}$ , gilt  $A \not\subseteq U$ , denn wäre  $A \subseteq U$ , dann  $\bar{A} \subseteq \bar{U} \Rightarrow \bar{A} = \bar{U} \Rightarrow U = \bar{U} \cap B = B$ , Widerspruch. Also  $A \cap U \neq A \Rightarrow B$  zusammenhängend.

**PROPOSITION 8.7**

Sei  $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie zusammenhängender Teilmengen des topologischen Raumes  $X$ .

Ist  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ , so ist  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  zusammenhängend.

**BEWEIS**

Seien  $f : \bigcup_{\alpha} A_\alpha \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung in einen diskreten topologischen Raum  $Y$ . und  $x_0 \in \bigcap A_\alpha$ . Für  $\alpha \in I$  ist  $A_\alpha$  zusammenhängend, somit  $f|_{A_\alpha} : A_\alpha \rightarrow Y$  konstant, also  $f|_{A_\alpha}(x) = f(x_0)$  für alle  $x \in X$  und alle  $\alpha \in I$ . Somit ist  $f(x) = f(x_0)$  für alle  $x \in \bigcup A_\alpha$ , also  $f : \bigcup A_\alpha \rightarrow Y$  konstant.

**KOROLLAR 8.8**

Jeder Punkt eines topologischen Raumes ist in genau einer maximalen zusammenhängenden Teilmenge des Raumes enthalten.

**BEWEIS**

Zu  $x \in X$  ist  $\bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ zusammenhängend und } x \in U\}$  die maximale zusammenhängende Menge in  $X$ , die  $x$  enthält.

**DEFINITION 8.9**

Die maximalen zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$  heißen die *Zusammenhangskomponenten* von  $X$ .

Für  $a \in X$  wird mit  $\mathcal{Z}_X(a)$  die Zusammenhangskomponente von  $X$ , in der  $a$  liegt, bezeichnet und die *Zusammenhangskomponente von  $a$  in  $X$*  genannt.

**BEMERKUNG 8.10**

- (1)  $\mathcal{Z}_X(a) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ zusammenhängend und } a \in U\}$  und  $a \in \mathcal{Z}_X(a)$ .
- (2) Da mit  $\mathcal{Z}_X(a)$  auch  $\overline{\mathcal{Z}_X(a)}$  zusammenhängend ist, folgt  $\mathcal{Z}_X(a)$  abgeschlossen.
- (3) Für  $a, b \in X$  gilt entweder  $\mathcal{Z}_X(a) = \mathcal{Z}_X(b)$  oder  $\mathcal{Z}_X(a) \cap \mathcal{Z}_X(b) = \emptyset$ . Die Zusammenhangskomponenten von  $X$  bilden also eine disjunkte Zerlegung von  $X$ .
- (4) Hat  $X$  nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, so sind diese auch offen. Seien nämlich  $\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n$  die endlich vielen Zusammenhangskomponenten von  $X$ , so ist  $\mathcal{Z}_i = X \setminus (\bigcup \{\mathcal{Z}_j \mid j \neq i\})$  offen in  $X$  als Komplement einer abgeschlossenen Menge.
- (5) Ist jede Zusammenhangskomponente von  $X$  offen, dann ist  $U \subseteq X$  offen in  $X \Leftrightarrow U \cap \mathcal{Z}$  ist offen in  $\mathcal{Z}$  für jede Zusammenhangskomponente  $\mathcal{Z}$  von  $X$ , d.h.  $X$  ist die topologische Summe seiner Zusammenhangskomponenten.
- (6) Ist umgekehrt  $X$  homöomorph zu einer topologischen Summe zusammenhängender Räume, so sind die Zusammenhangskomponenten von  $X$  alle offen.

**SATZ 8.11**

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer topologischer Räume. Genau dann ist  $X = \prod X_\alpha$  zusammenhängend, wenn  $X_\alpha$  zusammenhängend für alle  $\alpha \in I$  ist.

**BEWEIS**

Ist  $X$  zusammenhängend, dann auch alle  $X_\alpha = \pi_\alpha(X)$  als Bilder einer zusammenhängender Menge unter stetigen Abbildungen.

Seien nun  $X_\alpha$  zusammenhängend für alle  $\alpha \in I$  und  $\mathcal{Z}$  eine Zusammenhangskomponente von  $X$ . Wir wollen  $\mathcal{Z} = X$  zeigen. Seien dazu  $z \in \mathcal{Z}$  und  $x \in X$  gegeben. Gibt es ein  $\alpha_0 \in I$  derart, dass  $\pi_{\alpha_0}(x) = \pi_{\alpha_0}(z)$  für  $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$ , so folgt  $x \in \mathcal{Z}$ . Andernfalls gäbe es ein  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  stetig mit  $f(z) = 0$  und  $f(x) = 1$ . Da die Einbettung  $j : X_{\alpha_0} \rightarrow X$ ,  $j(u) := (u_\alpha)_{\alpha \in I}$  mit  $x_{\alpha_0} = u$  und  $x_\alpha = \pi_\alpha(z)$  stetig ist mit  $x, z \in j(X_{\alpha_0})$ , ist  $f \circ j : X_{\alpha_0} \rightarrow \{0, 1\}$  stetig im Widerspruch zu  $X_{\alpha_0}$  zusammenhängend. Per Induktion folgt: Ist  $\{\alpha \in I \mid \pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(z)\}$  endlich, so ist  $x \in \mathcal{Z}$ .

Sei nun  $U = \prod U_\alpha$  aus der natürlichen Basis von  $X$ , also mit  $X_\alpha \neq U_\alpha$  für nur endlich viele  $\alpha \in I$  und  $U_\alpha$  offen in  $X_\alpha$ . Dann ist  $J = \{\alpha \in I \mid \pi_\alpha(z) \notin U_\alpha\}$  endlich. Wir wählen  $z' \in U$  mit  $\pi_\alpha(z) = \pi_\alpha(z')$  für  $\alpha \in I \setminus J$ . Damit ist gezeigt, dass  $\mathcal{Z}$  dicht in  $X$  liegt. Da  $\mathcal{Z} = \overline{\mathcal{Z}}$ , folgt  $\mathcal{Z} = X$  und damit ist  $X$  zusammenhängend.

**DEFINITION 8.12**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *total unzusammenhängend*, wenn  $\mathcal{Z}_X(A) = \{a\}$  ist für jedes  $a \in X$ .

**BEMERKUNG 8.13**

Insbesondere ist  $X$  dann ein  $T_1$ -Raum: Für alle  $a \in X$  ist  $\{a\} = \mathcal{Z}_X(a)$  abgeschlossen.

**BEISPIEL 8.14**

- (1) Jeder diskrete Raum ist total unzusammenhängend.
- (2) Die Menge der rationalen Zahlen in der Spurtopologie von  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{eukl.})$  ist total unzusammenhängend, denn zu  $a, b \in \mathbb{Q}$  mit  $a < b$  gibt es  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $a < r < b$  und dann lässt sich  $\mathbb{Q}$  zerlegen in  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, r)) \dot{\cup} (\mathbb{Q} \cap (r, \infty))$ . Mit  $a \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, r)$  und  $b \in \mathbb{Q} \cap (r, \infty)$  gibt es zwei Elemente in  $\mathbb{Q}$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{Q}$ .

**SATZ 8.15**

Jeder vollständig reguläre Raum  $X$  mit  $|X| < |\mathbb{R}|$  ist total unzusammenhängend.

**BEWEIS**

Seien  $X$  vollständig regulär und  $a, b \in X$  verschieden gegeben mit  $\mathcal{Z}_X(a) = \mathcal{Z}_X(b)$ . Dann gibt es nach Vor. eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(a) = 0$  und  $f(b) = 1$ . Da  $f(\mathcal{Z}_X(a))$  zusammenhängend ist, folgt  $f(X) = [0, 1]$ , also  $f$  surjektiv. Dann  $|X| \geq |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$ .

## 8.2 Wege

### DEFINITION 8.16

Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $a, b \in X$ . Ein *Weg* in  $X$  von  $a$  nach  $b$  ist eine stetige Abbildung  $\tau : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\tau(0) = a$  und  $\tau(1) = b$ .

Zwei Elemente  $a, b \in X$  heißen in  $X$  *durch einen Weg verbunden* (wir schreiben dafür  $a \sim b$ ), wenn es in  $X$  einen Weg von  $a$  nach  $b$  gibt. Wir nennen  $\sim$  dann die *Wegrelation* auf  $X$ .

Zu  $x \in X$  heißt die Äquivalenzklasse  $\mathcal{W}_X(x) := \{y \in X \mid x \sim y\}$  als die *Wegkomponente* von  $x$  in  $X$ .

### BEISPIEL 8.17

Jede konvexe Teilmenge  $T$  eines normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraums ist wegzusammenhängend. Wegen der Konvexität ist nämlich zu  $a, b \in T$  durch  $\tau : [0, 1] \rightarrow T$ ,  $\tau(t) := ta + (1 - t)b$  ein Weg von  $a$  nach  $b$  gegeben.

### PROPOSITION 8.18

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist die Wegrelation eine Äquivalenzrelation auf  $X$ .

### BEWEIS

- (a) Für  $a \in X$  gilt  $a \sim a$ , denn mit  $\tau : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto a$  hat man einen Weg von  $a$  nach  $a$ .
- (b) Für  $a, b \in X$  mit  $a \sim b$  gibt es einen Weg  $\tau : [0, 1] \rightarrow X$  von  $a$  nach  $b$ . Dann ist  $\tau' : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $t \mapsto \tau(1 - t)$  ein Weg von  $b$  nach  $a$ .  $\tau'$  ist stetig als Verkettung stetiger Abbildungen, also  $b \sim a$ .
- (c) Es bleibt noch die Transitivität von  $\sim$  zu zeigen. Seien dazu  $a, b, c \in X$  gegeben mit  $a \sim b$  und  $b \sim c$ . Es gibt einen Weg  $\rho : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\rho(0) = a$  und  $\rho(1) = b$  sowie einen Weg  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\sigma(0) = b$  und  $\sigma(1) = c$ . Dann ist

$$\tau : [0, 1] \rightarrow X \\ t \mapsto \begin{cases} \rho(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg von  $a$  nach  $c$ , womit wie gewünscht  $a \sim c$  folgt. Tatsächlich ist  $\tau(0) = a$  und  $\tau(1) = c$ . Außerdem ist  $\tau$  stetig, da die Einschränkungen von  $\tau$  auf die abgeschlossenen Intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  und  $[\frac{1}{2}, 1]$  jeweils stetig sind.

### PROPOSITION 8.19

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Für  $a, b \in X$  mit  $a \sim b$  in  $X$  folgt auch  $f(a) \sim f(b)$  in  $Y$ .

Insbesondere ist für  $U \subseteq X$  wegzusammenhängend auch das Bild  $f(U)$  wegzusammenhängend.

### BEWEIS

Ist  $\tau : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $a$  nach  $b$ , so ist  $(f \circ \tau) : [0, 1] \rightarrow Y$  ein Weg von  $f(a)$  nach  $f(b)$ .

### SATZ 8.20

Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.

### BEWEIS

Sei  $X$  ein wegzusammenhängender, topologischer Raum. Wir betrachten eine beliebige, stetige Abbildung  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ . O.B.d.A.  $X \neq \emptyset$ , dann wählen wir einen Punkt  $x_0 \in X$ . Für  $x \in X$  gibt es einen Weg  $\tau : [0, 1] \rightarrow X$  von  $x_0$  nach  $x$ . Dann ist  $(f \circ \tau) : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  stetig und damit konstant, da  $[0, 1]$  zusammenhängend. Also gilt  $f(x) = (f \circ \tau)(1) = (f \circ \tau)(0) = f(x_0)$ . Also ist  $f$  konstant. Damit ist gezeigt, dass  $X$  zusammenhängend ist.

**KOROLLAR 8.21**

Jede Wegkomponente eines topologischen Raumes  $X$  liegt in genau einer Zusammenhangskomponente.

**BEMERKUNG 8.22** ( $\rightarrow$  Aufgabe 45)

Also ist die Zerlegung eines Raumes in seine Wegkomponenten eine Verfeinerung seiner Zerlegung in Zusammenhangskomponenten.

Nicht jede zusammenhängende Menge ist wegzusammenhängend:  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \sin(\frac{\pi}{x})\}$  ist wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend. Mit  $X := X_0 \cup \{(0, 0)\}$  gilt nun  $X_0 \subseteq X \subseteq \bar{X}_0$ , d.h.  $X$  ist zusammenhängend. Man sieht jedoch leicht, dass  $X$  nicht wegzusammenhängend ist.

**SATZ 8.23**

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer, topologischer Räume. Das Produkt  $\prod_\alpha X_\alpha$  ist genau dann wegzusammenhängend, wenn jeder der Räume  $X_\alpha$  wegzusammenhängend ist.

**BEWEIS**

Sei  $X = \prod_\alpha X_\alpha$ . Für  $\alpha \in I$  sei  $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$  jeweils die kanonische Projektion. Mit  $X$  ist also auch  $X_\alpha = \pi_\alpha(X)$  wegzusammenhängend für jedes  $\alpha \in I$ .

Sei umgekehrt  $X_\alpha$  wegzusammenhängend für jedes  $\alpha \in I$ . Seien  $x, y \in X$  gegeben. Für jedes  $\alpha \in I$  gibt es nach Vor. einen Weg  $\tau_\alpha : [0, 1] \rightarrow X_\alpha$  von  $\pi_\alpha(x)$  nach  $\pi_\alpha(y)$ . Dann ist die Produktabbildung  $\tau : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\tau(t) := (\tau_\alpha(t))_{\alpha \in I}$  ein Weg von  $x$  nach  $y$  in  $X$ .

**LEMMA 8.24**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Genau dann hat jeder Punkt von  $X$  eine zusammenhängende (bzw. wegzusammenhängende) Umgebung in  $X$ , wenn jede Zusammenhangskomponente (bzw. Wegkomponente) offen ist.

**BEWEIS**

Offenkundig ist die Bedingung hinreichend. Sei nun  $T$  eine Zusammenhangskomponente (bzw. Wegkomponente) von  $X$ . Hat der Punkt  $z \in T$  eine Umgebung  $U$  in  $X$ , die zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend) ist, so folgt mit  $z \in U \subseteq Z$ , dass  $z$  ein innerer Punkt von  $T$  ist. Gilt dies nun für alle  $z \in T$ , dann ist  $T$  offen in  $X$ .

**SATZ 8.25**

Sei  $X$  ein topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Dann stimmen die Zusammenhangskomponenten von  $X$  mit den Wegzusammenhangskomponenten überein und sind offen.

**BEWEIS**

Nach dem Lemma ist jede Wegkomponente von  $X$  offen. Jede Zusammenhangskomponente von  $X$  ist disjunkte Vereinigung der in ihr enthaltenen Wegkomponenten in  $X$ . Da eine zusammenhängende Menge jedoch nicht disjunkte Vereinigung mehrerer nicht leerer, offener Mengen sein kann, ist damit jede Zusammenhangskomponente bereits eine Wegkomponente.

**KOROLLAR 8.26**

Ein topologischer Raum ist genau dann wegzusammenhängend, wenn er zusammenhängend ist und jeder Punkt von  $X$  eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt.



### 8.3 Lokaler Zusammenhang

**DEFINITION 8.27**

Ein topologischer Raum heißt *lokal zusammenhängend*, wenn er eine Basis aus zusammenhängenden Mengen besitzt.

Entsprechend heißt  $X$  *lokal wegzusammenhängend*, wenn es eine Basis von  $X$  gibt, die aus wegzusammenhängenden Mengen besteht.

**SATZ 8.28**

Sei  $X$  ein lokal wegzusammenhängender, topologischer Raum. Dann ist  $X$  lokal zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponenten von  $X$  stimmen mit den Wegkomponenten überein und sind offen.

**BEWEIS**

Nach Satz 8.20 ist  $X$  lokal zusammenhängend. Da in einem lokal wegzusammenhängenden Raum jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt, folgen die übrigen Aussagen mit Satz 8.25.

**PROPOSITION 8.29**

Ist  $X$  ein lokal (weg)zusammenhängend Raum, so auch jeder offenen Unterraum  $U$  von  $X$ .

**BEWEIS**

Sei  $\mathcal{B}$  eine lokal (weg)zusammenhängende Basis von  $X$ , dann ist  $\{V \in \mathcal{B} \mid V \subseteq U\}$  eine lokal (weg)zusammenhängende Basis von  $U$ .

**SATZ 8.30**

Jeder offene Unterraum eines normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes  $V$  ist lokal wegzusammenhängend.

**BEWEIS**

Die Kugeln  $B_\epsilon(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| < \epsilon\}$  mit  $a \in V$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  bilden eine Basis von  $V$  (als topologischer Raum). Jede solche Kugel ist konvex und somit wegzusammenhängend.

Zur Konvexität: Seien  $x_1, x_2 \in B_\epsilon(a)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $x = tx_1 + (1-t)x_2$ . Dann  $x \in B_\epsilon(a)$ , denn

$$\|x - a\| = \|t(x_1 - a) + (1-t)(x_2 - a)\| \leq \|t(x_1 - a)\| + \|(1-t)(x_2 - a)\| = t\|x_1 - a\| + (1-t)\|x_2 - a\| < \epsilon.$$

Damit bilden die  $B_\epsilon(a)$  eine Basis von  $V$  aus wegzusammenhängenden Mengen von  $V$ , d.h.  $V$  ist lokal wegzusammenhängend und damit gilt dies auch für jeden offenen Unterraum von  $V$  nach Prop. 8.29.

**BEMERKUNG 8.31** ( $\rightarrow$  Aufgabe 46)

Ein (weg)zusammenhängender Raum muss nicht lokal zusammenhängend sein.

**BEMERKUNG 8.32** ( $\rightarrow$  Aufgabe 47)

Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann lokal (weg)zusammenhängend, wenn in jedem offenen Unterraum  $U$  von  $X$  jede (Weg-)Zusammenhangskomponente offen ist.

## 9 Kontraktion

### 9.1 Homotopien

#### DEFINITION

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  stetig. Eine **Homotopie** zwischen  $f_0$  und  $f_1$  ist eine stetige Abbildung  $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit  $f_0 = \Phi(\cdot, 0)$  und  $f_1 = \Phi(\cdot, 1)$ .

$f_0$  und  $f_1$  heißen **homotop** bzw. **deformierbar**, wenn es eine Homotopie zwischen  $f_0$  und  $f_1$  gibt.

Ist  $\Phi_t$  für alle  $t \in [0, 1]$  ein Homöomorphismus, so heißt  $\Phi$  eine **Isotopie** und die beiden Abbildungen  $f_0$  und  $f_1$  heißen **isotop** zueinander.

#### BEMERKUNG 9.1

Eine solche Abbildung  $\Phi$  wird als Schar stetiger Funktionen  $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{I}}$  aufgefasst mit

$$\Phi_t : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & \Phi(x, t). \end{array}$$

#### NOTATION 9.2

Ab jetzt bezeichne  $\mathbb{I}$  stets das Intervall  $[0, 1]$ .

Sind  $f_0$  und  $f_1$  homotop zueinander, so schreibt man  $f_0 \simeq f_1$  oder  $f_0 \simeq_h f_1$ .

Ist  $A \subseteq X$ , so schreibt man auch  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$ , falls es eine Homotopie  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  zwischen  $f_0$  und  $f_1$  gibt, so dass  $\Phi_{t|_A} = f_{0|_A} = f_{1|_A}$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ .

#### BEMERKUNG 9.3

Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig,  $A, B \subseteq X$  und  $f \simeq g \text{ rel } A$ . Dann gilt  $f|_B \simeq g|_B \text{ rel } A \cap B$ .

#### PROPOSITION 9.4

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $A \subseteq X$ . Dann ist Homotopie rel  $A$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{C}(X, Y)$ , der Menge der stetigen Abbildungen zwischen  $X$  und  $Y$ .

#### BEWEIS

- (1) Für  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  ist  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  mit  $(x, t) \mapsto f(x)$  eine Homotopie rel  $A$  zwischen  $f$  und  $f$ . Also ist  $\simeq$  reflexiv.
- (2) Für  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  und eine Homotopie  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  zwischen  $f$  und  $g$  mit  $\Phi_{t|_A} = f|_A = g|_A$  ist  $\bar{\Phi} : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ ,  $(x, t) \mapsto \Phi(x, 1 - t)$  eine Homotopie rel  $A$  mit  $\bar{\Phi}_0 = \Phi_1 = g$  und  $\bar{\Phi}_1 = \Phi_0 = f$  sowie  $\bar{\Phi}_{t|_A} = \Phi_{1-t|_A} = f|_A = g|_A$ . Also ist  $\simeq$  symmetrisch.
- (3) Seien nun  $f_i : X \rightarrow Y$  stetig für  $i = 0, 1, 2$  mit  $f_0 \simeq f_1 \simeq f_2 \text{ rel } A$ . Seien weiter  $P, Q : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  stetig mit  $P$  Homotopie rel  $A$  zwischen  $f_0$  und  $f_1$  sowie  $Q$  Homotopie rel  $A$  zwischen  $f_1$  und  $f_2$ . Wir definieren

$$\Phi : \begin{array}{ccc} X \times \mathbb{I} & \rightarrow & Y \\ (x, t) & \mapsto & \begin{cases} P(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ Q(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array} .$$

Für  $t = \frac{1}{2}$  ist  $P(x, 2t) = P(x, 1) = f_1 = Q(x, 0) = Q(x, 2t - 1)$ , d.h.  $\Phi$  ist wohldefiniert. Dann ist  $\Phi|_{X \times [0, \frac{1}{2}]} = P(\cdot, 2\cdot)$  stetig und ebenso  $\Phi|_{X \times [\frac{1}{2}, 1]} = Q(\cdot, 2\cdot - 1)$  und da  $X \times \mathbb{I} = (X \times [0, \frac{1}{2}]) \cup (X \times [\frac{1}{2}, 1])$  ist als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen, folgt mit Aufgabe 15, dass dann auch  $\Phi$  stetig ist.

Weiter ist  $\Phi_{t|_A} = P_{2t|_A} = f_{1|_A}$  für  $t \leq \frac{1}{2}$  und  $\Phi_{2t-1|_A} = f_{1|_A}$  für  $t \geq \frac{1}{2}$ , also  $\Phi_{t|_A} = f_{1|_A} = f_{0|_A} = f_{2|_A}$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ , also ist  $\Phi$  eine Homotopie zwischen  $f_0$  und  $f_2$  rel  $A$ , da zudem gilt:  $\Phi_0 = P_{2 \cdot 0} = f_0$  und  $\Phi_1 = Q_{2 \cdot 1 - 1} = f_2$ .

Also ist  $\simeq$  transitiv.

**PROPOSITION 9.5**

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume und  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  homotop;  $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  homotop. Dann sind auch  $g_0 \circ f_0$  und  $g_1 \circ f_1$  homotop als Abbildungen von  $X$  nach  $Z$ .

Gilt zusätzlich  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$ ,  $g_0 \simeq g_1 \text{ rel } A$  ( $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ ,  $f_i(A) \subseteq B$ ), so  $f_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 \text{ rel } A$ .

**BEWEIS**

Seien  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  Homotopie zwischen  $f_0$  und  $f_1$  sowie  $\Psi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Z$  Homotopie zwischen  $g_0$  und  $g_1$ . Weiter sei  $\Theta : X \times \mathbb{I} \rightarrow Z$ ,  $(x, t) \mapsto \Psi(\Phi(x, t), t)$ , d.h.  $\Theta_t = \Psi_t \circ \Phi_t$  für  $t \in \mathbb{I}$ . Dann  $\Theta_i = \Psi_i \circ \Phi_i = g_i \circ f_i$ ; außerdem ist  $\Theta$  stetig. Dann  $\Theta = \Psi \circ F$  mit der stetigen Abbildung  $F : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ ,  $(x, t) \mapsto (\Phi(x, t), t)$ . Also ist  $\Theta$  eine Homotopie zwischen  $f_0 \circ f_0$  und  $g_1 \circ f_1$ .

**DEFINITION 9.6**

Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *unwesentlich* oder *nullhomotop*, wenn  $f \simeq g$  für eine konstante Abbildung  $g : X \rightarrow Y$ .

**NOTATION 9.7**

Ist  $Y$  wegzusammenhängend, so spielt der Wert von  $g$  dabei keine Rolle und man schreibt dann auch  $f \simeq 0$ , falls  $f$  nullhomotop ist:

**BEMERKUNG 9.8**

Seien  $y_0, y_1 \in Y$ ,  $g_i : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto y_i$  für  $i = 0, 1$ . Sind  $y_0$  und  $y_1$  in  $Y$  durch einen Weg  $\tau : \mathbb{I} \rightarrow Y$  verbunden, so ist  $g_0 \simeq g_1$  vermöge der Homotopie  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ ,  $(x, t) \mapsto \tau(t)$ .

Umgekehrt liefert eine Homotopie  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  von  $g_0$  nach  $g_1$  sofort zu jedem  $x_0 \in X$  einen Weg  $\tau_{x_0} : \mathbb{I} \rightarrow Y$  mit  $t \mapsto \Phi(x_0, t)$  von  $y_0$  nach  $y_1$ .

Wege im Raum  $Y$  können also als Homotopien  $X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  für einen einpunktigen Raum  $X$  aufgefasst werden.

**FOLGERUNG 9.9**

In wegzusammenhängenden Räumen bilden die nullhomotopen Abbildungen eine Äquivalenzklasse.

In einem nicht wegzusammenhängenden Raum müssen allerdings zwei konstante Abbildungen nicht homotop sein.

**PROPOSITION 9.10**

Seien  $(Y_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie topologischer Räume,  $Y = \prod_{\alpha} Y_\alpha$ ,  $\pi_\alpha : Y \rightarrow Y_\alpha$  jeweils die Projektion für  $\alpha \in I$ . Seien weiter  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen von einem topologischen Raum  $X$  in  $Y$ .

Genau dann gilt  $f \simeq_h g$ , wenn  $\pi_\alpha \circ f \simeq \pi_\alpha \circ g$  für jedes  $\alpha \in I$  ist.

**BEWEIS**

Mit einer Homotopie  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y_\alpha$  zwischen  $f$  und  $g$  erhalten wir die Homotopien  $(\pi_\alpha \circ \Phi) : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y_\alpha$  zwischen  $\pi_\alpha \circ f$  und  $\pi_\alpha \circ g$  für  $\alpha \in I$ .

Ist umgekehrt für jedes  $\alpha \in I$  eine Homotopie  $\Phi^{(\alpha)} : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y_\alpha$  zwischen  $\pi_\alpha \circ f$  und  $\pi_\alpha \circ g$  gegeben, so ist  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ ,  $(x, t) \mapsto (\Phi^{(\alpha)}(x, t))_{\alpha \in I}$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ .

## 9.2 Homotopie-Äquivalenz und Zusammenziehbarkeit

### DEFINITION 9.11

Zwei topologische Räume  $X, Y$  heißen *Homotopie-äquivalent* oder auch *von gleichem Homotopie-Typ*, wenn es  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  gibt mit  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  und  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ .

In dem Fall wird  $g$  als ein *Homotopie-Inverses* von  $f$  bezeichnet und wir schreiben  $X \simeq Y$  via  $(f, g)$ .

### BEMERKUNG 9.12

Ein Homotopie-Inverses muss nicht eindeutig sein.

### PROPOSITION 9.13

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume mit  $X \simeq Y$  und  $Y \simeq Z$ , dann auch  $X \simeq Z$ .

Die Homotopie-Äquivalenz  $\simeq$  ist also eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.

### BEWEIS

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $f' : Y \rightarrow X$  sowie  $g : Y \rightarrow Z$  und  $g' : Z \rightarrow Y$  jeweils zueinander Homotopie-inverse, stetige Abbildungen, d.h.  $f' \circ f \simeq \text{id}_X$ ,  $f \circ f' \simeq \text{id}_Y$ ,  $g' \circ g \simeq \text{id}_Z$  und  $g \circ g' \simeq \text{id}_Y$ . Dann gelten

$$(g \circ f) \circ (f' \circ g') \simeq g \circ \text{id}_Y \circ g' \simeq g \circ g' \simeq \text{id}_Z \quad \text{und} \\ (f' \circ g') \circ (g \circ f) \simeq f' \circ \text{id}_Y \circ f \simeq f' \circ f \simeq \text{id}_X,$$

also  $X \simeq Y$  via  $((g \circ f), (f' \circ g'))$ .

### LEMMA 9.14

Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f \simeq g$ . Sind  $x_1, x_2 \in X$  durch einen Weg in  $X$  verbunden, so auch die Punkte  $f(x_1)$  und  $g(x_2)$  in  $Y$ .

### BEWEIS

Sei zunächst  $x_1 = x = x_2$ . Sei  $\Phi$  eine Homotopie zwischen  $f, g$ , dann definiert  $\tau : [0, 1] \rightarrow Y$ ,  $t \mapsto \Phi(t, x)$  einen Weg zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$ .

Seien nun  $x_1, x_2 \in X$  beliebig, dann  $f(x_1) \sim f(x_2) \sim g(x_2) \sim g(x_1)$ , also auch  $f(x_1) \sim g(x_2)$ .

### KOROLLAR 9.15

Seien  $X, Y$  zwei topologische Räume,  $\gamma(X)$  und  $\gamma(Y)$  jeweils die Mengen der Wegkomponenten in  $X$  bzw.  $Y$ . und  $h : X \rightarrow Y$  stetig.

Dann liefert  $h$  eine wohldefinierte, nur von der Homotopie-Klasse  $[h]_{\simeq}$  abhängende Abbildung

$$\gamma[h] : \begin{array}{ccc} \gamma(X) & \rightarrow & \gamma(Y) \\ \mathcal{W}_X(x) & \mapsto & \mathcal{W}_Y(h(x)) \end{array} .$$

### KOROLLAR 9.16

Ist  $X \simeq Y$ , so stimmt die Anzahl der Wegkomponenten in  $X$  und in  $Y$  überein.

### BEWEIS

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  zueinander Homotopie-inverse, stetige Abbildungen. Weiter seien  $\gamma(X), \gamma(Y)$  jeweils die Menge der Wegkomponenten. Dann werden durch  $f$  und  $g$  zwei Abbildungen  $\gamma[f] : \gamma(X) \rightarrow \gamma(Y)$  und  $\gamma[g] : \gamma(Y) \rightarrow \gamma(X)$  induziert.

Für diese Abbildungen gilt

$$\begin{aligned}\gamma_{[g]} \circ \gamma_{[f]} &= \gamma_{[g \circ f]} \stackrel{g \circ f \simeq \text{id}_X}{=} \gamma_{[\text{id}_X]} = \text{id}_{\gamma(X)} \quad \text{und ebenso} \\ \gamma_{[f]} \circ \gamma_{[g]} &= \gamma_{[f \circ g]} \stackrel{f \circ g \simeq \text{id}_Y}{=} \gamma_{[\text{id}_Y]} = \text{id}_{\gamma(Y)},\end{aligned}$$

also sind  $\gamma_{[f]}$  und  $\gamma_{[g]}$  zueinander inverse Bijektionen.

**DEFINITION 9.17**

Ein Unterraum  $A \subseteq X$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt *Retrakt* von  $X$ , wenn es eine stetige Abbildung  $\varphi : X \rightarrow A$  gibt mit  $\varphi|_A = \text{id}_A$ . Diese wird dann als *Retraktion* bezeichnet.

Sei  $\iota_A : A \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung. Eine Retraktion heißt dann *Deformationsretraktion* bzw. *starke Deformationsretraktion*, falls  $\iota_A \circ \varphi \simeq \text{id}_X$  bzw. sogar  $\iota_A \circ \varphi \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$ .

Gibt es eine (starke) Deformationsretraktion, so heißt  $A$  ein (*starkes*) *Deformationsretrakt*.

Eine Homotopie zwischen  $\text{id}_X$  und einer Retraktion von  $X$  auf eine Teilmenge von  $X$  wird auch als *retrahierende Homotopie* bezeichnet.

**BEMERKUNG 9.18**

Ist  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$ , so ist  $X \simeq A$  via  $(\iota_A, \varphi)$ .

**BEISPIEL 9.19**

$A := \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  ist ein starkes Deformationsretrakt von  $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  vermöge der retrahierenden Homotopie

$$\Phi : \begin{array}{ccc} X \times \mathbb{I} & \rightarrow & \mathbb{S}^n \\ (x, t) & \mapsto & (1-t)x + \frac{t}{\|x\|}, \end{array}$$

denn es gelten:

- (1)  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $x \mapsto \Phi_1(x) = \frac{x}{\|x\|}$  erfüllt  $\varphi|_A = \text{id}_A$ , d.h.  $\varphi$  ist eine Retraktion;
- (2)  $\iota_A \circ \varphi \simeq \text{id}_X$  via  $\Phi$ , denn  $\Phi_0 = \text{id}_X$  und  $\Phi_1 = \iota_A \circ \varphi$ , d.h.  $\varphi$  ist ein Deformationsretrakt und
- (3)  $\iota_A \circ \varphi \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$ , denn  $\varphi|_A = (\text{id}_X)|_A = (\Phi_t)|_A$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ , d.h.  $\varphi$  ist ein starkes Deformationsretrakt.

**DEFINITION 9.20**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenziehbar* oder *kontrahierbar*, wenn  $\text{id}_X$  unwesentlich ist.

**BEMERKUNG 9.21**

Ist  $X$  zusammenziehbar, dann gibt es ein einpunktiges Deformationsretrakt von  $X$ . Sei nämlich  $\text{id}_X \simeq c$  für eine konstante Abbildung  $c : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto c$ . Dann existiert eine Retraktion  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow X$  mit  $\Phi_0 = \text{id}_X$  und  $\Phi_1 = c$  und  $\{c\}$  ist dann ein Deformationsretrakt via  $\varphi : X \rightarrow \{c\}$ ,  $x \mapsto \Phi_1(x)$ .

Ist umgekehrt  $\{x\} \subseteq X$  ein einpunktiges Deformationsretrakt von  $X$ , dann ist  $X$  offenbar zusammenziehbar.

Es gilt sogar: Ist  $X$  zusammenziehbar, dann ist jede einpunktige Teilmenge  $\{y\}$  von  $X$  ein Deformationsretrakt. Sei nämlich  $\{c\}$  ein Deformationsretrakt von  $X$  via der Homotopie  $\Phi$ , dann liefert

$$\Phi_y : \begin{array}{ccc} X \times \mathbb{I} & \rightarrow & X \\ (x, t) & \mapsto & \begin{cases} \Phi(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Phi(y, 2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

eine retrahierende Homotopie von  $X$  auf  $\{y\}$ .

**SATZ 9.22**

Jeder zusammenziehbare Raum ist wegzusammenhängend.

**BEWEIS**

Sei  $c : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto c$  konstant und sei  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen  $\text{id}_X$  und  $c$ . Für  $x \in X$  ist  $\tau_x : \mathbb{I} \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \Phi_t(x)$  ein Weg von  $x = \text{id}_X(x) = \Phi_0(x)$  nach  $c = c(x) = \Phi_1(x)$ . Also liegen alle Punkte von  $X$  in der Wegkomponente von  $c$ .

**BEMERKUNG 9.23**

Die Umkehrung gilt nicht, d.h. ein wegzusammenhängender Raum muss nicht zusammenziehbar sein. Betrachte z.B.  $\mathbb{S}^n$  für  $n \geq 1$ . Die  $n$ -Sphäre ist wegzusammenhängend, aber nicht zusammenziehbar. Dies können wir mit unseren jetzigen Mitteln aber noch nicht zeigen.

**BEISPIEL 9.24**

Jede konvexe Teilmenge  $X$  eines normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes  $V$  ist zusammenziehbar: Sei o.B.d.A.  $0 \in X$ . Dann definiert  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow X$  mit  $(x, t) \mapsto (1-t)x$  eine retrahierende Homotopie zwischen  $\text{id}_X$  und der Nullabbildung (Funktioniert allgemein, falls  $X$  „sternförmig“ ist.).

**BEMERKUNG 9.25** ( $\rightarrow$  Aufgabe 50)

Für einen topologischen Raum  $X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $X$  ist kontrahierbar.
- (2) Jede stetige Abbildung  $X \rightarrow Y$  in einen topologischen Raum  $Y$  ist unwesentlich.
- (3) Jede stetige Abbildung  $Z \rightarrow X$  auf einem topologischen Raum  $Z$  ist unwesentlich.

**SATZ 9.26**

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $Y$  ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$  lässt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung  $\mathbb{B}^{n+1} \rightarrow Y$  (mit  $\mathbb{B}^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| < 1\}$  die Vollkugel) fortsetzen, wenn  $f$  unwesentlich ist.

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ : Sei  $F : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow Y$  stetig mit  $F|_{\mathbb{S}^n} = f$ . Sei

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} & \rightarrow & Y \\ (x, t) & \mapsto & F(tx) \end{array} .$$

Dann ist  $\Phi$  stetig mit  $\Phi_0 = F(0)$  konstant und  $\Phi_1(x) = F(x) = f(x)$  ( $x \in \mathbb{S}^n$ ), d.h.  $\Phi_1 = f$ , somit  $\Phi$  Homotopie zwischen der konstanten Abbildung  $F(0) : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto F(0)$  und  $f$ .

$\Leftarrow$ : Sei  $f \simeq 0$ , d.h. es gibt  $\Phi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  mit  $\Phi_0 = f$  und  $\Phi_1 = y_0$  konstant. Definiere

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{n+1} & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & \begin{cases} y_0 & x = 0 \\ \Phi\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) & x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Dann ist  $F$  stetig und für  $x \in \mathbb{S}^n$  ist  $F(x) = \Phi(x, 0) = \Phi_0(x) = f(x)$ , d.h.  $F|_{\mathbb{S}^n} = f$ .

### 9.3 Verknüpfung und Homotopie von Wegen

#### DEFINITION 9.27

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $x_0, x_1 \in X$  und  $\tau$  ein Weg zwischen  $x_0, x_1$ , d.h.  $x_0 \sim x_1$  via  $\tau$ .

$x_0 = \tau(0)$  heißt der *Anfangspunkt* und  $x_1 = \tau(1)$  der *Endpunkt* von  $\tau$ .

Bei  $\tau(0) = \tau(1)$  heißt der Weg  $\tau$  *geschlossen (Schleife)*.  $\tau(0)$  heißt dann *Aufpunkt (Basispunkt)*.

Weiter bezeichnen wir den Weg  $\bar{\tau} : \mathbb{I} \rightarrow X$ ,  $\bar{\tau}(t) := \tau(1-t)$  in  $X$  als den zu  $\tau$  *inversen Weg*.

Für  $x_0 \in X$  haben wir den *konstanten Weg*  $e_{x_0} : \mathbb{I} \rightarrow X$ ,  $e_{x_0}(t) := x_0$ .

Sind  $\sigma, \tau : \mathbb{I} \rightarrow X$  zwei Wege in  $X$  mit  $\sigma(1) = \tau(0)$ , so bezeichnen wir mit  $\sigma * \tau$  den Weg  $\mathbb{I} \rightarrow X$  mit

$$\sigma * \tau : \mathbb{I} \rightarrow X \quad t \mapsto \begin{cases} \sigma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

in  $X$  von  $\sigma(0)$  nach  $\tau(1)$ . Wir nennen diesen die *Verknüpfung* von  $\sigma$  mit  $\tau$ .

Die Verknüpfung  $\sigma * \tau$  ist *definiert* oder  $\tau$  kann *angeschlossen werden*, wenn  $\sigma(1) = \tau(0)$ .

Zwei Wege  $\sigma, \tau : \mathbb{I} \rightarrow X$  heißen *Weg-homotop*, falls sie homotop sind rel  $\{0, 1\}$ , falls also eine Homotopie  $\Phi : \mathbb{I}^2 \rightarrow X$  existiert mit  $\Phi_0 = \sigma$ ,  $\Phi_1 = \tau$  und  $\Phi_t(0) = \sigma(0) = \tau(0)$ ,  $\Phi_t(1) = \sigma(1) = \tau(1)$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ .

Man schreibt dafür  $\sigma \simeq_p \tau$ .  $[\tau]_p$  bezeichnet die Äquivalenzklasse  $\{\sigma : \mathbb{I} \rightarrow X \mid \sigma \text{ Weg mit } \sigma \simeq_p \tau\}$ .

#### BEMERKUNG 9.28

Gilt  $\sigma \simeq_p \tau$ , dann müssen  $\sigma$  und  $\tau$  natürlich den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben.

#### PROPOSITION 9.29

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $x_0, x_1 \in X$ ,  $\tau : \mathbb{I} \rightarrow X$  ein Weg in  $X$  von  $x_0$  nach  $x_1$ . Ist  $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  stetig mit  $\alpha(0) = 0$  und  $\alpha(1) = 1$ , so ist auch  $\tau \circ \alpha : \mathbb{I} \rightarrow X$  ein Weg von  $x_0$  nach  $x_1$  in  $X$ , der zu  $\tau$  weg-homotop ist.

#### BEWEIS

Klar ist  $\tau \circ \alpha$  ein Weg von  $x_0$  nach  $x_1$ . Sei  $\Phi : \mathbb{I}^2 \rightarrow X$  mit  $(s, t) \mapsto \tau(t\alpha(s) + (1-t)s)$ , also eine Homotopie zwischen  $\Phi_0 = \tau$  und  $\Phi_1 = \tau \circ \alpha$ .

#### BEMERKUNG 9.30

Ist  $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  mit  $\alpha(0) = 0$  und  $\alpha(1) = 1$  zudem stetig und streng monoton, so heißt  $\alpha$  eine *Parameter-Transformation*. Man sagt,  $\tau \circ \alpha$  geht aus  $\tau$  durch eine *Umparametrisierung* hervor.

#### PROPOSITION 9.31

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

(1) Sind  $\sigma, \tau, \sigma', \tau' : \mathbb{I} \rightarrow X$  Wege mit  $\sigma \simeq_p \sigma'$  und  $\tau \simeq_p \tau'$  und ist weiter  $\sigma * \tau$  definiert, so ist auch  $\sigma' * \tau'$  definiert und  $\sigma * \tau \simeq_p \sigma' * \tau'$ .

(2) Sind  $\rho, \sigma, \tau : \mathbb{I} \rightarrow X$  Wege und sind  $\rho * \sigma$  und  $\sigma * \tau$  jeweils definiert, so auch  $\rho * (\sigma * \tau)$  und  $(\rho * \sigma) * \tau$  und es gilt  $\rho * (\sigma * \tau) \simeq_p (\rho * \sigma) * \tau$ .

#### BEWEIS

(1) Ist  $\sigma \simeq_p \sigma'$  via  $\Phi$  und  $\tau \simeq_p \tau'$  via  $\Psi$ , dann ist  $\sigma * \tau \simeq_p \sigma' * \tau'$  via

$$\Phi * \Psi : \mathbb{I}^2 \rightarrow X \quad (s, t) \mapsto \begin{cases} \Phi(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \Psi(2s-1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

(2) Offenbar gelten  $\rho(1) = \sigma(0) = (\sigma * \tau)(0)$  und  $(\rho * \sigma)(1) = \sigma(1) = \tau(0)$ . Definiere die Transformation

$$\alpha: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t - \frac{1}{4} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ t - \frac{3}{4} & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases},$$

dann ergibt sich  $\rho * (\sigma * \tau) = ((\rho * \sigma) * \tau) \circ \alpha$ .

### BEMERKUNG 9.32

- (1) Sind  $\sigma, \tau: \mathbb{I} \rightarrow X$  Wege, für die  $\sigma * \tau$  definiert ist, so ist auch  $\bar{\tau} * \bar{\sigma}$  definiert und es gilt  $\bar{\tau} * \bar{\sigma} = \overline{\sigma * \tau}$ .
- (2) Sind  $\tau, \tau': \mathbb{I} \rightarrow X$  Wege mit  $\tau \simeq_p \tau'$ , so ist auch  $\bar{\tau} \simeq_p \bar{\tau}'$ .
- (3) Ist  $\tau: \mathbb{I} \rightarrow X$  ein Weg von  $x_0$  nach  $x_1$  in  $X$ , so sind  $e_{x_0} * \tau$  und  $\tau * e_{x_1}$  jeweils definiert und es gilt:  $e_{x_0} * \tau \simeq_p \tau \simeq_p \tau * e_{x_1}$ .
- (4) Ist  $\tau: \mathbb{I} \rightarrow X$  ein Weg in  $X$  von  $x_0$  nach  $x_1$ , so sind  $\bar{\tau} * \tau$  und  $\tau * \bar{\tau}$  definiert und es gilt  $\bar{\tau} * \tau \simeq_p e_{x_1}$  und  $\tau * \bar{\tau} \simeq_p e_{x_0}$ .

### KOROLLAR 9.33

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann induziert die Verknüpfung  $*$  von Wegen in  $X$  auf der Menge  $\mathcal{W}_X := \{[\tau]_p \mid \tau \text{ Weg in } X\}$  der Weghomotopieklassen auf  $X$  eine Operation  $\circ$  durch

$$[\sigma] \circ [\tau] := [\sigma * \tau],$$

wobei dieses „Produkt“ erklärt ist, sofern  $\sigma * \tau$  definiert ist (d.h. sofern  $\sigma(1) = \tau(0)$ ).

Die Struktur  $(\mathcal{W}_X, \circ)$  besitzt folgende Eigenschaften:

- (1)  $\circ$  ist assoziativ;
- (2) Für  $x_0 \simeq x_1$  via  $\tau$  gelten  $[e_{x_0}] \circ [\tau] = [\tau] = [\tau] \circ [e_{x_1}]$  und
- (3)  $[\tau] \circ [\bar{\tau}] = [e_{x_0}]$  sowie  $[\bar{\tau}] \circ [\tau] = [e_{x_1}]$ .

### BEMERKUNG 9.34

- (1) Die Operation  $*$  auf den Wegen selbst war nicht assoziativ.
- (2) Mit der induzierten Operation  $\circ$  ist die Menge der Weghomotopieklassen in  $X$  ein sog. *Gruppoid*, d.h. eine „Gruppe, ohne dass die Operation überall erklärt ist und mit vielen lokalen neutralen Elementen“.



## 10 Überlagerung

### 10.1 Lokale Homöomorphismen

#### DEFINITION 10.1

Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  wird als *lokaler Homöomorphismus* bezeichnet, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U$  in  $X$ , besitzt, für die  $f|_U : U \rightarrow Y$  eine offene Einbettung ist, d.h.  $f(U)$  offen in  $Y$  und  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  Homöomorphismus.

#### PROPOSITION 10.2

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein lokaler Homöomorphismus. Dann bilden die offenen Teilmengen  $U \subseteq X$ , für die  $f|_U$  eine offene Einbettung von  $U$  in  $Y$  ist, eine Basis von  $X$ . Insbesondere ist  $f$  offen.

#### BEWEIS

Sei  $V \subseteq X$  offen,  $x \in V$ . Da  $f$  lokaler Homöomorphismus, gibt es  $U \subseteq X$  offen derart, dass  $f(U) \subseteq Y$  offen und  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  ein Homöomorphismus ist. Dann ist auch  $f|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow f(U \cap V)$  ein Homöomorphismus,  $U \cap V$  ist offen und  $x \in U \cap V$ , d.h.  $\mathcal{B} := \{U \subseteq X \mid f|_U : U \hookrightarrow Y, f(U) \text{ offen}\}$  bildet eine Basis von  $X$ . Damit ist  $f$  offen.

#### KOROLLAR 10.3

Seien  $f : X \rightarrow Y$  ein lokaler Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  und  $\sim$  die Äquivalenzrelation auf  $X$ , definiert durch

$$x \sim x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Dann ist die induzierte Abbildung  $\tilde{f} : X_{\sim} \rightarrow f(X)$  mit  $[x] \mapsto f(x)$  ein Homöomorphismus.

#### BEWEIS

Da  $f$  offen ist, liefert Prop. 3.31 die Behauptung.

#### PROPOSITION 10.4

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein lokaler Homöomorphismus. Genau dann ist  $X$  lokal (weg)zusammenhängend, wenn dies jeweils für den Unterraum  $f(X) \subseteq Y$  gilt.

#### BEWEIS

Ist  $X$  lokal (weg)zusammenhängend, so auch das Bild  $f(X)$  von  $X$  unter der stetigen Abbildung  $f$ .

Sei umgekehrt  $x \in X$  gegeben. Sei  $V$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$ . Nach Prop. 10.2 gibt es  $U \subseteq V$  offen derart, dass  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  ein Homöomorphismus ist und  $f(U)$  offen. Mit  $f(X)$  ist dann auch  $f(U)$  lokal (weg)zusammenhängend (Prop. 8.29), damit dann auch  $U$  selbst (denn  $U \cong f(U)$  via  $f$ ).

Also bilden die (weg)zusammenhängenden, offenen Teilmengen von  $X$  eine Basis von  $X$ .

#### DEFINITION 10.5

Sei  $p : X' \rightarrow X$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen  $X'$  und  $X$ .

Eine offene Menge  $U \subseteq X$  heißt *durch  $p$  gleichmäßig überlagert*, falls  $p^{-1}(U)$  disjunkte Vereinigung offener Mengen  $V$  ist, für die jeweils  $p|_V : V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist.

Eine stetige, surjektive Abbildung  $p : X' \rightarrow X$  wird als *Überlagerung von  $X$  durch  $X'$*  bezeichnet, falls jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U$  in  $X$  hat, die durch  $p$  gleichmäßig überlagert ist, d.h. wenn die durch  $p$  gleichmäßig überlagerten, offenen Mengen in  $X$  eine Basis von  $X$  bilden.

**BEISPIEL 10.6**

- (1) Jeder Homöomorphismus ist eine Überlagerung.
- (2) Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $D$  ein diskreter Raum. Dann ist  $X \times D \rightarrow X$  mit  $(x, d) \mapsto x$  eine Überlagerung: Für  $U \subseteq X$  offen ist  $p^{-1}(U) = \bigcup \{U \times \{d\} \mid d \in D\}$  offen.
- (3) Sei  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\}$ . Die Abbildung  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it}$  ist eine Überlagerung.
- (4) Für  $n \geq 1$  ist  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $x \mapsto x^n$  eine Überlagerung.

**PROPOSITION 10.7**

Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus, insbesondere offen.

**BEWEIS**

Sei  $p : X' \rightarrow X$  eine Überlagerung. Weiter sei  $x' \in X'$ . Dann gibt es zu  $x := p(x')$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$ , die durch  $p$  gleichmäßig überlagert ist. Dann gibt es eine offene Menge  $V \subseteq X'$  mit  $x \in V$  und  $p|_V : V \rightarrow U$  Homöomorphismus. Insbesondere ist  $V$  eine offene Umgebung von  $x'$  in  $X'$  und  $p|_V : V \rightarrow X$  ist eine offene Einbettung.

**KOROLLAR 10.8**

Ist  $p : X' \rightarrow X$  eine Überlagerung, so ist  $U \subseteq X$  genau dann offen, wenn  $p^{-1}(U) \subseteq X'$  offen ist.  $X$  trägt dann also die durch  $(X', p)$  auf  $X$  gegebene Finaltopologie.

**BEWEIS**

Mit  $U \subseteq X$  ist natürlich auch  $p^{-1}(U)$  offen in  $X'$ . Sei nun  $p^{-1}(U)$  offen. Da  $p$  insbesondere eine offene, surjektive Abbildung ist, folgt  $U = p(p^{-1}(U))$  offen.

**BEMERKUNG 10.9**

Nicht jeder surjektive, lokale Homöomorphismus ist eine Überlagerung. Zum Beispiel ist die Abbildung  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it}$  ein surjektiver, lokaler Homöomorphismus, jedoch keine Überlagerung, denn keine Umgebung der 1 in  $\mathbb{S}^1$  ist durch  $f$  gleichmäßig überlagert.

**PROPOSITION 10.10**

Ist  $p : X' \rightarrow X$  eine Überlagerung, dann ist für jeden Unterraum  $Y \subseteq X$  mit  $Y' = p^{-1}(Y)$  die Einschränkung  $p|_{Y'} : Y' \rightarrow Y$  eine Überlagerung.

**BEWEIS**

Mit  $p$  ist auch  $p|_{Y'} : Y' \rightarrow Y$  stetig und surjektiv. Sei nun  $x \in Y$  gegeben. Dann gibt es nach Vor. eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$ , die durch  $p$  gleichmäßig überlagert ist, also mit  $p^{-1}(U) = \bigcup \mathcal{V}$  für  $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$  System offener, disjunkter Teilmengen von  $X'$  und  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$  Homöomorphismus für alle  $\alpha \in I$ .

Sei  $U' = U \cap Y$  und  $V'_\alpha = V_\alpha \cap Y'$  für  $\alpha \in I$ . Dann ist  $p^{-1}(U') = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(Y) = p^{-1}(U) \cap Y' = \bigcup V_\alpha \cap Y'$  und  $U'$  ist eine offene Umgebung von  $x$  in  $Y$ . Für  $\alpha \in I$  ist mit  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow X$  auch  $p|_{V'_\alpha} : V'_\alpha \rightarrow Y$  eine offene Einbettung. Damit ist  $U'$  gleichmäßig durch  $p|_{Y'}$  überlagerte Umgebung von  $x$  in  $Y$ .

**SATZ 10.11**

Seien  $X$  ein lokal zusammenhängender, topologischer Raum und  $p : X' \rightarrow X$  stetig und surjektiv.

Genau dann ist  $p$  eine Überlagerung von  $X$ , wenn für jede Zusammenhangskomponente  $V$  in  $X$  mit  $V' = p^{-1}(V)$  die Einschränkung  $p|_{V'} : V' \rightarrow V$  eine Überlagerung von  $V$  ist.

**BEWEIS**

$\Rightarrow$ : Ist  $p$  eine Überlagerung, so ist nach Prop. 10.10 auch  $p|_{V'} : V' \rightarrow V$  eine Überlagerung.

$\Leftarrow$ : Sei  $p|_{V'} : V' \rightarrow V$  eine Überlagerung für jede Zusammenhangskomponente  $V$  in  $X$  und  $V' = p^{-1}(V)$ . Seien  $x \in X$  gegeben und  $V$  die Zusammenhangskomponente von  $x$  in  $X$ . Da  $X$  lokal zusammenhängend ist, ist  $V$  offen in  $X$ . Nach Vor. gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  in  $V$ , die durch  $p|_{V'} : V' \rightarrow V$  gleichmäßig überlagert ist. Dann ist  $U$  auch eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$  und  $p^{-1}(U)$  offen in  $X$ . Somit ist  $U$  durch  $p$  gleichmäßig überlagert (mit  $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ ,  $V_\alpha$  offen in  $V'$  und damit in  $X'$ ,  $p|_{V_\alpha} = (p|_{V'})|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow V$  offene Einbettung, ist auch  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow X$  eine offene Einbettung). Also ist  $p$  eine Überlagerung.

**LEMMA 10.12**

Sei  $p : X' \rightarrow X$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen,  $U \subseteq X$  offen, zusammenhängend und gleichmäßig überlagert von  $p$ .

Dann ist für jede Zusammenhangskomponente  $V$  von  $p^{-1}(U)$  die Einschränkung  $p|_V : V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus.

**BEWEIS**

Nach Vor. ist  $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$  für eine Familie  $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$  offener, paarweise disjunkter Teilmengen von  $X'$ , wobei  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$  für jedes  $\alpha \in I$  ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist mit  $U$  auch jedes  $V_\alpha$  zusammenhängend. Also ist  $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$  die Zerlegung des Raumes  $p^{-1}(U)$  in seine Zusammenhangskomponenten.

**KOROLLAR 10.13**

Seien  $X$  ein lokal zusammenhängender Raum,  $p_1 : X'_1 \rightarrow X$  und  $p_2 : X'_2 \rightarrow X$  zwei Überlagerungen von  $X$ .

Dann ist jedes stetige, surjektive  $p : X'_1 \rightarrow X'_2$  mit  $p_2 = p_1 \circ p$  eine Überlagerung von  $X'_2$ .

**BEWEIS**

Sei  $p : X'_1 \rightarrow X'_2$  stetig und surjektiv mit  $p_2 = p_1 \circ p$  und sei  $x' \in X'_2$  gegeben. Dann gibt es eine offene, zusammenhängende Umgebung  $U$  von  $p_2(x')$  in  $X$ , die sowohl durch  $p_1 = p_2 \circ p$  als auch durch  $p_2$  gleichmäßig überlagert wird. Sei  $U'$  die Zusammenhangskomponente von  $x'$  in  $p_2^{-1}(U)$ . Da  $p_2 : X'_2 \rightarrow X$  insbesondere ein lokaler Homöomorphismus ist, ist nach Prop. 10.4 mit  $X$  auch  $X'_2$  lokal zusammenhängend. Also ist  $U'$  offen in  $X'_2$ . Nach Lemma 10.12 ist  $p_2|_{U'} : U' \rightarrow U$  ein Homöomorphismus; mit  $p_1 = p_2 \circ p$  folgt dann, dass  $U'$  auch durch  $p$  gleichmäßig überlagert wird.

**SATZ 10.14**

Sei  $p : X' \rightarrow X$  Überlagerung eines lokal zusammenhängenden Raumes  $X$  und  $Z'$  eine Zusammenhangskomponente von  $X'$ .

Dann ist  $p(Z')$  eine Zusammenhangskomponente von  $X$  und  $p|_{Z'} : Z' \rightarrow p(Z')$  eine Überlagerung.

**BEWEIS**

Setze  $Z := p(Z')$ . Da  $p$  stetig, ist mit  $Z'$  auch  $Z$  zusammenhängend. Sei nun  $U \subseteq X$  offen, zusammenhängend und von  $p$  gleichmäßig überlagert. Dann gilt  $U \cap Z = \emptyset$  oder  $U \subseteq Z$ , denn angenommen,  $U \cap Z \neq \emptyset$ , dann sei  $z' \in Z'$  mit  $p(z') \in U$ . Sei  $U'$  die Zusammenhangskomponente von  $p^{-1}(U)$  mit  $z' \in U'$ . Da  $Z'$  eine Zusammenhangskomponente von  $X'$  ist und  $U'$  zusammenhängend mit  $U' \cap Z' \neq \emptyset$ , gilt dann  $U' \subseteq Z'$ , nach Lemma 10.12 also  $U = p(U') \subseteq p(Z') = Z$ .

Da  $p$  Überlagerung und  $X$  lokal zusammenhängend, bilden die zusammenhängenden, offenen, durch  $p$  gleichmäßig überlagerten Teilmengen von  $X$  eine Basis von  $X$ . Nach eben Gezeigtem ist also jeder Berührungspunkt von  $Z$  ein innerer Punkt von  $Z$ , d.h.  $Z$  die offen und abgeschlossen. Da  $Z$  außerdem zusammenhängend, muss  $Z$  dann eine Zusammenhangskomponente von  $X$  sein.

$X$  ist lokal zusammenhängend, also  $Z$  offen in  $X$  und damit sind die offenen Teilmengen von  $Z$  auch offen in  $X$ . Sei nun  $U \subseteq Z$  offen, zusammenhängend und durch  $p : X' \rightarrow X$  gleichmäßig überlagert. Sei  $U'$  eine Zusammenhangskomponente von  $p^{-1}(U)$ . Da  $p$  lokaler Homöomorphismus, ist mit  $X$  auch  $X'$  lokal zusammenhängend, d.h.  $U'$  ist offen in  $p^{-1}(U)$  und damit auch in  $X'$ . Weiter ist  $p|_{U'} : U' \rightarrow U$  nach Lemma 10.12 ein Homöomorphismus und es gilt  $U' \cap Z' = \emptyset$  oder  $U' \subseteq Z'$ . Folglich ist  $Z' \cap p^{-1}(U) = (p|_{Z'})^{-1}(U)$  gleich der Vereinigung derjenigen Zusammenhangskomponenten  $U'$  von  $p^{-1}(U)$  mit  $U' \subseteq Z'$ . Jedes solche  $U'$  ist offen in  $p^{-1}(U)$  und  $p|_{U'} : U' \rightarrow U$  auch  $U' \subseteq Z'$  liefert jeweils den Homöomorphismus  $p|_{U'} : U' \rightarrow U$ , d.h.  $U$  ist auch durch  $p|_{Z'} : Z' \rightarrow Z$  gleichmäßig überlagert, d.h.  $p|_{Z'}$  eine Überlagerung.

**BEMERKUNG 10.15**

Sind  $X$  ein lokal zusammenhängender Raum und  $p : X' \rightarrow X$  stetig und surjektiv derart, dass für jede Zusammenhangskomponente  $Z'$  von  $X'$  das Bild  $p(Z')$  eine Zusammenhangskomponente von  $X$  ist und  $p|_{Z'} : Z' \rightarrow p(Z')$  eine Überlagerung, so muss  $p$  keine Überlagerung von  $X$  sein.

Die Umkehrung in Satz 10.14 ist also im Allgemeinen falsch.

**KOROLLAR 10.16**

Seien  $X$  lokal wegzusammenhängend und  $p : X' \rightarrow X$  stetig. Dann gelten:

- (1)  $p$  Überlagerung  $\Leftrightarrow p|_{p^{-1}(W)} : p^{-1}(W) \rightarrow W$  ist eine Überlagerung für alle Wegkomponenten  $W$  von  $X$ .
- (2) In dem Fall ist für jede Wegkomponente  $W'$  von  $X'$  das Bild  $p(W')$  eine Wegkomponente von  $X$  und  $p|_{W'} : W' \rightarrow p(W')$  eine Überlagerung.

Da  $X$  lokal zusammenhängend, stimmen in  $X$  die Zusammenhangskomponenten mit den Wegzusammenhangskomponenten überein und sind offen in  $X$ . Zudem ist  $X$  lokal zusammenhängend, nach Prop. 10.11 folgt also (1).

Sei nun  $p : X' \rightarrow X$  eine Überlagerung, dann ist auch  $X'$  lokal wegzusammenhängend. Sei  $W'$  eine Wegkomponente von  $X'$ , dann ist  $W'$  bereits eine Zusammenhangskomponente von  $X'$  und da  $X$  lokal zusammenhängend, folgt mit Satz 10.14, dass  $W = p(W')$  eine Wegkomponente von  $X$  ist und  $p|_{W'} : W' \rightarrow W$  eine Überlagerung.

## 10.2 Hebung von Wegen und Homotopien

**DEFINITION 10.17**

Sei  $p : E \rightarrow X$  eine stetige Abbildung und sei  $f : Z \rightarrow X$  stetig. Eine Abbildung  $\tilde{f} : Z \rightarrow E$  mit  $f = p \circ \tilde{f}$  wird als **Hebung** von  $f$  bzgl. (über)  $p$  bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \nearrow & \downarrow p \\ \tilde{f}^{(?) & & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

**SATZ 10.18**

Sei  $p : X' \rightarrow X$  eine Überlagerung. Seien  $f, g : Z \rightarrow X'$  stetige Abbildungen auf einem zusammenhängenden Raum  $Z$  mit  $p \circ f = p \circ g$ . Gibt es ein  $z_0 \in Z$  mit  $f(z_0) = g(z_0)$ , so gilt  $f = g$ .

**BEWEIS**

Sei  $Z' = \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$ . Wegen  $f(z_0) = g(z_0)$  ist  $Z'$  nicht leer. Zu zeigen:  $Z = Z'$ . Da  $Z$  zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen:  $Z'$  ist offen und abgeschlossen in  $Z$ .

Wegen  $Z' = (f, g)^{-1}(\Delta)$  mit  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X'\} \subseteq X' \times X'$ ; ist  $X'$  Hausdorffsch, so ist  $\Delta$  und damit auch  $Z'$  abgeschlossen.

Allgemein: Sei  $z \in Z \setminus Z'$ . Sei  $x = p(f(z)) = p(g(z))$  in  $X$ . Dann gibt es  $U \subseteq X$  offene Umgebung von  $x$  in  $X$ , die durch  $p$  gleichmäßig überlagert ist. Da  $f(z) \neq g(z)$  in  $X'$ , gibt es also zwei Schichten  $V, W$  von  $p^{-1}(U)$ , offen in  $X'$ , mit  $f(z) \in V$ ,  $g(z) \in W$  und  $p|_V : V \rightarrow U$ ,  $p|_W : W \rightarrow U$  Homöomorphismen. Wegen  $p(f(z)) = x = p(g(z))$  und  $f(z) \neq g(z)$  müssen  $V$  und  $W$  verschieden sein, also  $V \cap W = \emptyset$ , d.h.  $V, W$  disjunkt. Dann ist  $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$  eine offene Umgebung von  $z$  in  $Z$  und  $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V) \subseteq Z \setminus Z'$ , denn für  $z' \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$  ist  $f(z') \in V, g(z') \in W$  und wegen  $V \cap W = \emptyset$  folgt  $f(z') \neq g(z')$ . Daher ist  $z'$  ein innerer Punkt von  $Z \setminus Z'$ , also  $Z \setminus Z'$  offen in  $Z$  und damit  $Z'$  abgeschlossen in  $Z$ .

Außerdem ist  $Z'$  offen in  $Z$ , denn sei  $U \subseteq X$  eine offene Umgebung von  $x = p(f(z)) = p(g(z))$ , die durch  $p$  gleichmäßig überlagert ist. Dann gibt es genau ein  $V \subseteq X'$  offen mit  $f(z) \in V$  und  $p|_V : V \rightarrow U$  Homöomorphismus. Sei  $W = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ , dann ist  $W$  offene Umgebung von  $z$  in  $Z$  und sogar  $W \subseteq Z'$ , denn für  $z' \in W$  liegen  $f(z'), g(z')$  in  $V$  und  $p(f(z')) = p(g(z'))$ . Da  $p|_V$  ein Homöomorphismus, also insbesondere bijektiv, folgt  $f(z') = g(z')$ , d.h.  $z \in Z'$ . Dann ist  $Z'$  offen in  $Z$ .

**LEMMA 10.19**

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $p : X' \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $F : Y \times \mathbb{I} \rightarrow X$  stetig. Weiter sei  $y \in Y$ . Dann gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$ , offene, durch  $p$  gleichmäßig überlagerte Mengen  $V_1, \dots, V_m \subseteq X$ , eine offene Umgebung  $U$  von  $y$  in  $Y$  sowie reelle Zahlen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  derart, dass  $F(U \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq V_j$  ist für  $j = 1, \dots, m$ .

**BEWEIS**

Sei  $\mathcal{V}$  die Basis von  $X$ , die aus den offenen, gleichmäßig durch  $p$  überlagerten Teilmengen von  $X$  besteht. Insbesondere ist  $X = \bigcup \mathcal{V}$ . Die Menge  $\{y\} \times \mathbb{I}$  wird überdeckt durch die Produkte  $U \times J$ , wobei  $U$  offene Umgebung von  $y$  in  $Y$  und  $J$  eine konvexe, offene Teilmenge von  $\mathbb{I}$  ist und  $F(J \times U) \subseteq V$  für ein  $V \in \mathcal{V}$ . Zu  $t \in \mathbb{I}$  sind nämlich diese  $U \times J$  mit  $t \in J$  eine offene Umgebungsbasis von  $(y, t)$  in  $Y \times \mathbb{I}$ . Da  $\{y\} \times \mathbb{I}$  kompakt ist, gibt es sogar ein  $m \in \mathbb{N}$ , offene Mengen  $U_1, \dots, U_m \subseteq Y$  mit  $y \in U_i$  und offene, konvexe Teilmengen  $J_1, \dots, J_m$  mit  $\bigcup_{i=1}^m U_i \times J_i \supseteq \{y\} \times \mathbb{I}$  und jeweils  $F(U_i \times J_i) \subseteq V \in \mathcal{V}$  für jedes  $i \leq m$ , indem  $U_1, \dots, U_m$  durch  $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$  ersetzt werden. Sei nun  $m$  dazu minimal gewählt. Dann ist  $J_i \not\subseteq J_j$  für  $i \neq j$  und durch Umordnung können wir erreichen, dass jeweils  $\sup J_{i+1} \geq \sup J_i$ . Wegen der Konvexität und  $J_{i-1} \not\subseteq J_i$  folgt dann auch  $\inf J_{i-1} \leq \inf J_i$  und wegen  $\mathbb{I} = \bigcup_{i=1}^m J_i$  folgt für  $1 \leq i \leq m-1$  weiter:  $\sup J_{i-1} < \inf J_i$ , so dass wir  $t_i$  aus  $J_{i-1} \cap J_i$  wählen können. Sei weiter  $t_0 = 0$  und  $t_m = 1$ , dann gilt für  $1 \leq i \leq m$ , dass  $[t_{i-1}, t_i] \subseteq J_i$  und damit  $F(U \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq V$  für ein  $V \in \mathcal{V}$ .

**SATZ 10.20**

Seien  $X, \tilde{X}, Y$  topologische Räume,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  und  $F : Y \times \mathbb{I} \rightarrow X$  stetig mit  $F(y, 0) = (p \circ \tilde{f})(y)$  für alle  $y \in Y$ . Dann gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{F} : Y \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{F} = F$  und  $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$  für alle  $y \in Y$ .

**BEWEIS**

Wir suchen zu jedem Punkt  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $N_y$  von  $y$  in  $Y$  und dazu eine lokale Lösung  $\tilde{F}_y : N_y \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  des Problems, d.h. mit  $p \circ \tilde{F}_y = F|_{N_y \times \mathbb{I}}$  und  $\tilde{F}_y(y', 0) = \tilde{f}(y')$  für alle  $y' \in N_y$ .

$$\begin{array}{ccc} y & Y & \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X} \\ \downarrow & \downarrow & \nearrow \tilde{F}^{(?) \\ (y, 0) & Y \times \mathbb{I} & \xrightarrow{F} X \end{array}$$

Wir überlegen zunächst, dass dann  $\tilde{F} : Y \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $(y, t) \mapsto \tilde{F}_y(y, t)$  eine Lösung des globalen Problems ist. In der Tat ist  $\tilde{F}$  eine Abbildung und es gilt  $p \circ \tilde{F} = F$  und  $\tilde{F}_y(y, 0) = \tilde{f}(y)$  für alle  $y \in Y$ . Also bleibt nur die Stetigkeit von  $\tilde{F}$  zu zeigen.

Sind  $y_1, y_2 \in Y$  und  $y \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$ , so ist  $(p \circ \tilde{F}_{y_1})|_{\{y\} \times \mathbb{I}} = F|_{\{y\} \times \mathbb{I}} = (p \circ \tilde{F}_{y_2})|_{\{y\} \times \mathbb{I}}$ ; da  $\{y\} \times \mathbb{I}$  zusammenhängend ist, folgt mit Satz 10.18:  $\tilde{F}_{y_1}|_{\{y\} \times \mathbb{I}} = \tilde{F}_{y_2}|_{\{y\} \times \mathbb{I}}$ , denn  $\tilde{F}_{y_1}(y, 0) = \tilde{f}(y) = \tilde{F}_{y_2}(y, 0)$ . Insbesondere  $\tilde{F}_{N_y \times \mathbb{I}} = \tilde{F}_y$ , denn es gilt:  $y' \in N_y \Rightarrow y' \in N_{y'} \cap N_y \Rightarrow \tilde{F}(y', t) = \tilde{F}_{y'}(y', t) = \tilde{F}_y(y', t)$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ . Damit ist  $\tilde{F}$  stetig.

Es bleibt also, zu jedem  $y \in Y$  eine lokale Definition  $\tilde{F}_y : N_y \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  wie angegeben und dazu eine offene Umgebung  $N_y$  zu finden. Zu gegebenem  $y \in Y$  wählen wir eine offene Umgebung  $N_y$  von  $y$  in  $Y$  derart, dass es  $m \in \mathbb{N}$  und reelle Zahlen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  gibt und dazu offene, durch  $p$  gleichmäßig überlagerte Teilmengen  $V_1, \dots, V_m$  von  $X$  mit  $F(N_y \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  (geht nach Lemma 10.19).

Da wir nur eine Lösung auf  $N_y$  suchen, sei o.B.d.A.  $N_y = Y$ . Wir definieren nun  $\tilde{F} := \tilde{F}_y : Y \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  stückweise, indem wir  $\tilde{F}^{(0)} : Y \times \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ ,  $(y, 0) \mapsto \tilde{f}(y)$  setzen und dann rekursiv für  $1 \leq i \leq m$  jeweils  $\tilde{F}^{(i)} : Y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \tilde{X}$  sp wählen, dass  $\tilde{F}^{(i)}$  stetig ist,  $\tilde{F}|_{Y \times \{t_{i-1}\}} = \tilde{F}^{(i-1)}$  und  $p \circ \tilde{F}^{(i)} = F|_{Y \times [t_{i-1}, t_i]}$ .

Seien  $i > 0$  und  $\tilde{F}^{(i-1)}$  bereits gewählt. Wir haben  $F(Y \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i$  und  $V_i$  offen, gleichmäßig überlagert durch  $p$ , also  $p^{-1}(V_i) = \bigcup \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  mit offenen, paarweise disjunkten Mengen  $U_\alpha$  von  $\tilde{X}$ , so dass  $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V_i$  ein Homöomorphismus ist. Zu  $\alpha \in A$  sei  $Y_\alpha := \{y \in Y \mid \tilde{F}^{(i-1)}(y, t_{i-1}) \in U_\alpha\}$ , offen in  $Y$ . Wir wählen  $\tilde{F}^{(i)}(y, t) := p|_{U_\alpha}^{-1}(F(y, t))$  für  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  und  $y \in \alpha$ . Das liefert eine stetige Funktion  $\tilde{F}^{(i)} : Y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{F}^{(i)} = F|_{Y \times [t_{i-1}, t_i]}$  und für  $y \in Y$ ,  $\alpha \in A$  mit  $y \in Y_\alpha$  folgt dann  $\tilde{F}^{(i-1)}(y, t_{i-1}) = p|_{U_\alpha}^{-1}(F(y, t_{i-1}))$ , denn  $p \circ \tilde{F}^{(i-1)} = F|_{Y \times [t_{i-2}, t_{i-1}]}$ .

Dies wiederum ist  $\tilde{F}^{(i)}(y, t_{i-1})$ , also insgesamt  $\tilde{F}|_{Y \times \{t_{i-1}\}} = \tilde{F}^{(i-1)}$ .

**KOROLLAR 10.21**

Seien  $\tilde{X}, X$  topologische Räume,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $e \in \tilde{X}$  und  $\tau : \mathbb{I} \rightarrow X$  ein Weg mit Anfangspunkt  $p(e)$ . Dann gibt es genau einen Weg  $\tilde{\tau} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $e$  derart, dass  $p \circ \tilde{\tau} = \tau$  ist, d.h. eine eindeutige Hebung von Wegen bzgl. Überlagerungen.

**BEWEIS**

Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 10.18, da  $\mathbb{I}$  zusammenhängend ist. Sei nun  $Y = \{y_0\}$  einpunktiger Raum, dazu  $F : Y \times \mathbb{I} \rightarrow X$ ,  $(y_0, t) \mapsto \tau(t)$  (stetig) und  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ ,  $y_0 \mapsto e$ . Nach Satz 10.20 gibt es  $\tilde{F} : Y \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{F} = F$  und  $\tilde{F}(y_0, 0) = \tilde{f}(y_0) = e$ . Dann ist  $\tilde{\tau} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$ ,  $t \mapsto \tilde{F}(y_0, t)$  ein Weg in  $\tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{\tau}(0) = \tilde{F}(y_0, 0) = e$  und  $p \circ \tilde{\tau} = \tau$ .

**LEMMA 10.22**

Seien  $X, \tilde{X}, Z$  topologische Räume,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $\tilde{f}, \tilde{g} : Z \rightarrow \tilde{X}$  stetig mit  $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$  und  $\tilde{F} : Z \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  eine Homotopie zwischen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$ . Ist  $A \subseteq Z$  derart, dass  $p \circ \tilde{F}$  eine Homotopie rel  $A$  zwischen  $p \circ \tilde{f}$  und  $p \circ \tilde{g}$ , so ist auch  $\tilde{F}$  eine Homotopie rel  $A$  zwischen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$ .

**BEWEIS**

Sei  $a \in A$ . Dann ist  $\tilde{\sigma} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$ ,  $t \mapsto \tilde{F}(a, t)$  ein Weg zwischen  $\tilde{f}(a)$  nach  $\tilde{g}(a)$  in  $\tilde{X}$  und  $p \circ \tilde{\sigma}$  ist der konstante Weg  $t \mapsto p(\tilde{f}(a))$  in  $X$ , da  $p \circ \tilde{F}$  eine Homotopie rel  $A$  ist. Ebenso ist  $\hat{\sigma} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$ ,  $t \mapsto \tilde{f}(a)$  ein (konstanter) Weg in  $\tilde{X}$  mit  $\hat{\sigma} \circ p = \tilde{\sigma} \circ p$  und  $\hat{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}(0)$ . Satz 10.18 liefert, da  $\mathbb{I}$  zusammenhängend ist, dass dann  $\tilde{\sigma} = \hat{\sigma}$ , also  $\tilde{\sigma}$  konstant, also  $\tilde{F}(a, t) = \tilde{\sigma}(a) = \tilde{f}(a)$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ , somit  $\tilde{F}$  Homotopie rel  $A$ .

**SATZ 10.23**

Seien  $X, \tilde{X}, Z$  topologische Räume,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $A \subseteq Z$  und  $f, g : Z \rightarrow X$  stetige Abbildungen mit  $f \simeq g$  rel  $A$ . Zu jeder Hebung  $\tilde{f} : Z \rightarrow \tilde{X}$  von  $f$  bzgl.  $p$  (d.h.  $\tilde{f}$  stetig und  $p \circ \tilde{f} = f$ ) gibt es eine Hebung  $\tilde{g} : Z \rightarrow \tilde{X}$  von  $g$  bzgl.  $p$  mit  $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$  rel  $A$ .

**BEWEIS**

Sei  $F : Z \times \mathbb{I} \rightarrow X$  eine Homotopie rel  $A$  zwischen  $f$  und  $g$ . Weiter sei  $\tilde{f} : Z \rightarrow \tilde{X}$  eine Hebung von  $f$  bzgl.  $p$ . Nach Satz 10.20 gibt es  $\tilde{F} : Z \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  stetig mit  $p \circ \tilde{F} = F$  und  $\tilde{F}(z, 0) = \tilde{f}(z)$  für alle  $z \in Z$ . Sei  $\tilde{g} : Z \rightarrow \tilde{X}$ ,  $z \mapsto \tilde{F}(z, 1)$ . Dann ist  $\tilde{F}$  eine Homotopie zwischen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  mit  $p \circ \tilde{g} = F(\cdot, 1) = g$ . Da  $p \circ \tilde{F} = F$  Homotopie rel  $A$  ist, ist auch  $\tilde{F}$  selbst Homotopie rel  $A$  nach Lemma 10.22.

**KOROLLAR 10.24**

Seien  $X, \tilde{X}$  topologische Räume,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Sind  $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  Wege in  $\tilde{X}$  mit gemeinsamem Anfangs- oder Endpunkt und sind die Wege  $p \circ \tilde{\sigma}$  und  $p \circ \tilde{\tau}$  in  $X$  als Wege homotop, dann sind auch  $\tilde{\sigma}$  und  $\tilde{\tau}$  als Wege homotop; insbesondere stimmen Anfangs- und Endpunkt von  $\tilde{\sigma}$  und  $\tilde{\tau}$  überein.

**BEWEIS**

Nach Satz 10.23 gibt es eine Hebung  $\tilde{\rho} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$  von  $p \circ \tilde{\tau}$ , die zu  $\tilde{\sigma}$  weghomotop ist. Dann hat  $\tilde{\rho}$  den selben Anfangs- bzw. Endpunkt wie  $\tilde{\sigma}$  und wegen  $p \circ \tilde{\tau} = p \circ \tilde{\rho}$  folgt, dass  $\tilde{\rho} = \tilde{\tau}$ .

# 11 Die Fundamentalgruppe

## 11.1 Schleifen

### DEFINITION 11.1

Sei  $x_0 \in X$ . Die Weghomotopieklassen von Schleifen mit Basispunkt  $x_0$  in  $X$  bilden eine Gruppe  $\pi_1(X, x_0)$  bzgl. der Operation  $\circ$ , die durch  $*$  induziert wird (d.h.  $[\sigma] \circ [\tau] := [\sigma * \tau]$ ) mit neutralem Element  $1 = [e_{x_0}]$  des konstanten Weges  $e_{x_0} : t \mapsto x_0$ , die *erste Fundamentalgruppe* von  $X$ .

### PROPOSITION 11.2

Seien  $x_0, x_1 \in X$  und sei ein Weg  $\tau : \mathbb{I} \rightarrow X$  von  $x_0$  nach  $x_1$  gegeben; dazu sei  $\bar{\tau}$  der inverse Weg. Dann wird durch  $[\sigma] \mapsto [\bar{\tau} * \sigma * \tau]$  ein Gruppenisomorphismus  $\hat{\tau}$  von  $\pi_1(X, x_0)$  nach  $\pi_1(X, x_1)$  definiert.

### BEWEIS

Sind  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_{x_0}$ , der Menge der Schleifen in  $X$  an  $x_0$ , mit  $\sigma_1 \simeq_p \sigma_2$ , so sind  $\bar{\tau} * \sigma_1 * \tau \simeq_p \bar{\tau} * \sigma_2 * \tau$ . Damit ist  $\hat{\tau}$  wohldefiniert. Bei  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_{x_0}$  beliebig gilt  $\bar{\tau} * \sigma_1 * \sigma_2 * \tau \simeq_p \bar{\tau} * \sigma_1 * \tau * \bar{\tau} * \sigma_2 * \tau$ , somit  $\hat{\tau}([\sigma_1] \circ [\sigma_2]) = \hat{\tau}([\sigma_1 * \sigma_2]) = \hat{\tau}([\sigma_1]) \hat{\tau}([\sigma_2])$ . Somit ist  $\hat{\tau}$  ein Gruppenhomomorphismus. Mit  $\rho := \bar{\tau}$  erhalten wir entsprechend einen Homomorphismus  $\hat{\rho} : [\gamma] \mapsto [\bar{\rho} * \gamma * \rho] = [\tau * \gamma * \bar{\tau}]$ , der offenbar zu  $\hat{\tau}$  invers ist.

### KOROLLAR 11.3

Ist  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum, so sind die Fundamentalgruppen  $\pi_1(X, x)$  für beliebiges  $x \in X$  alle paarweise isomorph zueinander.

### BEMERKUNG 11.4

Es gibt i.A. keinen kanonischen Isomorphismus  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ .

Sind  $\sigma, \rho$  zwei Schleifen in  $X$  an  $x_0$  mit  $\sigma * \rho \not\underset{p}{\simeq} \rho * \sigma$  und sind  $\tau_1, \tau_2$  zwei Wege von  $x_0$  nach  $x_1$  in  $X$  mit  $\tau_2 = \rho * \tau_1$ , so folgt  $\bar{\tau}_2 * \sigma * \tau_2 \simeq_p \bar{\tau}_1 * \bar{\rho} * \sigma * \rho * \tau_1 \not\underset{p}{\simeq} \bar{\tau}_1 * \sigma * \tau_1$ , somit  $\hat{\tau}_2([\sigma]) \neq \hat{\tau}_1([\sigma])$ .

Genau dann ist  $\hat{\tau}$  unabhängig von der Wahl des Weges  $\tau$  von  $x_0$  nach  $x_1$ , wenn  $\pi_1(X, x_0)$  abelsch ist.

### PROPOSITION 11.5

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 := f(x_0) \in Y$ . Dann ist

$$f_* = \pi_1(f, x_0) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), [\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$$

ein Gruppenhomomorphismus, der durch  $f$  *induzierte Homomorphismus* .

### BEWEIS

Für Schleifen  $\sigma_1, \sigma_2$  in  $X$  an  $x_0$  und  $f \circ \sigma_1, f \circ \sigma_2$  Schleifen in  $Y$  an  $y_0 = f(x_0)$  und es gelten  $\sigma_1 \simeq_p \sigma_2$ , d.h.  $f \circ \sigma_1 \simeq_p f \circ \sigma_2$  sowie  $f \circ (\sigma_1 * \sigma_2) = (f \circ \sigma_1) * (f \circ \sigma_2)$ .

### PROPOSITION 11.6

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetig,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 = f(x_0) \in Y$  und  $z_0 = g(y_0) \in Z$ . Dann gilt  $\pi_1(g \circ f, x_0) = \pi_1(g, y_0) \circ \pi_1(f, x_0)$ , d.h. es kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, y_0) & \\ f_* \nearrow & & \searrow g_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & \pi_1(Z, z_0) \end{array} .$$



**BEWEIS**

Sei  $\sigma$  eine Schleife in  $X$  an  $x_0$ . Dann ist

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_*([f \circ \sigma]) = g_*(f_*([\sigma])) = (g_* \circ f_*)([\sigma]).$$

**SATZ 11.7**

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f \simeq g$ ,  $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ ,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 = f(x_0) \in Y$ ,  $y_1 = g(x_0) \in Y$  und  $\tau : \mathbb{I} \rightarrow Y$ ,  $t \mapsto \Phi(x_0, t)$ , der durch  $x_0$  und  $\Phi$  gegebene Weg von  $y_0$  nach  $y_1$ . Dann ist  $\pi_1(g, x_0) = \hat{\tau} \circ \pi_1(f, x_0)$ , d.h. es kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ f_* \swarrow & & \searrow g_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \pi_1(Y, y_1) \end{array} .$$

**BEWEIS**

Sei  $\sigma$  eine Schleife in  $X$  an  $x_0$ . Weiter sei  $\Psi : \mathbb{I}^2 \rightarrow Y$  definiert durch

$$\Psi(s, t) = \begin{cases} \tau(3st), & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \Phi(\sigma(3s-1), t), & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \tau(3t(1-s)), & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Wegen  $\tau(t) = \Phi(x_0, t)$  und  $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$  ist  $\Psi$  bei  $s = \frac{1}{3}$  und  $s = \frac{2}{3}$  eindeutig definiert. Damit ist  $\Psi$  stetig. Es gilt weiter

$$\Psi_0(s) = \begin{cases} \tau(0) = f(x_0), & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \Phi_0(\sigma(3s-1)) = (f \circ \sigma)(3s-1), & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \tau(0) = f(x_0), & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases} ,$$

somit ist  $\Psi_0$  eine Schleife am  $f(x_0)$  in  $Y$  mit  $\Psi_0 \simeq_p e_{f(x_0)} * (f \circ \sigma) * e_{f(x_0)} \simeq_p f \circ \sigma$ . Ebenso ist

$$\Psi_1(s) = \begin{cases} \tau(3s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \Phi_1(\sigma(3s-1)), & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \tau(3(1-s)), & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases} ,$$

somit  $\Psi_1$  Schleife an  $\tau(0) = f(x_0)$  in  $Y$  mit  $\Psi_1 \simeq_p \tau * \Phi_1 \circ \sigma * \bar{\tau} = \tau * g \circ \sigma * \bar{\tau}$ . Weiter gilt  $\Psi_t(0) = \tau(0) = g(x_0)$  und  $\Psi_t(1) = \tau(1) = g(x_0)$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ . Damit ist  $\Psi$  eine Weghomotopie zwischen  $\Psi_0$  und  $\Psi_1$ , insgesamt also  $f \circ \sigma \simeq_p \tau * g * \bar{\tau}$ , also  $g \circ \sigma \simeq_p \bar{\tau} * (f \circ \sigma) * \tau$ , d.h.  $(\hat{\tau} \circ f_*)([\sigma]) = [g \circ \sigma] = g_*([\sigma])$ .

**KOROLLAR 11.8**

Seien  $f : X \rightarrow X$  stetig,  $f \simeq \text{id}_X$ ,  $x_0 \in X$ ,  $\tau : \mathbb{I} \rightarrow X$  der Weg von  $x_0$  nach  $f(x_0)$ , der durch  $\tau(t) := \Phi(x_0, t)$  für eine Homotopie  $\Phi$  zwischen  $\text{id}_X$  und  $f$  gegeben ist.

Dann ist  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0))$  identisch mit  $\hat{\tau}$ , insbesondere ein Isomorphismus.

**BEWEIS**

Nach Satz 11.7 folgt  $\pi_1(f, x_0) = \hat{\tau} \circ \pi_1(\text{id}_X, x_0) = \hat{\tau} \circ \text{id}_{\pi_1(X, x_0)} = \hat{\tau}$ .

**KOROLLAR 11.9**

Seien  $X, Y$  zwei wegzusammenhängende topologische Räume vom selben Homotopietyp. Dann ist für  $x \in X$ ,  $y \in Y$  stets  $\pi_1(X, x)$  isomorph zu  $\pi_1(Y, y)$ .

**BEWEIS**

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  stetig mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Seien  $x_0 \in X$  gegeben und dazu  $y_0 = f(x_0)$ ,  $x_1 = g(y_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ . Wegen Korollar 11.8 ist dann  $\pi_1(g \circ f, x_0) = \pi_1(g, y_0) \circ \pi_1(f, x_0)$  ein Isomorphismus und ebenso  $\pi_1(f \circ g, y_0) = \pi_1(f, x_1) \circ \pi_1(g, y_0)$  ein Isomorphismus, somit  $\pi_1(g, y_0)$  bijektiv, also Isomorphismus. Mit Korollar 11.3 folgen nun die Isomorphismen  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(Y, y)$  für beliebige  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , da  $X$  und  $Y$  wegzusammenhängend sind.

## 11.2 Einfach zusammenhängende Räume

### DEFINITION 11.10

Ein topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend*, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist und  $\pi_1(X, x) = \{1\}$  ist für ein  $x \in X$  (und damit für alle  $x \in X$ ).

### BEMERKUNG 11.11

Für einen topologischen Raum  $X$  gilt:

$X$  zusammenziehbar  $\Rightarrow X$  einfach zusammenhängend.  $\Rightarrow X$  wegzusammenhängend.  $\Rightarrow X$  zusammenhängend.

### SATZ 11.12

Jeder zusammenziehbare Raum ist einfach zusammenhängend.

### BEWEIS

$X$  zusammenhängend  $\Rightarrow X$  wegzusammenhängend und homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum  $Y = \{y_0\}$ . Mit Korollar 11.9 folgt:  $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(Y, y_0) = \{1\}$ .

### BEISPIEL 11.13

Jede konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist einfach zusammenhängend.

### PROPOSITION 11.14

Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum und  $x_0, x_1 \in X$ . Genau dann ist  $X$  einfach zusammenhängend, wenn je zwei beliebige Wege von  $x_0$  nach  $x_1$  weghomotop sind.

### BEWEIS

Seien zunächst  $\tau_1, \tau_2$  zwei Wege von  $x_0$  nach  $x_1$  und  $X$  sei einfach zusammenhängend. Dann ist  $\sigma := \tau_1 * \bar{\tau}_2$  eine Schleife an  $x_0$ , also weghomotop zu  $e_{x_0}$ ; aus  $\sigma \simeq_p e_{x_0}$  folgt dann:  $\tau_1 \simeq_p \sigma * \tau_2 \simeq_p \tau_2$ .

Seien umgekehrt  $\sigma$  eine Schleife in  $X$  an  $x_0$  und  $\tau_1$  ein Weg von  $x_0$  nach  $x_1$ ,  $\tau_2 = \sigma * \tau_1$ . Dann gilt nach Voraussetzung  $\tau_1 \simeq_p \tau_2$ , somit  $\sigma \simeq_p \tau_2 * \bar{\tau}_1 \simeq_p e_{x_0}$ . Damit  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ .

### SATZ 11.15

Seien  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\}) \subseteq \tilde{X}$ . Zu jeder Schleife  $\tau$  in  $X$  an  $x_0$  bezeichne  $\tilde{\tau}$  den (eindeutig bestimmten) Weg in  $\tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  und  $p \circ \tilde{\tau} = \tau$ . Indem der Wghomotopieklasse  $[\tau] \in \pi_1(X, x_0)$  der Punkt  $\tilde{\tau}(1) \in \tilde{X}$  zugeordnet wird, ist eine Abbildung  $\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(\{x_0\})$  definiert.

Dabei ist  $\rho^{-1}(\{x_0\})$  gerade das Bild von  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ,  $[\tilde{\sigma}] \mapsto [p \circ \tilde{\sigma}]$ .

Ist  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend, so ist  $\rho$  surjektiv. Ist  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend, so ist  $\rho$  sogar bijektiv.

### BEWEIS

Für eine Schleife  $\tau$  in  $X$  an  $x_0$  ist  $p(\tilde{\tau}(1)) = \tau(1) = \tau(0) = x_0$ , somit  $\tilde{\tau}(1) \in p^{-1}(\{x_0\})$ . Ist  $\tau' \simeq_p \tau$ , so ist auch  $\tilde{\tau}' \simeq_p \tilde{\tau}$ , insbesondere  $\tilde{\tau}'(1) = \tilde{\tau}(1)$ . Somit ist  $\rho$  wohldefiniert. Für  $\tau$  gilt:  $\rho([\tau]) = \tilde{x}_0 \Leftrightarrow \tilde{\tau}$  ist eine Schleife in  $\tilde{X}$  an  $\tilde{x}_0 \Rightarrow [\tau] = [p \circ \tilde{\tau}] = p_*([\tilde{\tau}])$  und für eine Schleife  $\sigma$  in  $\tilde{X}$  an  $\tilde{x}_0$  ist umgekehrt  $\sigma = \tilde{\tau}$  für  $\tau = p \circ \sigma$ , somit  $\rho(p_*([\sigma])) = \tilde{\tau}(1) = \sigma(1) = \tilde{x}_0$ , also  $\rho^{-1}(\{x_0\}) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

Sei nun  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend. Zu  $y \in p^{-1}(\{x_0\})$  gibt es einen Weg  $\sigma$  von  $\tilde{x}_0$  nach  $y$  in  $\tilde{X}$ . Dann ist  $\tau = p \circ \sigma$  eine Schleife in  $X$  an  $x_0$  und  $\tilde{\tau} = \sigma$ , somit  $y = \sigma(1) = \tilde{\tau}(1) = \rho([\tau])$ . Also ist  $\rho$  surjektiv.

Sei nun  $\tilde{X}$  sogar einfach zusammenhängend, also  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$ . Für zwei Schleifen  $\tau_1, \tau_2$  an  $x_0$  in  $X$  mit  $\tilde{\tau}_1(1) = \tilde{\tau}_2(1)$  folgt dann  $\tilde{\tau}_1 \simeq_p \tilde{\tau}_2$  nach Prop. 11.13, somit  $\tau_1 = p \circ \tilde{\tau}_1 \simeq_p p \circ \tilde{\tau}_2$ , d.h.  $[\tau_1] = [\tau_2]$  in  $\pi_1(X, x_0)$ .

### 11.3 Die Fundamentalgruppe des Kreises

**SATZ 11.16**

Sei  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ . Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ , die einer Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  die Klasse der Schleife  $\omega_m : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi i m t}$  zuordnet, ist ein Gruppenisomorphismus.

**BEWEIS**

Sei die Überlagerung  $p$  von  $\mathbb{S}^1$  definiert durch  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$  und  $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow p^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  die dazu nach Satz 11.15 gegebene Bijektion. Zu  $m \in \mathbb{Z}$  sei  $\tilde{\omega}_m : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto mt$ . Dann ist tatsächlich mit  $x_0 = 1$  und  $\tilde{x}_0 = 0$  erfüllt, dass  $p \circ \tilde{\omega}_m = \omega_m$  und  $\tilde{\omega}_m(0) = \tilde{x}_0 = 0$  und damit  $\rho([\omega_m]) = \tilde{\omega}_m(1) = m$ . Daher ist  $\rho \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ , also auch  $\varphi = \rho^{-1}$  bijektiv.

Seien nun  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Sei  $\sigma : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto m + nt$ . Dann ist  $\sigma$  ein Weg in  $\mathbb{R}$  von  $m$  nach  $m + n$  und es gilt  $p \circ \sigma = p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ , weiter ist  $\tilde{\omega}_m * \sigma$  definiert und endet in  $m + n$ ; da  $\mathbb{R}$  einfach zusammenhängend ist, folgt mit Prop. 11.14 dann, dass  $\tilde{\omega}_m * \sigma \simeq_p \tilde{\omega}_{m+n}$  und somit

$$\varphi(m+n) = [\omega_{m+n}] = [p \circ \tilde{\omega}_{m+n}] = [p \circ (\tilde{\omega}_m * \sigma)] = [p \circ \tilde{\omega}_m][p \circ \sigma] = [\omega_m][\omega_n] = \varphi(m)\varphi(n).$$

Damit ist  $\varphi$  ein Gruppenhomomorphismus.

**SATZ 11.17 (Fundamentalsatz der Algebra)**

Jedes nicht konstante Polynom mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

**BEWEIS**

Sei  $p \in \mathbb{C}[T]$  derart, dass  $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$ . Wir zeigen, dass  $p$  konstant ist.

O.B.d.A. sei  $p$  normiert, also  $p(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1} T + a_n$  mit  $a_i \in \mathbb{C}$ . Für  $s, t \in \mathbb{R}$  sei  $F$  definiert durch

$$F(s, t) = \frac{\frac{p(te^{2\pi i s})}{p(t)}}{| \frac{p(te^{2\pi i s})}{p(t)} |} \in \mathbb{S}^1.$$

Dann ist  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig. Für  $t \in \mathbb{R}$  ist  $F_t : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1, s \mapsto F(s, t)$  stetig und homotop rel  $\{0, 1\}$  zur konstanten Abbildung  $F_0 = \omega_0 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto 1$ . Somit ist  $F_t$  eine Schleife in  $\mathbb{S}^1$  an 1, die weghomotop zu  $\omega_0$  ist. Für  $t \in \mathbb{I}$  sei  $p_t(T) = T^n + t(a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1} T + a_n)$ . Wähle  $r_0 \in \mathbb{R}_{>1}$  mit  $r_0 > \sum_{i=1}^n |a_i|$ . Für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = r_0$  gilt dann  $p_t(z) \neq 0$ , denn  $|t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n)| < r_0 r_0^{n-1} = r_0^n = |z^n|$  für alle  $t \in \mathbb{I}$ . Für  $s, t \in \mathbb{R}$  sei  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  definiert durch

$$G(s, t) = \frac{\frac{p_t(r_0 e^{2\pi i s})}{p_t(r_0)}}{| \frac{p_t(r_0 e^{2\pi i s})}{p_t(r_0)} |}.$$

Dann ist  $G$  stetig und Weghomotopie zwischen den Schleifen  $G_0 = \omega_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$  und  $G_1 = F_{r_0} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Damit ist  $\omega_n = G_0 \simeq_p F_{r_0} \simeq_p \omega_0$ , somit  $\varphi(n) = [\omega_n] = [\omega_0] = \varphi(0)$ . Aus der Injektivität von  $\varphi$  folgt  $n = 0$ , d.h.  $p$  konstant.

**SATZ 11.18 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**

Seien  $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$  und  $h : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$  stetig. Dann gibt es ein  $x \in \mathbb{B}^2$  mit  $h(x) = x$ .

**BEWEIS**

Angenommen,  $h(x) \neq x$  für alle  $x \in \mathbb{B}^2$ . Zu  $x \in \mathbb{B}^2$  gibt es dann jeweils genau ein  $r(x) \in \mathbb{S}^1$ , das von der Form  $r(x) = x + t(h(x) - x)$  für ein reelles  $t \geq 0$ . Dann ist  $r : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig und eine starke Deformationsrestriktion, damit  $\mathbb{B}^2$  homotopieäquivalent zu  $\mathbb{S}^1$ . Dann ist mit  $\mathbb{B}^2$  auch  $\mathbb{S}^1$  einfach zusammenhängend, Widerspruch zu Satz 11.16.

## Übungsaufgaben

### AUFGABE 1

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- Jeder Vektorraum über einem Körper besitzt eine Basis.
- Zu zwei beliebigen Mengen  $X$  und  $Y$  gibt es stets eine injektive Abbildung  $X \rightarrow Y$  oder eine injektive Abbildung  $Y \rightarrow X$ .
- Zu jeder surjektiven Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gibt es eine injektive Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

### AUFGABE 2

Zeigen Sie, dass es eine wohlgeordnete Menge  $(X, \preccurlyeq)$  mit einem größten Element  $\eta$  gibt derart, dass  $X$  überabzählbar ist, während für jedes  $a \in X \setminus \{\eta\}$  die Menge  $X_a = \{x \in X \mid x \preccurlyeq a\}$  abzählbar ist.

Hinweis: Wählen Sie zunächst auf einer überabzählbaren Menge  $H$  eine Wohlordnung  $\preccurlyeq$  und betrachten Sie die Menge der  $a \in H$ , für die  $H_a = \{x \in H \mid x \preccurlyeq a\}$  überabzählbar ist.

### AUFGABE 3

Finden Sie jeweils eine angeordnete Menge  $(X, \preccurlyeq)$ , die

- genau ein maximales Element und unendlich viele minimale Elemente hat.
- genau ein maximales Element hat, das jedoch kein größtes Element ist.

### AUFGABE 4

Zeigen Sie: Gibt es injektive Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$ , so auch eine Bijektion  $h : X \rightarrow Y$ .

Um dies zu beweisen, setze man  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (g \circ f)^n(X \setminus g(Y))$  und zeige, dass  $h$  wie folgt gewählt werden kann:

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g^{-1}(x) & x \in X \setminus A \end{cases}$$

### AUFGABE 5

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für  $a \in X$  und  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  setzen wir

$$\begin{aligned} B_\epsilon(a) &:= \{x \in X \mid d(x, a) < \epsilon\} \text{ und} \\ \overline{B}_\epsilon(a) &:= \{x \in X \mid d(x, a) \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Teilmengensystem

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U : \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\epsilon(x) \subseteq U\}$$

eine Topologie auf  $X$  ist.

Zeigen Sie weiter, dass bzgl. dieser Topologie  $B_\epsilon(a)$  offen und  $\overline{B}_\epsilon(a)$  abgeschlossen ist.

Ist  $\overline{B}_\epsilon(a)$  der Abschluss von  $B_\epsilon(a)$ ?

### AUFGABE 6

Zeigen Sie:

- In einem Hausdorffraum sind alle endlichen Teilmengen abgeschlossen.
- Auf einer beliebigen Menge ist die kofinale Topologie die grösste Topologie, in der alle endlichen Teilmengen abgeschlossen sind.
- Eine Menge ist endlich  $\Leftrightarrow$  auf ihr ist die kofinale Topologie hausdorffsch.

### AUFGABE 7

Jeder metrisierbare topologische Raum ist ein Hausdorffraum.

**AUFGABE 8**

Auf der Menge  $X$  sei eine Familie von Teilmengensystemen  $(\mathcal{U}_x)_{x \in X}$  gegeben derart, dass (N1)-(N4) für jedes  $x \in X$  gelten. Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  derart, dass für jedes  $x \in X$  die Elemente von  $\mathcal{U}_x$  gerade die  $\mathcal{T}$ -Umgebungen von  $x$  sind.

**AUFGABE 9**

Sei  $X$  eine Menge und  $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $c(\emptyset) = \emptyset$ .
- (b)  $Y \subseteq X \Rightarrow Y \subseteq c(Y)$ .
- (c)  $Y \subseteq X \Rightarrow c(c(Y)) = c(Y)$ .
- (d)  $Y, Z \subseteq X \Rightarrow c(Y \cup Z) = c(Y) \cup c(Z)$ .

Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf  $X$  gibt, bezüglich der  $c(Y)$  der Abschluss von  $Y$  ist für alle  $Y \subseteq X$ .

**AUFGABE 10**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Zeigen Sie:

$\mathcal{B}$  ist eine Basis von  $\mathcal{T} \iff \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$  und zu  $x \in V \in \mathcal{T}$  gibt es stets ein  $U \in \mathcal{B}$  mit  $x \in U \subseteq V$ .

**AUFGABE 11**

Sei  $(X, \leq)$  eine total geordnete Menge. Wir betrachten  $X$  als topologischen Raum in der Ordnungstopologie  $\mathcal{T}$ . Zeigen Sie:

- (1)  $X$  ist ein Hausdorffraum.
- (2) Die offenen Intervalle  $(a, b)$  mit  $a, b \in X^*$ ,  $a < b$ , bilden eine Basis von  $X$ .
- (3) Für  $Y \subseteq X$  ist die Spurtopologie auf  $Y$  feiner als die durch  $\leq$  auf  $Y$  definierte Ordnungstopologie.
- (4) Ist  $X = \mathbb{R}$  und  $\leq$  die übliche Anordnung auf  $\mathbb{R}$ , so ist die Spurtopologie auf  $\{-1\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$  verschieden von der durch  $\leq$  auf  $Y$  definierten Ordnungstopologie.

**AUFGABE 12**

Sei  $X$  ein topologischer Raum, dessen Topologie  $\mathcal{T}^d$  von einer Metrik  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  induziert ist.

Zeigen Sie, dass auf jeder Teilmenge  $Y$  von  $X$  die Spurtopologie von der eingeschränkten Metrik  $d|_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  induziert wird.

**AUFGABE 13**

Zeigen Sie für die Sorgenfrey-Gerade  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  folgende Aussagen:

- (1)  $\mathcal{T}$  ist eine Verfeinerung der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}$ .
- (2) Der Raum  $X$  ist hausdorffsch und separabel.
- (3) Jeder Punkt von  $X$  hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
- (4)  $X$  besitzt keine abzählbare Basis und ist nicht metrisierbar.

**AUFGABE 14**

Sei  $f$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie:

- (1) Für  $A \subseteq X$  ist  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .
- (2) Für  $B \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ .
- (3) Für  $B \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$ .

**AUFGABE 15**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $A, B$  abgeschlossene Unterräume von  $X$  mit  $X = A \cup B$ . Zeigen Sie, dass eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen topologischen Raum  $Y$  genau dann stetig ist, wenn die Einschränkungen  $f|_A : A \rightarrow Y$  und  $f|_B : B \rightarrow Y$  stetig sind.

**AUFGABE 16**

Seien  $X$  eine Menge und  $d_1, d_2$  zwei Metriken auf  $X$  mit den jeweils induzierten Topologien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  auf  $X$ . Weiter sei  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine streng monoton wachsende Funktion, die in 0 stetig ist mit  $f(0) = 0$ . Zeigen Sie:

- (1) Ist  $d_1 \leq f \circ d_2$ , so gilt  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ .
- (2) Ist  $d_1 \geq f \circ d_2$ , so gilt  $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$ .

**AUFGABE 17**

Zeigen Sie, dass jede konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ein Intervall ist und außerdem, sofern sie mehr als einen Punkt enthält, als Unterraum homöomorph zu genau einem der Intervalle  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$  und  $[0, 1]$  ist.

**AUFGABE 18**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Beweisen Sie, dass die Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  übereinstimmt.

**AUFGABE 19**

Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum  $X$  genau dann Hausdorffsch ist, wenn im Produkt  $X \times X$  die *Diagonale*  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$  einen abgeschlossenen Unterraum bildet.

**AUFGABE 20**

Zeigen Sie, dass der Kreis  $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  als Unterraum von  $\mathbb{R}^2$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**AUFGABE 21**

Sei  $\mathbb{K}$ , einer der Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , mit der euklidischen Topologie versehen. Weiter seien  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}^0(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}\}$ . Zeigen Sie:

- (1) (a) Die Addition  $\alpha_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  ist stetig.  
 (b) Die Multiplikation  $\mu_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  ist stetig.  
 (c) Die Betragfunktion  $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.  
 (d) Die Invertierung  $\iota_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig.
- (2) Für  $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}^0(X)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  sind auch  $f + g, fg, |f|, \lambda f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}^0(X)$ .
- (3) Für  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}^0(X)$  ist  $|f| \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0(X)$ .
- (4) (a) Für  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}^0(X)$  ist  $U_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  offen in  $X$ .  
 (b) Die Abbildung  $\frac{1}{f} : U \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  ist stetig.

**AUFGABE 22**

Sei  $(X, \leq)$  eine wohlgeordnete, überabzählbare Menge mit einem größtes Element  $\eta$  derart, dass für jedes  $a \in X \setminus \{\eta\}$  die Menge  $\{x \in X \mid x \leq a\}$  abzählbar ist (vgl. Aufgabe 2).

Sei  $X$  mit der Ordnungstopologie zu  $\leq$  versehen,  $A := X \setminus \{\eta\}$ . Zeigen Sie:

- (1) Es ist  $\overline{A} = X$ , d.h.  $\eta \in \overline{A}$ , aber keine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  konvergiert gegen  $\eta$ .
- (2) Ist die Menge  $\{0, 1\}$  mit der diskreten Topologie versehen, so ist die charakteristische Funktion  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  nicht stetig, aber für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt mit  $x_n \rightarrow x$  auch  $\chi_A(x_n) \rightarrow \chi_A(x)$ .
- (3)  $X$  erfüllt keines der beiden Abzählbarkeitsaxiome und ist nicht metrisierbar.

**AUFGABE 23**

Seien  $X$  ein beliebiger topologischer Raum,  $c \in X$  und  $A \subseteq X$ . Zeigen Sie, dass genau dann  $c \in \overline{A}$  gilt, wenn es ein Netz  $(x_i)_{i \in I}$  in  $A$  zu einer geeigneten Menge  $(I, \leq)$  gibt mit  $(x_i)_{i \in I} \rightarrow c$ .

**AUFGABE 24**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen  $X, Y$  und sei  $c \in X$ . Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann stetig in  $c$  ist, wenn für jedes Netz  $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$  mit  $x_i \rightarrow c$  in  $X$  auch  $f(x_i) \rightarrow f(c)$  in  $Y$  gilt.

**AUFGABE 25**

Seien  $M$  eine Menge und  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{F} = \{V \in \mathcal{P}(M) \mid \exists U \in \mathcal{B} : U \subseteq V\}$  genau dann ein Filter auf  $M$  ist, wenn gilt:

- (FB1) Zu  $U, U' \in \mathcal{B}$  gibt es stets ein  $V \in \mathcal{B}$  mit  $V \subseteq U \cap U'$ .  
 (FB2)  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ .

**AUFGABE 26**

Sei  $\mathcal{F}$  ein freier Filter auf einer Menge  $X$  (d.h.  $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ ). Zeigen Sie:

- (1)  $X$  ist unendlich.
- (2) In der kofinalen Topologie auf  $X$  ist jedes Element von  $X$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ .
- (3) In der diskreten Topologie auf  $X$  hat  $\mathcal{F}$  keinen Häufungspunkt.

**AUFGABE 27**

Sei  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf der Menge  $M$ . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (1)  $\mathcal{F}$  ist kein Hauptultrafilter.
- (2)  $\mathcal{F}$  ist frei.
- (3)  $\mathcal{F}$  enthält keine endliche Menge.
- (4)  $M$  ist unendlich und  $\mathcal{F}$  ist eine Verfeinerung des Filters der koendlichen Teilmengen von  $M$ .

**AUFGABE 28**

Sei  $(X, \leq)$  total geordnet und  $X$  mit  $\mathcal{T}_{\leq}$  versehen. Zeigen Sie, dass jede nicht leere, kompakte Teilmenge von  $X$  bzgl.  $\leq$  ein Maximum und ein Minimum besitzt.

**AUFGABE 29**

Sei  $X$  die Sorgenfrey-Gerade, also die Menge  $\mathbb{R}$  versehen mit der von den Intervallen  $[a, b)$  (wobei  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ) erzeugten Topologie. Zeigen Sie:

- (1) Keine streng monoton steigende Folge reeller Zahlen konvergiert in  $X$ .
- (2) Kein echtes Intervall in  $\mathbb{R}$  ist kompakt in  $X$ .
- (3)  $X$  ist nicht lokal kompakt.
- (4) Zu jeder abgeschlossenen Menge  $A \subseteq X$  und jedem Punkt  $x \in A^c$  existiert eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  (wobei  $[0, 1]$  mit der üblichen Topologie versehen ist) mit  $f(x) = 0$  und  $f(A) = \{1\}$ .

**AUFGABE 30**

Zeigen Sie, dass offene und abgeschlossene Unterräume lokal kompakter Hausdorffräume wieder lokal kompakt sind.

**AUFGABE 31**

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $Y$  ein Hausdorffraum,  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge kompakter Teilmengen von  $X$ . Zeigen Sie, dass  $f(\bigcap K_n) = \bigcap f(K_n)$  gilt.

**AUFGABE 32**

Sei  $X$  ein nicht leerer, kompakter Hausdorffraum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine nicht leere, abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq X$  gibt mit  $f(A) = A$ .

**AUFGABE 33**

Zeigen Sie, dass  $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$  mit der von  $\mathbb{R}^2$  induzierten Spurtopologie nicht lokal kompakt ist.

**AUFGABE 34**

Bezeichne  $\mathbb{S}^n$  die  $n$ -Sphäre  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  versehen mit der Spurtopologie des eukl. Raumes  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Begründen Sie, warum man die  $\mathbb{S}^n$  als Alexandroff-Kompaktifizierung des  $\mathbb{R}^n$  verstehen kann.

**AUFGABE 35**

Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum  $X$  genau dann ein  $T_4$ -Raum ist, wenn es in  $X$  zu jeder abgeschlossenen Menge  $A$  und jeder offenen Menge  $V$  mit  $A \subseteq V$  eine offene Menge  $U$  gibt mit  $A \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$ .

**AUFGABE 36**

Überprüfen Sie, dass auf der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen durch

$$\mathcal{T} := \{U \cup (V \cap \mathbb{Q}) \mid U, V \subseteq \mathbb{R} \text{ offen bzgl. } \mathcal{T}_{\text{eukl.}}\}$$

eine Topologie gegeben ist, und entscheiden Sie, ob der topologische Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  regulär ist.

**AUFGABE 37**

Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $Y$  ein Hausdorffraum und  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass aus der Existenz einer dichten Teilmenge  $U \subseteq X$  mit  $f|_U = g|_U$  schon  $f = g$  folgt.

**AUFGABE 38**

Die Sorgenfrey-Gerade  $X$  ist normal, die Sorgenfrey-Ebene dagegen nicht.

**AUFGABE 39**

Sei  $(X_\alpha)_\alpha$  eine Familie nicht leerer topologischer Räume und  $X = \prod_\alpha X_\alpha$ . Dann gilt:

Genau dann ist  $X$  ein  $T_3$ -Raum, wenn für jedes  $\alpha \in I$  der Raum  $X_\alpha$  ein  $T_3$ -Raum ist.

**AUFGABE 40**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen  $X, Y$ . Wir betrachten den Graphen  $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$  als Unterraum von  $X \times Y$ . Zeigen Sie:

- Die Abbildung  $g : X \rightarrow G_f$ ,  $g(x) := (x, f(x))$  ist ein Homöomorphismus.
- Ist  $Y$  Hausdorffsch, so ist  $G_f$  abgeschlossen in  $X \times Y$ .

**AUFGABE 41**

Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer Hausdorffräume derart, dass  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  lokal kompakt ist.

Zeigen Sie, dass die Räume  $X_\alpha$  für alle  $\alpha \in I$  lokal kompakt und fast alle kompakt sind.

**AUFGABE 42**

Für eine Menge  $X$  bezeichnen wir mit  $\hat{X}$  die Menge der Ultrafilter auf  $X$ . Zu einer Teilmenge  $U$  von  $X$  sei  $\hat{U}$  die Menge derjenigen Ultrafilter auf  $X$ , die  $U$  als Element enthalten. Wir betrachten  $X$  als Teilmenge von  $\hat{X}$ , indem wir die Elemente von  $x \in X$  mit dem in  $x$  zentrierten Hauptultrafilter  $\{U \subseteq X \mid x \in U\}$  identifizieren.

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- Die Mengen  $\hat{U}$  mit  $U \subseteq X$  offen bilden die Basis einer Topologie auf  $\hat{X}$ .
- $\hat{X}$  ist kompakt und  $X$  ist homöomorph zu einem Unterraum von  $\hat{X}$ , der dicht in  $\hat{X}$  liegt.
- Ist  $X$  diskret, dann ist  $\hat{X}$  ein Hausdorffraum und jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen kompakten Hausdorffraum besitzt eine eindeutige (stetige) Fortsetzung  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow Y$ .
- Die Stone-Cech-Kompaktifizierung  $\beta(X)$  kann dann mit dem Raum  $\hat{X}$  identifiziert werden.

**AUFGABE 43**

Seien  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie nicht leerer, topologischer Räume und  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ .

Zeigen Sie, dass genau dann jeder Punkt in  $X$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, wenn dies in jedem Raum  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , der Fall ist und zudem die Menge  $J := \{\alpha \in I \mid |X_\alpha| > 1\}$  abzählbar ist.



**AUFGABE 44**

Seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $0 < \alpha < \infty$  und  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $t \mapsto \frac{\alpha t}{1+t}$ . Zeigen Sie:

- (1)  $f$  ist streng monoton steigend und für  $s, t \in [0, \infty)$  gilt  $f(s) < \alpha$  und  $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$ .
- (2)  $\delta := f \circ d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Metrik, welche die gleiche Topologie auf  $X$  induziert wie  $d$ . Es gilt  $\delta(x, y) < \alpha$  für alle  $x, y \in X$ .

**AUFGABE 45**

Sei die Funktion  $f$  gegeben durch

$$f : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{t}) & t \neq 0 \end{cases} \end{array} .$$

Zeigen Sie, dass der Graph  $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \mid t \in [0, 1]\}$  in der Spurtopologie von  $\mathbb{R}^2$  zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

**AUFGABE 46**

Sei  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ . Zeigen Sie:

$A$  ist in der Spurtopologie von  $\mathbb{R}^2$  wegzusammenhängend, jedoch nicht lokal zusammenhängend.

**AUFGABE 47**

Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann lokal (weg)zusammenhängend, wenn in jedem offenen Unter-  
raum  $U$  von  $X$  jede (Weg-)Zusammenhangskomponente offen ist.

**AUFGABE 48**

Zeigen Sie, dass für  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  stets  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  wegzusammenhängend ist.

**AUFGABE 49**

Zeigen Sie, dass keine zwei der topologischen Räume  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2$  zueinander homöomorph sind.

**AUFGABE 50**

Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum  $X$  folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1)  $X$  ist kontrahierbar.
- (2) Jede stetige Abbildung  $X \rightarrow Y$  in einen topologischen Raum  $Y$  ist unwesentlich.
- (3) Jede auf einem topologischen Raum  $Z$  definierte, stetige Abbildung  $Z \rightarrow X$  ist unwesentlich.

**AUFGABE 51**

Eine nicht leere Teilmenge  $U$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt *irreduzibel*, wenn es keine in  $U$  echten abgeschlossenen Teilmengen  $A, B \subsetneq U$  mit  $U = A \cup B$  gibt.

Eine irreduzible Teilmenge  $U \subseteq X$ , die in keiner echt größeren irreduziblen Teilmenge von  $X$  enthalten ist, wird als eine *irreduzible Komponente* von  $X$  bezeichnet.

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- (1) Es sind äquivalent:
  - (a)  $X$  ist irreduzibel.
  - (b) Jede nicht leere, offene Teilmenge von  $X$  liegt dicht in  $X$ .
  - (c) Je zwei nicht leere, offene Teilmengen von  $X$  haben nicht leeren Schnitt.
- (2) Genau dann ist  $Y \subseteq X$  irreduzibel, wenn  $\bar{Y}$  irreduzibel ist.
- (3) Jede irreduzible Komponente von  $X$  ist abgeschlossen.
- (4) Jede irreduzible Teilmenge von  $X$  ist in einer irreduziblen Komponente enthalten.

**AUFGABE 52**

Charakterisieren Sie die irreduziblen Teilmengen eines Hausdorffraums sowie eines Raums, der die Kofinaltopologie trägt.

**AUFGABE 53**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *Noethersch*, wenn jede absteigende Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener Teilmengen von  $X$  *stationär* wird, d.h. wenn es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass  $A_n = A_m$  für alle  $m \geq N$ .

Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum  $X$  folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1)  $X$  ist Noethersch.
- (2) Jedes nicht leere System aus abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  besitzt ein minimales Element.
- (3) Jede offene Teilmenge von  $X$  ist kompakt.

**AUFGABE 54**

Zeigen Sie, dass das Spektrum eines Noetherschen Rings in der Zariski-Topologie ein Noetherscher topologischer Raum ist.

**AUFGABE 55**

Sei  $X$  ein Noetherscher, topologischer Raum. Zeigen Sie:

- (1)  $X$  hat nur endlich viele irreduziblen Komponenten.
- (2) Sind  $X_1, \dots, X_n$  die irreduziblen Komponenten von  $X$ , gilt für  $i = 1, \dots, n$ :  $X_i \not\subseteq \bigcup \{X_j \mid i \neq j\}$ .