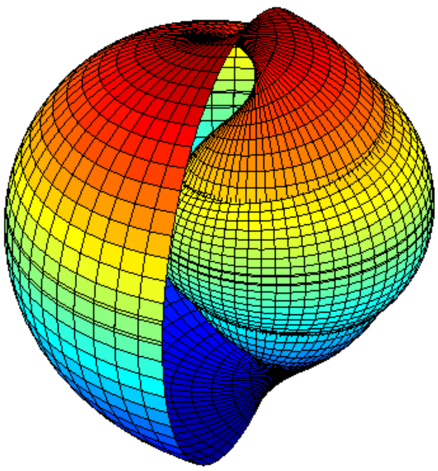
Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis I



Operatortheorie

gelesen von

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Prof. Dr. Robert Denk

Martin Gubisch

Konstanz, Wintersemester 2007/2008

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Grundlagen

1.1 Normierte und metrische Räume

Notation

Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir einen der Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Wiederholung

Ein Tripel $X = (X, a, s)$, bestehend aus einer nicht leeren Menge X und Abbildungen $a : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ und $s : \mathbb{K} \times X \to X$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ heißt ein *Vektorraum* über $\mathbb{K}$, falls gelten:

(1) $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$ *(Assoziativität)*;
(2) $\forall x, y \in X : x + y = y + x$ *(Kommutativität)*;
(3) $\exists 0 \in X : \forall x \in X : x + 0 = x$ *(Existenz des Neutralen)*;
(4) $\forall x \in X : \exists(-x) \in X : x + (-x) = 0$ *(Existenz der Inversen)*;
(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x \in X : (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
(6) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in X : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
(7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x \in X : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
(8) $\forall x \in X : 1x = x$.

Definition

$X := (X, a, s, ||\cdot||)$ heißt ein *normierter Vektorraum* über $\mathbb{K}$, falls (X, a, s) ein Vektorraum und $||\cdot|| : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto ||x||$ eine *Norm* auf X ist, d.h. falls gelten:

(N0) $\forall x \in X : ||x|| \geq 0$ *(Positivität)*;
(N1) $\forall x \in X : ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$ *(Definitheit)*;
(N2) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X : ||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ *(Multiplikativität)*;
(N3) $\forall x, y \in X : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Dreiecksungleichung)*.

Verzichten wir auf die Definitheit, so erhalten wir eine *Halbnorm* und einen *halbnormierten Vektorraum* über $\mathbb{K}$.

Bemerkung

Sei X ein halbnormierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten:

(1) $||0|| = 0$.

(2) $|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x - y||$ *(Umgekehrte Dreiecksungleichung)*.

Definition

Ein Paar (X, ρ), besteht aus einer nicht leeren Menge X und einer Abbildung $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, definiert durch $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$, heißt ein *metrischer Raum*, falls ρ eine *Metrik* auf X ist, d.h. falls gelten:

(M1) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Definitheit)*;
(M2) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(Symmetrie)*;
(M3) $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. *(Dreiecksungleichung)*

$\rho(x, y)$ wird auch der *Abstand* von x und y genannt.

Schwächen wir die Definitheit ab zu $\forall x \in X : \rho(x, x) = 0$, so erhalten wir eine *Semimetrik* und einen *semimetrischen Raum*.

Bemerkung

(1) Sei X ein semimetrischer Raum. Dann gilt: $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$.

(2) Sei X ein halbnormierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $\operatorname{dist} : X \times X \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto ||x - y||$ eine Semimetrik auf X.

(3) Ist X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann definiert dist sogar eine Metrik auf X.

Beispiele (normierter $\mathbb{K}$-Vektorräume)

(1) $\mathbb{K}$ mit der üblichen Addition, Multiplikation und Betragsnorm.

(2) $\mathbb{K}^n$ mit punktweise definerten Verknüpfungen und $||x||_\infty := \max_{\nu=1}^n |x_\nu|$.

(3) $\mathbb{K}^n$ mit $||x||_2 := \sqrt{\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^2}$.

(4) $\mathbb{K}^n$ mit $||x||_1 := \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|$.

(5) $\mathfrak{C}([a,b]) := \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{K} \text{ stetig}\}$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation sowie $||f||_\infty := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

(6) Der Raum ℓ_∞ der beschränkten Zahlenfolgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, versehen mit der *Supremumsnorm*, welche durch $||x||_\infty := \sup_{\nu=1}^\infty |x_\nu|$ $(x \in l_\infty)$ gegeben ist.

(7) Der Raum $\mathfrak{C}^n([a,b])$ der n-mal differenzierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, ausgestattet mit der durch $||x|| := \sum_{\nu=0}^n \max\limits_{t\in[a,b]} |x^{(\nu)}(t)|$ $(x \in \mathfrak{C}^n([a,b]))$ gegebenen Norm.

Beispiele (für Metriken und Semimetriken)

(1) Seien X eine nicht leere Menge und $\delta(x,y) := \{\begin{smallmatrix}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{smallmatrix}$. Dann ist (X,δ) ein metrischer Raum. δ heißt die *diskrete Metrik*.

(2) Durch $d(x,y) := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)-y(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$ $(x,y \in \mathfrak{C}([-\pi,\pi]))$ wird auf $\mathfrak{C}([-\pi,\pi])$ eine Metrik definiert.

(3) $\mathbb{R}^2$ wird meist mit dem *euklidischen Abstand* $d_2(x,y) := \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2}$ für $x = (x_1,x_2)$ und $y = (y_1,y_2)$, $x,y \in \mathbb{R}^2$ ausgestattet.

(4) $d_1(x,y) := |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$ $(x,y \in \mathbb{R}^2)$ liefert einen weiteren Abstand auf $\mathbb{R}^2$.

(5) Allgemein lässt sich der $\mathbb{K}^n$ mit der *Maximumsmetrik* $d_\infty(x,y) := \max_{\nu=1}^n |x_\nu - y_\nu|$ $(x,y \in \mathbb{K}^n)$ versehen.

(6) Auch auf $\mathfrak{C}([a,b])$ existiert eine Maximumsmetrik: $d_\infty(x,y) := \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$ $x,y \in \mathfrak{C}([a,b])$.

(7) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Die *Metrik der französischen Eisenbahn* ist definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} d_2(x,y), & \text{falls } x,y \text{ auf einer Geraden durch } x_0 \text{ liegen} \\ d_2(x,x_0) + d_2(x_0,y) & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R}^2).$$

(8) Seien (X,δ) ein semimetrischer Raum und $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\forall r,s,t \geq 0 : r \leq s+t \Rightarrow \varphi(r) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$. Dann ist $(X, \varphi\circ\delta)$ ein semimetrischer Raum.

(9) Ist (X,δ) sogar ein metrischer Raum und gilt für φ zusätzlich $\forall t \in X : \varphi(t) = 0 \Rightarrow t = 0$, dann ist $(X, \varphi\circ\delta)$ ein metrischer Raum.

Behauptung

Seien (X,δ) ein metrischer Raum und $\sigma(x,y) := \frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}$ $(x,y \in X)$, d.h. $\sigma(X) \subseteq [0,1)$ Dann ist (X,σ) ein metrischer Raum.

Beweis

Setze $\varphi(t) := \frac{1}{1+t}$ $(t \in [0,\infty))$. Dann gelten:

(1) $\forall s,t \geq 0 : s \leq t \Rightarrow s + st \leq t + st \Rightarrow \varphi(s) = \frac{s}{1+s} \leq \frac{t}{1+t} = \varphi(t)$ und
(2) $\forall s,t \geq 0 : \varphi(s+t) = \frac{s+t}{1+s+t} = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} = \varphi(s) + \varphi(t)$.
Nach dem letzten Beispiel ist dann $\sigma = \varphi\circ\delta$ eine Metrik auf X.

Bemerkung

Sei (X,δ) ein semimetrischer Raum. Dann gelten:

(1) $\forall a,b,x,y \in X : |\delta(a,b) - \delta(x,y)| \leq \delta(a,x) + \delta(b,y)$.

(2) $\forall x,y,z \in X : |\delta(x,y) - \delta(x,z)| \leq \delta(y,z)$.

1.2 Die Räume ℓ_p

Bemerkung

Für $p \in (1, \infty)$ und $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ definieren wir $||x||_p := (\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p)^{\frac{1}{p}}$.
Außerdem setzen wir $xy := (x_1y_1, ..., x_ny_n)$ und $\langle x, y\rangle := \sum_{\nu=1}^n x_\nu y_\nu$ $(x, y \in \mathbb{K}^n)$.

Satz 1 (Hölder-Ungleichung)
Seien $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$ (d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$: $||xy||_1 \leq ||x||_p||y||_q$.

Beweis

Die Funktion ln ist streng konkav, da ihre Ableitung $x \mapsto \frac{1}{x}$ streng monoton fällt. Damit gilt für $a, b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q\right),$$

also $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ $(*)$.
Seien jetzt Œ $x, y \neq 0$, d.h. $||x||_p > 0$ und $||y||_q > 0$. Dann gilt:

$$\frac{||xy||_1}{||x||_p||y||_q} = \sum_{\nu=1}^n \frac{|x_\nu|}{||x||_p}\frac{|y_\nu|}{||y||_q} \overset{(*)}{\leq} \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{1}{p}\frac{|x_\nu|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_\nu|^q}{||y||_q^q}\right) = 1,$$

also $||xy||_1 \leq ||x||_p||y||_q$.

Satz 2 (Minkowski-Ungleichung)
Sei $p \in (1, \infty)$, dann gilt für $x, y \in \mathbb{K}^n$ die Ungleichung $||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$.

Beweis

Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir für $x, y \in \mathbb{K}^n$ mit $q := \frac{p}{p-1}$:

$$\begin{aligned}
||x+y||_p^p &= \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^p \\
&\overset{\Delta}{\leq} \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^{p-1}|x_\nu| + \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^{p-1}|y_\nu| \\
&= ||((x_\nu + y_\nu)^{p-1})_\nu(x_\nu)_\nu||_1 + ||((x_\nu + y_\nu)^{p-1})_\nu(y_\nu)_\nu||_1 \\
&\leq ||((x_\nu + y_\nu)^{p-1})_\nu||_q||(x_\nu)_\nu||_p + ||((x_\nu + y_\nu)^{p-1})_\nu||_q||(y_\nu)_\nu||_p \\
&= \left(\sum_{\nu=1}^n |(x_\nu + y_\nu)^{p-1}|^q\right)^{\frac{1}{q}} ||x||_p + \left(\sum_{\nu=1}^n |(x_\nu + y_\nu)^{p-1}|^q\right)^{\frac{1}{q}} ||y||_p \\
&= (||x+y||_p^p)^{\frac{p-1}{p}}(||x||_p + ||y||_p) \\
\Rightarrow ||x+y||_p^1 &\leq (||x||_p + ||y||_p)^1,
\end{aligned}$$

also $||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$.

Korollar 3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ gilt $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||_2||y||_2$.

Folgerung

Für $1 \leq p < \infty$ definiert $||\cdot||_p$ eine Norm auf dem $\mathbb{K}^n$, die *p-Norm* genannt wird.

Bemerkung

Die Hölder-Ungleichung gilt auch für $p = 1,\ q = \infty$, denn für $x, y \in \mathbb{K}^n$ ist

$$||xy||_1 = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu y_\nu| \le \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| ||y||_\infty = ||x||_1 ||y||_\infty.$$

Definition

Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} := \{x \mid x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}\}$ definieren wir

$$\begin{aligned} ||x||_p &:= \sqrt[p]{\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^p} \ (p \in [1,\infty)) \\ ||x||_\infty &:= \sup_{\nu\in\mathbb{N}} |x_\nu| \\ \ell_p &:= \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid ||x||_p < \infty\} \ (p \in [1,\infty]). \end{aligned}$$

ℓ_p zusammen mit $||\cdot||_p$ heißt der ℓ_p-Raum über $\mathbb{K}$ $(p \in [1,\infty])$.

Bemerkung

$||\cdot||_p$ definiert eine Norm auf ℓ_p, denn wegen $\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu y_\nu| \le ||x||_p ||y||_q$ $(x_\nu, y_\nu \in \mathbb{K})$ gelten Hölder- und Minkowski-Ungleichung auch für $n \to \infty$.

Insbesondere liegt für $x \in \ell_p,\ y \in \ell_q$ stets xy in ℓ_1.

Damit ist $(\ell_p, ||\cdot||_p)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum für $p \in [1,\infty]$.

Satz 4 (Jensensche Ungleichung)

Seien $p, q \in [1,\infty]$ mit $p \le q$. Dann gilt $\ell_p \subseteq \ell_q$ und $||x||_q \le ||x||_p$ für alle $x \in \ell_p$.

Beweis

Der Fall $q = \infty$ ist klar. Gelte Œ $p < q < \infty$ und $||x||_q \ne 0$. Dann

$$||x||_q^q = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^q = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^p |x_\nu|^{q-p} \le ||x||_p^p ||x||_\infty^{q-p} \le ||x||_p^p ||x||_p^{q-p} = ||x||_p^q.$$

Also $||x||_q \le ||x||_p$. Damit gilt insbesondere $\ell_p \subseteq \ell_q$.

Bemerkung

Die Räume ℓ_p sind (bzgl. $||\cdot||_p$) alle vollständig $(p \in [1,\infty))$.

Seien dazu $p \in [1,\infty),\ \epsilon > 0$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k := (\xi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ_p. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$||x_k - x_l||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \qquad (k, l \ge K).$$

Insbesondere gilt also $|\xi_n^{(l)} . \xi_n^{(l)}| < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. jede Komponentenfolge $(\xi_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ und besitzt damit einen Grenzwert ξ_n $(n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{K}$. Wir zeigen, dass $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ_p liegt und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ gilt.

Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt die Ungleichung $(\sum_{n=1}^{m} |\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$ für $k, l \ge K$ und damit für $k \to \infty$ auch $(\sum_{n=1}^{m} |\xi_n - \xi_n^{(l)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$ für $l \ge K$. Betrachtet man nun auch $m \to \infty$, dann folgt $(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)}|^p)^{\frac{1}{p}} \le \epsilon$ für $l \ge K$, d.h. für $l \ge K$ liegt die Folge $(\xi_n - \xi_n^{(l)})_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ_p. Da ℓ_p ein Vektorraum ist, folgt daraus, dass auch $x := (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ_p liegt.

Damit ist $||x - x_l||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)}|^p)^{\frac{1}{p}} \le \epsilon$ für $l \ge K$, d.h. $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = x$.

1.3 Topologie semimetrischer Räume

Notation

Seien (X, δ) ein semimetrischer Raum, $\epsilon \in (0, \infty)$ und $a \in X$. Wir setzen

$$\begin{aligned} U_a^\epsilon &:= \{x \in X \mid \delta(a,x) < \epsilon\} && \textit{Umgebung} \text{ von } a \text{ mit } \textit{Radius } \epsilon; \\ K_a^\epsilon &:= \{x \in X \mid \delta(a,x) \le \epsilon\} && \textit{Kugel} \text{ von } a \text{ mit } \textit{Radius } \epsilon. \end{aligned}$$

Speziell wird K_a^1 als die *Einheitskugel* von (X, δ) bezeichnet.

Wir nennen ein $O \subseteq X$ *offen*, wenn zu jedem $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_x^\epsilon \subseteq O$.

Mit $\mathbb{O} := \mathbb{O}(\delta) := \{O \subseteq X \mid O \text{ offen}\}$ bezeichnen wir das System aller offenenen Teilmengen von X.

$\wp(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}$ bezeichnet die *Potenzmenge* von X, also das System aller Teilmengen von X.

Satz 5 (Eigenschaften offener Mengen)

Sei (X, δ) ein semimetrischer Raum. Dann gelten:

(O1) $\emptyset \in \mathbb{O}, \ X \in \mathbb{O}$.

(O2) $\mathbb{O}' \subseteq \mathbb{O} \Rightarrow \bigcup_{O \in \mathbb{O}'} O \in \mathbb{O}$, d.h. beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

(O3) $\mathbb{O}' \subseteq \mathbb{O}$ endlich $\Rightarrow \bigcap_{O \in \mathbb{O}'} O \in \mathbb{O}$, d.h. endliche Schnitte offener Mengen sind offen.

Beweis

(1) Trivial.

(2) Sei $x \in \bigcup \mathbb{O}'$, dann gibt es ein $O \in \mathbb{O}'$ mit $x \in O$ und da O offen, auch ein $\epsilon > 0$ mit $U_x^\epsilon \subseteq O \subseteq \bigcup \mathbb{O}'$. Also ist $\bigcup \mathbb{O}'$ offen.

(3) Œ sei $\mathbb{O}' = \{O_1, O_2\}$. Zu $x \in O_1 \cap O_2$ gibt es $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ mit $U_x^{\epsilon_1} \subseteq O_1$ und $U_x^{\epsilon_2} \subseteq O_2$. Wähle $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, dann $U_x^\epsilon \subseteq O_1 \cap O_2$. Also ist $O_1 \cap O_2$ offen.

Behauptung

Sei (X, δ) ein semimetrischer Raum. Für $x \in X, \ \epsilon > 0$ gilt dann stets $U_x^\epsilon \in \mathbb{O}$, d.h. Umgebungen sind offen.

Beweis

Sei $y \in U_x^\epsilon$. Dann ist $\epsilon > \delta(x,y)$. Setze $\epsilon' := \epsilon - \delta(x,y)$, dann $U_y^{\epsilon'} \subseteq U_x^\epsilon$.

Definition

Seien X eine nicht leere Menge und $\mathbb{O} \subseteq \wp(X)$. Das Paar $(X, \mathbb{O})$ heißt ein *topologischer Raum*, falls (O1), (O2), (O3) erfüllt sind.

$\mathbb{O}$ heißt eine *Topologie* auf X; die Elemente von $\mathbb{O}$ heißen *offen*.

Seien $x \in X$ und $U \subseteq X$. Dann heißt U eine *Umgebung* von X, falls ein $O \in \mathbb{O}$ existiert mit $x \in O \subseteq U$.

$\mathbb{U}_x := \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$ heißt das *Umgebungssystem* von x.

Bemerkung

Jeder semimetrische Raum (X, δ) ist in kanonischer Weise ein topologischer Raum, denn nach Satz 5 definiert $\mathbb{O}(\delta)$ eine Topologie auf X.

1.4 Umgebungen

Satz 6 (Eigenschaften von Umgebungen)

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann gelten:

(U0) $\mathbb{U}_x \neq \emptyset$.
(U1) $\forall U \in \mathbb{U}_x : x \in U$.
(U2) $\forall U_1, U_2 \in \mathbb{U}_x : U_1 \cap U_2 \in \mathbb{U}_x$.
(U3) $\forall U \in \mathbb{U}_x,\ V \subseteq X : U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathbb{U}_x$.
(U4) $\forall U \in \mathbb{U}_x : \exists V \in \mathbb{U}_x : \forall y \in V : U \in \mathbb{U}_y$.

Beweis

(U0) Klar: $X \in \mathbb{U}_x$.

(U1) Zu $U \in \mathbb{U}_x$ gibt es nach Definition ein $O \in \mathbb{O}$ mit $x \in O \subseteq U$, also $x \in U$.

(U2) Sind $U_1, U_2 \in \mathbb{U}_x$, dann gibt es $O_1, O_2 \in \mathbb{O}$ mit $x \in O_1 \subseteq U_1$ und $x \in O_2 \subseteq U_2$ und damit auch $x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. $O_1 \cap O_2$ ist offen, also $U_1 \cap U_2 \in \mathbb{U}_x$.

(U3) Sei $U \in \mathbb{U}_x$, dann gibt es $O \in \mathbb{O}$ mit $x \in O \subseteq U$. Gilt $U \subseteq V$, dann auch $x \in O \subseteq V$, d.h. auch V ist eine Umgebung von x.

(U4) Sei $U \in \mathbb{U}_x$, dann gibt es $O \in \mathbb{O}$ mit $x \in O \subseteq U$. Setze $V := O$, dann gilt für $y \in V$, dass $y \in O \subseteq U$, d.h. $U \in \mathbb{U}_y$.

Folgerung

Für $O \subseteq X$ gilt die Äquivalenz $O \in \mathbb{O} \Leftrightarrow \forall x \in O : O \in \mathbb{U}_x$, d.h. offen sind gerade die Mengen, die Umgebung all ihrer Punkte sind.

Beweis

$\Rightarrow$: Klar, denn für $x \in O$ ist $x \in O \subseteq O$, also $O \in \mathbb{U}_x$.

$\Leftarrow$: Zu $x \in O$ gibt es nach Voraussetzung stets ein $O_x \in \mathbb{O}$ mit $x \in O_x \subseteq O$. Damit $O = \bigcup\limits_{x \in O} O_x \in \mathbb{O}$.

Definition

Sei $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum. Wenn sich in $(X, \mathbb{O})$ zwei verschiedene Punkte stets durch offene Umgebungen trennen lassen, d.h. wenn gilt

(U5) $\forall x, y \in X,\ x \neq y : \exists U_x \in \mathbb{U}_x,\ U_y \in \mathbb{U}_y : U_x \cap U_y = \emptyset$,

dann heißt $(X, \mathbb{O})$ ein *Hausdorffraum*.

Behauptung

Sei (X, δ) ein semimetrischer Raum. Dann gelten:

(1) Seien $U \subseteq X$ und $x \in X$, dann $U \in \mathbb{U}_x \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : U_x^\epsilon \subseteq U$.

(2) (X, δ) ist ein metrischer Raum $\Leftrightarrow$ $(X, \mathbb{O}(\delta))$ ist ein Hausdorffraum.

Beweis

(1) $\Rightarrow$: Sei $U \in \mathbb{U}_x$, dann gibt es $O \in \mathbb{O}(\delta)$ mit $x \in O \subseteq U$ und damit auch $\epsilon > 0$ mit $U_x^\epsilon \subseteq O \subseteq U$.

$\Leftarrow$: Klar, da $U_x^\epsilon \in \mathbb{O}(\delta)$.

(2) $\Rightarrow$: Sei (X, δ) ein metrischer Raum, dann gilt für $x, y \in X,\ x \neq y$, dass $\delta(x, y) \neq 0$. Setze $\epsilon := \frac{\delta(x,y)}{2}$, dann sind U_x^ϵ und U_y^ϵ Umgebungen von x, y mit $U_x^\epsilon \cap U_y^\epsilon = \emptyset$. Also ist $(X, \mathbb{O}(\delta))$ ein Hausdorffraum.

$\Leftarrow$: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da $(X, \mathbb{O}(\delta))$ Hausdorffraum, gibt es $U_x \in \mathbb{U}_x$ und $U_y \in \mathbb{U}_y$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Nach (1) gibt es $\epsilon_x, \epsilon_y > 0$ mit $U_x^{\epsilon_x} \subseteq U_x$ und $U_y^{\epsilon_y} \subseteq U_y$. Sei $\epsilon := \min\{\epsilon_x, \epsilon_y\}$, dann sind $U_x^\epsilon, U_y^\epsilon$ schnittleere Umgebungen von x, y und damit $\delta(x, y) > \epsilon > 0$.

1.5 Topologische Grundbegriffe

Definition

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

A heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement A^c offen ist. Die Menge $\{A \subseteq X \mid A^c \in \mathbb{O}\}$ aller abgeschlossenen Mengen von $(X, \mathbb{O})$ wird mit $\mathbb{A}$ bezeichnet.

$\mathrm{Int}(A) := A^\circ := \{a \in X \mid A \in \mathbb{U}_a\}$ heißt das *Innere* von A. Die Elemente von $\mathrm{Int}(A)$ werden als *innere Punkte* von A bezeichnet.

$\mathrm{Cl}(A) := \overline{A} := \{a \in X \mid \forall U \in \mathbb{U}_a : U \cap A \neq \emptyset\}$ heißt der *Abschluss* oder die *abgeschlossene Hülle* von A. Die Elemente von $\mathrm{Cl}(A)$ werden als *Berührpunkte* von A bezeichnet.

$\partial(A) := \{a \in X \mid \forall U \in \mathbb{U}_a : U \cap A = \emptyset \text{ und } U \cap A^c = \emptyset\}$ heißt der *Rand* von A. Elemente aus $\partial(A)$ heißen *Randpunkte* von A.

Satz 7 (Eigenschaften des Inneren)

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gelten:

(1) $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ und $\mathrm{Int}(A) \in \mathbb{O}$.
(2) $\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{O \subseteq A}^{O \in \mathbb{O}} O$, d.h. $\mathrm{Int}(A)$ ist die größte offene Teilmenge von A.
(3) $A \subseteq \mathrm{Int}(A) \Leftrightarrow A \in \mathbb{O}$.
(4) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$.
(5) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.
(6) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Beweis

(1) Sei $a \in \mathrm{Int}(A)$, dann $A \in \mathbb{U}_a$, d.h. $a \in A$ nach (U1).

Nach (U4) gibt es $V \in \mathbb{U}_x$ mit $A \in \mathbb{U}_y$ für alle $y \in V$ und wegen $V \subseteq \mathrm{Int}(A)$ gilt $\mathrm{Int}(A) \in \mathbb{U}_x$, also ist $\mathrm{Int}(A)$ Umgebung all seiner Punkte und damit offen. Also $\mathrm{Int}(A) \in \mathbb{O}$.

(2) Nach (1) gilt $\mathrm{Int}(A) \subseteq \bigcup_{O \subseteq A}^{O \in \mathbb{O}} O$. Ist umgekehrt $A \subseteq O$ für ein $O \in \mathbb{O}$, dann ist O Umgebung all seiner Punkte, d.h. für $x \in O$ gilt stets $O \in \mathbb{U}_x$. Wegen $O \subseteq A$ ist nach (U3) auch $A \in \mathbb{U}_x$, also $O \subseteq \mathrm{Int}(A)$.

(3) $\Rightarrow$: Mit (1) gilt $A \subseteq \mathrm{Int}(A) \Rightarrow A = \mathrm{Int}(A) \Rightarrow A \in \mathbb{O}$.

$\Leftarrow$: Mit (2) gilt $A \in \mathbb{O} \Rightarrow A = \mathrm{Int}(A) \Rightarrow A \subseteq \mathrm{Int}(A)$.

(4) Nach (1) ist $\mathrm{Int}(A) \in \mathbb{O}$ und mit (3) folgt $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$.

(5) Wegen $\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(A)$ und $\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(B)$ folgt $\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$. Umgekehrt ist $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ eine offene Teilmenge von $A \cap B$, also nach (2) $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cap B)$.

(6) Wieder mit (2): $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$ ist eine offene Teilmenge von $A \cup B$, also $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Bemerkung

In (6) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit: Beispielsweise gilt in $(\mathbb{R}, \mathbb{O}(d))$ mit $A := \mathbb{Q}$, $B := \mathbb{Q}^c$, dass $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) = \emptyset \subsetneq \mathbb{R} = \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Satz 8 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen)

Sei $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum. Dann gelten:

(A1) $\emptyset \in \mathbb{A}$, $X \in \mathbb{A}$.

(A2) $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow \bigcap_{A \in \mathbb{A}'} A \in \mathbb{A}$, d.h. beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(A3) $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{A}$ endlich $\Rightarrow \bigcup_{A \in \mathbb{A}'} A \in \mathbb{A}$, d.h. endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis

Folgt über Komplementbildung unmittelbar aus (O1), (O2), (O3):

(A1) $X \in \mathbb{O} \Rightarrow X^c = \emptyset \in \mathbb{A}$ und $\emptyset \in \mathbb{O} \Rightarrow \emptyset^c = X \in \mathbb{A}$.

(A2) $(\bigcap\limits_{A\in\mathbb{A}'} A)^c = (\bigcup\limits_{A\in\mathbb{A}'})A^c \in \mathbb{O} \Rightarrow \bigcap\limits_{A\in\mathbb{A}'} A \in \mathbb{A}$.

(A3) $(\bigcup\limits_{A\in\mathbb{A}'} A)^c = \bigcap\limits_{A\in\mathbb{A}'} A^c \in \mathbb{O} \Rightarrow \bigcup\limits_{A\in\mathbb{A}'} A \in \mathbb{A}$.

Satz 9 (Dualität von Int und Cl)

Sei $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum. Dann gilt: $\forall A \subseteq X : \mathrm{Cl}(A) = (\mathrm{Int}(A^c))^c$ und $\mathrm{Int}(A) = (\mathrm{Cl}(A^c))^c$.

Beweis

Zur ersten Gleichheit: Wir zeigen $(\mathrm{Cl}(A))^c = \mathrm{Int}(A^c)$. Es gilt:

$$x \in (\mathrm{Cl}(A))^c \Leftrightarrow \exists U \in \mathbb{U}_x : U \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U \in \mathbb{U}_x : U \subseteq A^c \Leftrightarrow A^c \in \mathbb{U}_x \Leftrightarrow x \in \mathrm{Int}(A^c).$$

Zur zweiten Gleichheit: Es gilt $\mathrm{Cl}(A^c) = (\mathrm{Int}(A))^c$, also auch $\mathrm{Int}(A) = (\mathrm{Cl}(A^c))^c$.

Satz 10 (Eigenschaften des Abschlusses)

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gelten:

(1) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ und $\mathrm{Cl}(A) \in \mathbb{A}$.
(2) $\mathrm{Cl}(A) = \bigcap_{A\subseteq F}^{F\in\mathbb{A}} F$, d.h. $\mathrm{Cl}(A)$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A.
(3) $\mathrm{Cl}(A) \subseteq A \Leftrightarrow A \in \mathbb{A}$.
(4) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$.
(5) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$.
(6) $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$.

Beweis

Alle Aussagen lassen sich über das Dualitätsprinzip aus den Eigenschaften des Inneren ableiten:

(1) $(\mathrm{Cl}(A))^c \overset{(D)}{=} \mathrm{Int}(A^c) \in \mathbb{O} \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) \in \mathbb{A}$. Außerdem $\mathrm{Cl}(A^c) \overset{(D)}{=} (\mathrm{Int}(A))^c \supseteq A^c \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) \supseteq A$.

(2) $(\mathrm{Cl}(A))^c \overset{(D)}{=} \mathrm{Int}(A^c) = \bigcup_{O\subseteq A^c}^{O\in\mathbb{O}} O = \bigcup_{O^c\subseteq A^c}^{O^c\in\mathbb{O}} O^c = \bigcup_{A\subseteq F}^{F\in\mathbb{A}} F^c = (\bigcap_{A\subseteq F}^{F\in\mathbb{A}} F)^c \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) = \bigcap_{A\subseteq F}^{F\in\mathbb{A}} F$.

(3) $\mathrm{Cl}(A) \subseteq A \Leftrightarrow A^c \subseteq (\mathrm{Cl}(A))^c \overset{(D)}{=} \mathrm{Int}(A^c) \Leftrightarrow A^c \in \mathbb{O} \Leftrightarrow A \in \mathbb{A}$.

(4) $(\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)))^c \overset{(D)}{=} \mathrm{Int}((\mathrm{Cl}(A))^c) \overset{(D)}{=} \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A^c)) = \mathrm{Int}(A^c) = (\mathrm{Cl}(A))^c$, also auch $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$.

(5) $(\mathrm{Cl}(A \cup B))^c \overset{(D)}{=} \mathrm{Int}((A \cup B)^c) = \mathrm{Int}(A^c \cap B^c) = \mathrm{Int}(A^c) \cap \mathrm{Int}(B^c) \overset{(D)}{=} (\mathrm{Cl}(A))^c \cap (\mathrm{Cl}(B))^c = (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B))^c$. Also gilt auch $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$.

(6) $(\mathrm{Cl}(A \cap B))^c \overset{(D)}{=} \mathrm{Int}((A \cap B)^c) = \mathrm{Int}(A^c \cup B^c) \supseteq \mathrm{Int}(A^c) \cup \mathrm{Int}(B^c) \overset{(D}{=} (\mathrm{Cl}(A))^c \cup (\mathrm{Cl}(B))^c = (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B))^c$. Also gilt auch $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$.

Bemerkung

Wieder gilt in (6) im Allgemeinen keine Gleichheit: Betrachtet man erneut $A := \mathbb{Q}$ und $B := \mathbb{Q}^c$ in $(\mathbb{R}, \mathbb{O}(d))$, dann gilt $\emptyset = \mathrm{Cl}(\emptyset) = \mathrm{Cl}(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c) = \mathrm{Cl}(A \cap B) \subsetneq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B) = \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

1.6 Filter und Filterbasen

Definition (Cartan)

Sei X eine nicht leere Menge. $\mathbb{F} \subseteq \wp(X)$ heißt ein *Filter* auf X, falls gelten:

(F1) $\mathbb{F}$ ist nicht leeres System nicht leerer Mengen.
(F2) Zu $F \in \mathbb{F}$ und $G \subseteq X$ mit $F \subseteq G$ liegt stets auch G in $\mathbb{F}$.
(F3) Mit F und G liegt stets auch $F \cap G$ in $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F}_0 \subseteq \wp(X)$ heißt eine *Filterbasis* auf X, falls gelten:

(FB1) $\mathbb{F}_0$ ist nicht leeres System nicht leerer Mengen.
(FB2) Zu $F, G \in \mathbb{F}_0$ gibt es stets ein $H \in \mathbb{F}_0$ mit $H \subseteq F \cap G$.

Notation

Sei $\mathbb{H}$ ein nicht leeres System nicht leerer Mengen. Mit $[\mathbb{H}] := \{G \subseteq X \mid \exists H \in \mathbb{H} : H \subseteq G\}$ bezeichnen wir das System der Obermengen von Mengen aus H.

Bemerkungen

(1) Sei $\mathbb{H}$ ein nicht leeres System nicht leerer Mengen. Dann gilt: $\mathbb{H}$ ist Filterbasis $\Leftrightarrow$ $[\mathbb{H}]$ ist Filter.

$\mathbb{H}$ heißt dann *Filterbasis* von $[\mathbb{H}]$ und $[\mathbb{H}]$ der von $\mathbb{H}$ *erzeugte* Filter.

(2) Seien $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ Filterbasen. Wir nennen $\mathbb{F}_1$ *gröber* als $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_2$ *feiner* als $\mathbb{F}_1$ und schreiben dann $\mathbb{F}_1 \preccurlyeq \mathbb{F}_2$, falls $[\mathbb{F}_1] \subseteq [\mathbb{F}_2]$.

Es gilt: $\mathbb{F}_1 \preccurlyeq \mathbb{F}_2 \Leftrightarrow \mathbb{F}_1 \subseteq [\mathbb{F}_2] \Leftrightarrow \forall F_1 \in \mathbb{F}_1 : \exists F_2 \in \mathbb{F}_2 : F_2 \subseteq F_1$.

$\preccurlyeq$ ist reflexiv und transitiv, aber im Allgemeinen nicht antisymmetrisch.

Beispiele (für Filter und Filterbasen)

(1) Seien X, Y nicht leere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathbb{F}_0$ eine Filterbasis auf X. Dann ist $f(\mathbb{F}_0) := \{f(F) \mid F \in \mathbb{F}_0\}$ eine Filterbasis auf Y.

(2) Seien X eine Menge und $A \subseteq X$ nicht leer. Dann ist $\mathbb{F}_0 := \{A\}$ eine Filterbasis auf X.

(3) Sei X unendlich. Dann ist $\mathbb{F} := \{A \subseteq X \mid A^c \text{ endlich}\}$ ein Filter auf X, der *Kofinalfilter*.

Seien $X = \mathbb{N}$ und $\mathbb{F}$ der Kofinalfilter auf X. Dann gilt: $\mathbb{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : m \in A\}$.

Seien $X \neq \emptyset$, $\alpha : \mathbb{N} \to X$ eine Abbildung und $\mathbb{F} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : m \in A\}$. Dann ist $\mathbb{F}(\alpha) := [\alpha(\mathbb{F})] = \{B \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \alpha(m) \in B\}$ ein Filter auf X, der *Frechet-Filter* der Folge α.

(4) Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathbb{U}_x$ ein Filter auf X mit Filterbasis $\mathbb{O}_x := \{O \in \mathbb{O} \mid x \in O\}$.

Bemerkungen

(1) Ist $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum, dann nennt man Filterbasen von $\mathbb{U}_x$ $(x \in X)$ auch *Umgebungsbasen (lokale Basen)*.

(2) Wir nennen $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{O}$ eine *Basis* von $\mathbb{O}$, wenn es zu jedem $O \in \mathbb{O}$ ein $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B}$ gibt mit $O = \bigcup\limits_{B \in \mathbb{B}'} B$.

Äquivalente Formulierung: $\mathbb{B}$ Basis von $\mathbb{O} \Leftrightarrow \forall O \in \mathbb{O},\ x \in O : \exists B \in \mathbb{B} : x \in B \subseteq O$.

(3) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{O}$ heißt eine *Subbasis* von $\mathbb{O}$, falls $\{\bigcap\limits_{S \in \mathbb{S}'} S \mid \mathbb{S}' \subseteq \mathbb{S} \text{ endlich}\}$ eine Basis von $\mathbb{O}$ ist.

Beispiele (für Umgebungsbasen und Basen)

(1) $\{U_x^\epsilon \mid \epsilon > 0\}$, $\{K_x^\epsilon \mid \epsilon > 0\}$ und $\{U_x^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ bilden für $x \in X$ Umgebungsbasen im semimetrischen Raum (X, δ).

(2) $\{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a \leq b\}$ bildet eine abzählbare Basis auf $(\mathbb{R}, \mathbb{O}(d))$. Man nennt $\mathbb{O}(d)$ daher auch die *Intervalltopologie* auf $\mathbb{R}$.

1.7 Konvergenz und Stetigkeit

Vorbemerkung

In semimetrischen Räumen können viele topologische Begriffe durch Folgenkonvergenz beschrieben werden. Diese wollen wir jetzt mit Hilfe des Filterbegriffs auf beliebige topologische Räume verallgemeinern.

In der Analysis haben wir für eine Folge $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert:

$$\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha :\Leftrightarrow \forall U \in \mathbb{U}_\alpha : \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \alpha_m \in U.$$

Mit dem eben eingeführten Frechet-Filter bedeutet das gerade: $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \Leftrightarrow \mathbb{U}_\alpha \subseteq \mathbb{F}(\alpha)$.

Definition

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $\mathbb{F}_0$ eine Filterbasis auf X. $\mathbb{F}_0$ *konvergiert* gegen $a \in X$, falls das Umgebungssystem von a gröber ist als $\mathbb{F}_0$, d.h. $\mathbb{F}_0 \to a :\Leftrightarrow \mathbb{U}_a \preccurlyeq \mathbb{F}_0$.

a heißt dann ein *Grenzwert* von $\mathbb{F}_0$.

Bemerkung

Grenzwerte müssen nicht eindeutig sein: Im semimetrischen Raum (X, δ) mit $\delta \equiv 0$ konvergieren beispielsweise jede Folge und jeder Filter gegen jedes Element: $\forall a \in X : \mathbb{U}_a = \{X\}$.

Satz 11

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

a liegt genau dann in $\mathrm{Cl}(A)$, wenn es eine Filterbasis $\mathbb{F}_0$ von X gibt mit $\mathbb{F}_0 \to a$ und $\forall F \in \mathbb{F}_0 : F \subseteq A$.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei $a \in \mathrm{Cl}(A)$ d.h. $\forall U \in \mathbb{U}_a : U \cap A \neq \emptyset$. Setze $\mathbb{F}_0 := \{U \cap A \mid U \in \mathbb{U}_a\}$, dann ist $\mathbb{F}_0$ eine Filterbasis mit den geforderten Eigenschaften.

$\Leftarrow$: Seien $\mathbb{F}_0$ eine Filterbasis mit den gewünschten Eigenschaften und $U \in \mathbb{U}_a$. Dann gibt es ein $F \in \mathbb{F}_0$ mit $F \subseteq U$ (insbesondere $F \neq \emptyset$), d.h. $A \cap U \supseteq F \cap U = F \neq \emptyset$.

Bemerkung

In semimetrischen Räumen (X, δ) heißt das gerade: $a \in \mathrm{Cl}(A) \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^\mathbb{N} : \delta(x_n, a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Definition

Seien $(X, \mathbb{O}_X)$ und $(Y, \mathbb{O}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$.

f heißt *stetig* in x, wenn gilt: $\forall U \in \mathbb{U}^Y_{f(x)} : \exists V \in \mathbb{U}^X_x : f(V) \subseteq U$.

Sei $A \subseteq X$. f heißt *stetig* in A, wenn f stetig in a ist für alle $a \in A$.

Ist f stetig mit stetigem Inversem, so heißt f *topologisch* oder *homeomorph*.

Bemerkungen

(1) f stetig in $x \Leftrightarrow \mathbb{U}^Y_{f(x)} \preccurlyeq f(\mathbb{U}^X_x) \Leftrightarrow \forall U \in \mathbb{U}^Y_{f(x)} : f^{-1}(U) \in \mathbb{U}^X_x$.

(2) Sind $\mathbb{B}^X_x$ und $\mathbb{B}^Y_{f(x)}$ Umgebungsbasen von $\mathbb{U}^X_x$ bzw. $\mathbb{U}^Y_{f(x)}$, dann ist f stetig in $x \Leftrightarrow \mathbb{B}^Y_{f(x)} \preccurlyeq f(\mathbb{B}^X_x)$.

(3) Sind (X, δ_x) und Y, δ_Y semimetrische Räume und $a \in A$, dann ist f genau dann stetig in a, wenn gilt: $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : \delta_X(x, a) < \delta \Rightarrow \delta_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Also: f stetig in $a \in X \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^\mathbb{N} : x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Satz 12 (Verkettung stetiger Abbildungen)

Seien $(X, \mathbb{O}_X)$, $(Y, \mathbb{O}_Y)$ und $(Z, \mathbb{O}_Z)$ topologische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Ist f stetig in a und g stetig in $f(a)$, dann ist auch die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ stetig in a.

Beweis

Sei $U \in \mathbb{U}^Z_{g(f(a))}$. Da g stetig, gibt es eine Umgebung $V \in \mathbb{U}^Y_{f(a)}$ mit $g(V) \subseteq U$ und da f stetig, gibt es eine Umgebung $W \in \mathbb{U}^X_a$ mit $f(W) \subseteq V$. Dann auch $g(f(W)) \subseteq U$, d.h. $g \circ f$ ist stetig.

Satz 13

Seien $(X, \mathbb{O}_X)$ und $(Y, \mathbb{O}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $x \in X$ und $\mathbb{F}_0$ eine Filterbasis auf X mit $\mathbb{F}_0 \to x$. Dann gilt: f ist stetig in $x \Leftrightarrow f(\mathbb{F}_0) \to f(x)$.

Beweis

$\Rightarrow$: $\mathbb{F}_0 \to x \Rightarrow \mathbb{U}^X_x \preccurlyeq \mathbb{F}_0 \Rightarrow \mathbb{U}^Y_{f(x)} \preccurlyeq f(\mathbb{U}^X_x) \preccurlyeq f(\mathbb{F}_0)$, also $f(\mathbb{F}_0) \to f(x)$.
$\Leftarrow$: $\mathbb{U}^X_x \to x \Rightarrow f(\mathbb{U}^X_x) \to f(x) \Rightarrow \mathbb{U}^Y_{f(x)} \preccurlyeq f(\mathbb{U}^X_x)$, d.h. f ist stetig in x.

Satz 14 (Charakterisierung der Stetigkeit)

Seien $(X, \mathbb{O}_X)$ und $(Y, \mathbb{O}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathbb{S}_Y$ eine Subbasis von $\mathbb{O}_Y$. Dann sind äquivlent:

(1) f ist stetig.
(2) $\forall O \in \mathbb{O}_Y : f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_X$, d.h. Urbilder offener Mengen sind offen.
(3) $\forall O \in \mathbb{S}_Y : f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_X$.
(4) $\forall A \in \mathbb{A}_Y : f^{-1}(A) \in \mathbb{A}_1$, d.h. Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
(5) $\forall A \subseteq X : f(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Cl}(f(A))$, d.h. das Bild vom Abschluss liegt im Abschluss vom Bild.

Beweis

(1)$\Rightarrow$(5): Sei $U \in \mathbb{U}^Y_{f(a)}$. Da f stetig, gibt es ein $V \in \mathbb{U}^X_a$ mit $f(V) \subseteq U$ und da $a \in \mathrm{Cl}(A)$, ist $V \cap A \neq \emptyset$. Also $\emptyset \neq f(V \cap A) \subseteq f(V) \cap f(A) \subseteq U \cap f(A)$, d.h. $f(a) \in \mathrm{Cl}(f(A))$.

(5)$\Rightarrow$(4): Zu $A \in \mathbb{A}_Y$ setze $F := f^{-1}(A)$. Dann gilt $f(F) \subseteq A$, also $f(\mathrm{Cl}(F)) \subseteq \mathrm{Cl}(f(F)) \subseteq \mathrm{Cl}(A) = A$, somit $\mathrm{Cl}(F) \subseteq f^{-1}(A) = F$, d.h. $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen.

(4)$\Rightarrow$(2): Sei $O \in \mathbb{O}_Y$, dann $O^c \in \mathbb{A}_Y$, d.h. $(f^{-1}(O))^c = f^{-1}(O^c) \in \mathbb{A}_X$ und damit $O \in \mathbb{O}_X$.

(2)$\Rightarrow$(3): Klar wegen $\mathbb{S}_Y \subseteq \mathbb{O}_Y$.

(3)$\Rightarrow$(2): Sei $O \in \mathbb{O}_Y$. Da $\mathbb{S}_Y$ eine Subbasis von $\mathbb{O}_Y$ ist, gibt es Indexmengen I, J, wobei I endlich, so dass $O = \bigcup\limits_{j \in J} \bigcap\limits_{i \in I} S_{ij}$ (alle $S_{ij} \in \mathbb{S}_Y$). Damit gilt:

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} S_{ij}\right) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f^{-1}(S_{ij}).$$

$f^{-1}(S_{ij})$ ist nach Voraussetzung für alle i, j offen, also auch $f^{-1}(O)$ als Vereinigung endlicher Schnitte offener Mengen.

(2)$\Rightarrow$(1) Sei $x \in X$. Zu $U \in \mathbb{U}^Y_{f(x)}$ gibt es ein $O \in \mathbb{O}_Y$ mit $f(x) \in O \subseteq U$. Wegen $x \in f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_X$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathbb{U}^X_x$ mit $f(f^{-1}(O)) \subseteq O \subseteq U$.

Bemerkung

Das Bild einer offenen (abgeschlossenen) Menge unter einer stetigen Abbildung ist im Allgemeinen nicht offen (abgeschlossen).

1.8 Initiale und finale Topologien

Definition

Seien $(X, \mathbb{O}_1)$ und $(X, \mathbb{O}_2)$ topologische Räume. Dann heißt $\mathbb{O}_1$ *feiner* als $\mathbb{O}_2$ und $\mathbb{O}_2$ *gröber* als $\mathbb{O}_1$, falls $\mathbb{O}_2 \subseteq \mathbb{O}_1$.

Folgerung

Für topologische Räume $(X, \mathbb{O}_1)$ und $(X, \mathbb{O}_2)$ sind äquivalent:

(1) $\mathbb{O}_1$ ist feiner als $\mathbb{O}_2$.
(2) $\forall x \in X : \mathbb{U}^1_X$ ist feiner als $\mathbb{U}^2_x$.
(3) $\forall A \in \wp(X) : \operatorname{Int}^1(A) \supseteq \operatorname{Int}^2(A)$.
(4) $\forall A \in \wp(X) : \operatorname{Cl}^1(A) \subseteq \operatorname{Cl}^2(A)$.
(5) $\operatorname{id} : (X, \mathbb{O}_1) \to (X, \mathbb{O}_2)$ ist stetig.

Definition

Seien I eine nicht leere Indexmenge und X eine nicht leere Menge. Für $i \in I$ seien $(Y_i, \mathbb{O}_i)$ ein topologischer Raum und $f_i : X \to Y_i$ eine Abbildung.

Die gröbste Topologie, bzgl. der alle f_i stetig sind, heißt die *Initialtopologie* auf X bzgl. den f_i.

Beispiel

Seien X eine nicht leere Menge, $(Y, \mathbb{O}_Y)$ ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist die *Urbildtopologie* $\mathbb{O} := \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathbb{O}_Y\}$ die initiale Topologie auf X bzgl. f.

Satz 15 (Initiale Topologie)

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &:= \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(O_j) \mid O_j \in \mathbb{O}_j,\ I \supseteq J \text{ endlich} \right\} \text{ und} \\ \mathbb{O} &:= \left\{ \bigcup_{B \in \mathbb{B}'} B \mid \mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B} \right\}. \end{aligned}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) $(X, \mathbb{O})$ ist ein topologischer Raum.

(2) $\mathbb{S} := \{f_i^{-1}(O_i) \mid i \in I,\ O_i \in \mathbb{O}_i\}$ ist eine Subbasis von $\mathbb{O}$.

(3) $\mathbb{O}$ ist die Initialtopologie auf X.

(4) Für $x \in X$ und $U \subseteq X$ gilt: U ist genau dann eine $\mathbb{O}$-Umgebung von x, wenn ein endliches $J \subseteq I$ und $U_j \in \mathbb{U}^j_{f_j(x)}$ $(j \in J)$ existieren mit $\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \subseteq U$.

(5) Seien $(X', \mathbb{O}')$ ein topologischer Raum, $f : X' \to X$ und $x' \in X'$. Dann ist f genau dann stetig in x', wenn $\forall i \in I : f_i \circ f : X' \to F_i$ in x' stetig ist.

Beweis

(1) Sei $i \in I$, dann $\emptyset = f_i^{-1}(\emptyset) \in \mathbb{O}$ und $X = f_J^{-1}(Y_i) \in \mathbb{O}$.

Sei $J \neq \emptyset$ mit $\{O_j \mid j \in J\} \subseteq \mathbb{O}$, dann gibt es $\mathbb{B}_j \subseteq \mathbb{B}$ mit $O_j = \bigcup_{B \in \mathbb{B}_j} B$ für jedes $j \in J$ und wegen $\mathbb{B}' := \bigcup_{j \in J} \mathbb{B}_j \subseteq \mathbb{B}$ liegt auch $\bigcup_{j \in J} O_j = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{B \in \mathbb{B}_j} B = \bigcup_{B \in \mathbb{B}'} B$ in $\mathbb{O}$.

Seien $O_1, O_2 \in \mathbb{O}$, dann gibt es $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}$ mit $O := O_1 \cap O_2 = \bigcup_{B \in \mathbb{B}_1} B \cap \bigcup_{B \in \mathbb{B}_2} B = \bigcup_{B_1 \in \mathbb{B}_1}^{B_2 \in \mathbb{B}_2} B_1 \cap B_2$ und aus der Schnittstabilität von $\mathbb{B}$ folgt die Behauptung.

Also ist $\mathbb{O}$ eine Topologie auf X.

(2) Klar nach Definition einer Subbasis.

(3) Offensichtlich muss die Initialtopologie $\mathbb{O}$ enthalten. Sei also $\mathbb{T}$ eine Topologie auf X. Dann gilt:

$$\forall i \in I : f_i : (X, \mathbb{T}) \to (Y_i, \mathbb{O}_i) \text{ stetig} \overset{14}{\Leftrightarrow} \forall i \in I, O_i \in \mathbb{O}_i : f^{-1}(O_i) \in \mathbb{T} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathbb{O} \subseteq \mathbb{T}.$$

(4) Es gilt:

$$\begin{aligned} & U \text{ ist } \mathbb{O}\text{-Umgebung von } x \\ \Leftrightarrow\quad & \text{es gibt } O \in \mathbb{O} \text{ mit } x \in O \subseteq U \\ \Leftrightarrow\quad & \text{es gibt } I \supseteq J \text{ endlich und } O_j \in \mathbb{O}_j \ (j \in J) \text{ mit } x \in \bigcap f_j^{-1}(O_j) \subseteq U \\ \Leftrightarrow\quad & \text{es gibt } I \supseteq J \text{ endlich und } U_j \in \mathbb{U}^j_{f_j(x)} \ (j \in J) \text{ mit } \bigcap f_j^{-1}(U_j) \subseteq U \end{aligned}$$

(5) $\Rightarrow$ ist klar, da Verkettungen stetiger Abbildungen stetig sind.

Zu $\Leftarrow$: Nach (4) gibt es zu $U \in \mathbb{U}^{\mathbb{O}}_{f(x')}$ ein $I \supseteq J$ endlich, $U_j \in \mathbb{U}^j_{f_j(f(x'))}$ $(j \in J)$ mit $\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \subseteq U$, also

$$\bigcap_{j \in J} \underbrace{(f_j \circ f)^{-1}(U_j)}_{\in \mathbb{U}^{\mathbb{O}'}_{x'}} = f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \right) \subseteq f^{-1}(U).$$

Also ist $f^{-1}(U) \in \mathbb{U}^{\mathbb{O}'}_{x'}$.

Definition

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und M eine nicht leere Teilmenge von X. Bezeichne $\iota : M \to X$, definiert durch $\iota(m) := m$, die Einbettung von M in X.

Die initiale Topologie $\mathbb{O}_M$ auf M bzgl. ι wird *Spurtopologie (Relativtopologie)* genannt.

Bemerkung

Da die Spurtopologie auf M gerade die Urbildtopologie unter ι ist, gilt $\mathbb{O}_M = \{\iota^{-1}(O) \mid O \in \mathbb{O}\}$, also $\mathbb{O}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathbb{O}\}$.

Aus Satz 15 folgt dann sofort, dass $(M, \mathbb{O}_M)$ ein topologischer Raum ist und für $(X', \mathbb{O}')$ topologischer Raum, $f : X' \to M$, $x' \in X'$ gilt: f ist stetig in $x' \Leftrightarrow \iota \circ f : (X', \mathbb{O}') \to (X, \mathbb{O})$ ist stetig in x'.

Korollar 16 (Spurtopologie)

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ nicht leer und ι die Einbettung von M in X. Dann gelten:

(1) $\forall x \in M : \mathbb{U}^{\mathbb{O}_M}_x = \{U \cap M \mid U \in \mathbb{U}^{\mathbb{O}}_x\}$.
(2) $\mathbb{A}^{\mathbb{O}_M} = \{A \cap M \mid A \in \mathbb{A}^{\mathbb{O}}\}$.
(3) Für $M \subseteq N$ nicht leer gilt: $(\mathbb{O}_M)_N = \mathbb{O}_N$ und $\mathrm{Cl}^{\mathbb{O}_M}(N) = \mathrm{Cl}^{\mathbb{O}}(N) \cap M$.
(4) Sei $m \in M$, dann f stetig in $m \Rightarrow f_M$ stetig in m (Umkehrung ist i.A. falsch).

Beweis

(1) Seien $m \in M$ und $U \subseteq M$. Nach Satz 15 gilt dann:

$$U \in \mathbb{U}^{\mathbb{O}_M}_m \Leftrightarrow \exists U' \in \mathbb{U}^{\mathbb{O}}_x : U' \cap M = \iota^{-1}(U') \subseteq U \Leftrightarrow U \in \{U \cap M \mid U \in \mathbb{U}^{\mathbb{O}}_x\}.$$

(2) Sei $A \subseteq M$, dann liegt A genau dann in $\mathbb{A}^{\mathbb{O}_M}$, wenn es ein $O \in \mathbb{O}$ gibt mit $A = M \backslash (O \cap M) = M \cap O^c$.

(3) $(\mathbb{O}_M)_N = \mathbb{O}_N$ ist klar und $x \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{O}_M}(N) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \forall U \in \mathbb{U}^{\mathbb{O}}_x : \emptyset \neq (U \cap M) \cap N = U \cap N \Leftrightarrow x \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{O}}(N) \cap M$.

(4) $f_M = f \circ \iota$ ist stetig als Verkettung stetiger Abbildungen.

Setzt man $X = X' = \mathbb{R}$, $\mathbb{O} = \mathbb{O}' = \mathbb{O}(d)$, $f = \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \left\{\begin{smallmatrix} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right.$ und $M = \mathbb{Q}$, dann ist f_M auf ganz M stetig, aber f in keinem einzigen $x \in \mathbb{R}$.

Definition

Seien I eine nicht leere Indexmenge, $(X_i, \mathbb{O}_i)$ topologische Räume $(i \in I)$, $X := \prod_{i \in I} X_i$ der Produktraum der X_i und $p_j : X \to X_j$, $(x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$ die *Projektion* von X auf X_j.

Die Initialtopologie auf X bzgl. der p_i heißt die *Produkttopologie* auf X.

Bemerkung

Seien $J \subseteq I$ mit $M_j \subseteq X_j$ $(j \in J)$ und $M_i = X_i$ für alle $i \in I \backslash J$. Dann gilt: $\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(M_j) = \prod_{i \in I} M_i$ $(*)$.

Korollar 17 (Produkttopologie)

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &:= \left\{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_j \in \mathbb{O}_j \ (j \in J),\ O_i = X_i \ (i \in I \backslash J),\ I \supseteq J \text{ endlich} \right\} \text{ und} \\ \mathbb{O} &:= \left\{ \bigcup_{B \in \mathbb{B}'} B \mid \mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B} \right\}. \end{aligned}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1) $(X, \mathbb{O})$ ist ein topologischer Raum.

(2) $\mathbb{O}$ ist die Produkttopologie auf X.

(3) Seien $x \in X$ und $U \subseteq X$. Genau dann ist U eine Umgebung von x, wenn ein endliches $J \subseteq I$ und $U_j \in \mathbb{U}_{x_j}^{\mathbb{O}_j}$ existieren $(j \in J)$, so dass $\prod_{i \in I} U_i \subseteq U$ (wobei $U_i = X$ für $i \in I \backslash J$).

(4) Seien $(X', \mathbb{O}')$ ein topologischer Raum, $f : X' \to X$ und $x' \in X'$. Dann ist f genau dann stetig in x', wenn $\forall i \in I : p_i \circ f : X' \to X_i$ in x' stetig ist.

Beweis

Klar als Spezialfall von Satz 15 mit $(*)$.

Folgerung

(1) Sei $A_i \subseteq X_i$ $(i \in I)$, dann gilt $\prod_{i \in I} \mathrm{Cl}(A_i) = \mathrm{Cl}(\prod_{i \in I} A_i)$.

(2) $\forall i \in I,\ O \in \mathbb{O} : p_i(O) \in \mathbb{O}_i$, d.h. die p_i sind *offene Abbildungen*.

(3) Für $A \in \mathbb{A}$ gilt i.A. nicht $p_i(A) \in \mathbb{A}_i$ $(i \in J)$, d.h. die p_i müsssen nicht *abgeschlossen* sein.

Beweis

(1) Gelte Œ $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ (andernfalls steht auf beiden Seiten die leere Menge).

$\supseteq$ ist klar, denn nach Satz 14 gilt $p_j(\mathrm{Cl}(\prod_{i \in I} A_i)) \subseteq \mathrm{Cl}(p_j(\prod_{i \in I} A_i)) = \mathrm{Cl}(A_j)$.

Seien also $a \in \prod_{i \in I} \mathrm{Cl}(A_i)$ und U eine $\mathbb{O}$-Umgebung von a. Wir müssen zeigen, dass $U \cap \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Zu U gibt es nach Korollar 17 $I \supseteq J$ endlich mit $U_j \in \mathbb{U}_{a_j}^{\mathbb{O}_j}$ $(j \in J)$ und $U_i = X_i$ für $i \in I \backslash J$, so dass $\prod_{i \in I} U_i \subseteq U$. Für jedes $i \in I$ gibt es $x_i \in U_i \cap A_i$, also ein $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i \cap \prod_{i \in I} A_i$.

Also $a \in \mathrm{Cl}(\prod_{i \in I} A_i)$.

(2) Es genügt zu zeigen, dass für $B = \prod_{i \in I} O_i$ mit $O_i \in \mathbb{O}_i$ $(i \in I)$ gilt, dass $p_j(B) \in \mathbb{O}_j$ $(j \in J)$.

Sei also $j \in J$, dann $p_j(B) = O_j$ für $B \neq \emptyset$ und $p_j(B) = \emptyset$ sonst, also $p_j(B) \in \mathbb{O}_j$.

(3) Seien $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{O}(d)$ und $\mathbb{R}^2$ mit der Produkttopologie versehen. Dann ist $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ abgeschlossen in der Produkttopologie, aber $p_1(A) = p_2(A) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{O}(d)$.

Definition

Seien I und X nicht leere Mengen, $(X, \mathbb{O}_i)$ topologische Räume ($i \in I$) und $f_i := \mathrm{id}_X$ ($i \in I$).

Dann heißt die Initialtopologie auf X bzgl. der f_i die *Supremumstopologie* der $\mathbb{O}_i$ auf X.

Bemerkung

Die Supremumstopologie ist also die gröbste Topologie auf X, die feiner als alle $\mathbb{O}_i$ ist.

Definition

Seien $X \neq \emptyset$, $\mathbb{S} \subseteq \wp(X)$. Die gröbste Topologie $\mathbb{O}$ auf X mit $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{O}$ heißt die von $\mathbb{S}$ *erzeugte Topologie*.

Bemerkung

Im Fall $\mathbb{S} = \emptyset$ ist $\mathbb{O}$ offensichtlich gerade die *chaotische Topologie* $\{\emptyset, X\}$. Andernfalls ist für $S \in \mathbb{S}$ das System $\mathbb{O}_S := \{\emptyset, S, X\}$ eine Topologie auf X und die von $\mathbb{S}$ erzeugte Topologie $\mathbb{O}$ die Supremumstopologie der $\mathbb{O}_S$ auf X.

Nach Satz 15 (2) ist $\mathbb{S}$ eine Subbasis der von $\mathbb{S}$ erzeugten Topologie $\mathbb{O}$.

Definition

Seien I eine nicht leere Indexmenge, Y eine nicht leere Menge, $(X_i, \mathbb{O}_i)$ topologische Räume und $f_i : X_i \to Y$ Abbildungen ($i \in I$).

Die feinste Topologie auf Y, bzgl. der alle f_i stetig sind, heißt die *finale Topologie* auf X bzgl. der f_i.

Satz 18 (Finale Topologie)

Wir definieren

$$\mathbb{O} := \{O \subseteq Y \mid \forall i \in I : f_i^{-1}(O) \in \mathbb{O}_i\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) $(Y, \mathbb{O})$ ist ein topologischer Raum.

(2) $\mathbb{O}$ ist die Finaltopologie auf Y.

(3) Seien $Y', \mathbb{O}'$ ein topologischer Raum und $f : Y \to Y'$ eine Abbildung. $f : (Y, \mathbb{O}) \to (Y', \mathbb{O}')$ ist genau dann stetig, wenn zu jedem $i \in I$ die Verkettung $f \circ f_i : (Y_i, \mathbb{O}_i) \to (Y', \mathbb{O}')$ stetig ist.

Beweis

(1) Klar: Für jedes $i \in I$ gilt $\emptyset = f_i^{-1}(\emptyset) \in \mathbb{O}_i$ und $X_i = f_i^{-1}(Y) \in \mathbb{O}_i$, also $\emptyset, Y \in \mathbb{O}$.

Seien $J \neq \emptyset$ mit $\{O_j \mid j \in J\} \subseteq \mathbb{O}$ und $i \in I$, dann $f_i^{-1}(\bigcup_{j \in J} O_j) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(O_j) \in \mathbb{O}_i$, d.h. $\bigcup_{j \in J} O_j \in \mathbb{O}$.

Seien $O_1, O_2 \in \mathbb{O}$ und $i \in I$, dann $f_i^{-1}(O_1 \cap O_2) = f_i^{-1}(O_1) \cap f_i^{-1}(O_2) \in \mathbb{O}_i$, also $O_1 \cap O_2 \in \mathbb{O}$.

Also ist $\mathbb{O}$ eine Topologie auf Y.

(2) Offensichtlich muss die Finaltopologie $\mathbb{O}$ enthalten. Sei also $\mathbb{T}$ eine Topologie auf X. Dann gilt:

$$\forall i \in I : f_i : (X_i, \mathbb{O}_i) \to (Y, \mathbb{T}) \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall i \in I,\ O \in \mathbb{T} : f_i^{-1}(O) \in \mathbb{O}_i \Leftrightarrow \mathbb{T} \subseteq \mathbb{O}.$$

(3) $\Rightarrow$ ist klar, da Verkettungen stetiger Abbildungen stetig sind.

Zu $\Leftarrow$: Für $O' \in \mathbb{O}'$, $i \in I$ gilt $f_i^{-1}(f^{-1}(O')) = (f \circ f_i)^{-1}(O') \in \mathbb{O}_i$, also $f^{-1}(O') \in \mathbb{O}$.

Definition

Seien $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge, X_i paarweise disjunkt ($i \in I$), $(X_i, \mathbb{O}_i)$ topologische Räume, $X := \bigcup_{i \in I} X_i$ und $\iota_i : X_i \to X,\ x \mapsto x$ ($i \in I$) die i-te *Inklusuionsabbildung*.

Die Finaltopologie auf X bzgl. der ι_i heißt die *Summentopologie* auf X.

Bemerkung

(1) Für $O \subseteq X$ gilt $O \in \mathbb{O} \Leftrightarrow \forall i \in I : O \cap X_i \in \mathbb{O}_i$. Insbesondere ist für jedes $i \in I$ X_i ein offener Unterraum von X und ι_i eine offene Abbildung.

(2) Ist umgekehrt $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum, wobei $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ disjunkte Zerlegung offener Unterräume, dann ist $\mathbb{O}$ bereits die Summentopologie auf X.

Definition

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X mit zugehörigen Äquivalenzklassen $[\cdot]_\sim$ (d.h. $[x]_\sim := \{y \in X \mid x \sim y\}$ $(x \in X)$), $X_\sim$ der Quotientenraum bzgl. $\sim$ und $\pi : X \to X_\sim$ mit $x \mapsto [x]_\sim$ die *kanonische Projektion*.

Die Finaltopologie auf $X_\sim$ bzgl. π heißt die *Quotiententopologie* auf $X_\sim$.

Bemerkung

(1) $\mathbb{O}(\sim) := \{O \subseteq X_\sim \mid \pi^{-1}(O) \in \mathbb{O}\}$ ist die Quotiententopologie auf $X_\sim$. $(X, \mathbb{O}(\sim))$ heißt der *Quotientenraum* von X *modulo* $\sim$.

(2) Seien $(X', \mathbb{O}')$ ein topologischer Raum und $f : X_\sim \to X'$ eine Abbildung. $f : (X_\sim, \mathbb{O}(\sim)) \to (X', \mathbb{O}')$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : (X, \mathbb{O}) \to (X', \mathbb{O}')$ stetig ist.

Definition

Seien I und X nicht leere Mengen, $(X, \mathbb{O}_i)$ topologische Räume $(i \in I)$ und $f_i := \mathrm{id}_X$ $(i \in I)$.

Dann heißt die Finaltopologie auf X bzgl. der f_i die *Infimumstopologie* der $\mathbb{O}_i$ auf X.

Bemerkung

Die Finaltopologie ist also die feinste Topologie auf X, die gröber als alle $\mathbb{O}_i$ ist.

2 Normierte Vektorräume und Operatoren

2.1 Grundeigenschaften normierter Räume

Satz 19

Sei $(X, a, s, ||\cdot||)$ ein halbnormierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann gelten:

(1) $\forall x, y \in X : |\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x \pm y|| \leq ||x|| + ||y||$.

(2) Zu $x, y \in X$ definert $\delta(x, y) := ||x - y||$ eine Semimetrik auf X.

(3) $(X, \mathbb{O}(\delta))$ Hausdorffraum $\Leftrightarrow$ δ Metrik $\Leftrightarrow$ $||\cdot||$ Norm.

(4) Die Abbildungen $a : X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x + y$ und $s : \mathbb{K} \times X \to X,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ sind stetig.

(5) Die Normabbildung $||\cdot||$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis

(1), (2) und (3) sind klar bzw. wurden schon gezeigt.

(4): Seien $x, y, v, w \in X$, dann

$$||a(x, y) - a(v, w)|| = ||x + y - (v + w)|| \leq ||x - v|| + ||y - w||,$$

d.h. für $x \to v,\ y \to w$ konvergiert auch $x + y$ (gleichmäßig) gegen $v + w$.

Seien $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dann

$$||s(\alpha, x) - s(\beta, y)|| = ||\alpha x - \beta y|| = ||\alpha x - \beta x + \beta x - \beta y|| \leq |\alpha - \beta|||x|| + |\beta|||x - y||,$$

d.h. für $x \to y$ und $\alpha \to \beta$ konvergiert auch αx punktweise gegen βy.

(5) Mit (1): $\forall x, y \in X : |\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x - y||$, d.h. für $x \to y$ konvergiert $||x||$ gleichmäßig gegen $||y||$.

Definition

Sei (X, a, s) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A \subseteq X$. Dann heißt A ein *Teilraum* von X, falls A nicht leer und abgeschlossen unter a und s ist, d.h. falls $\forall x, y \in A,\ \alpha \in \mathbb{K} : x + y \in A,\ \alpha x \in A$.

Bemerkung

(1) $(A, a_{|A}, s_{|A})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(2) Mit A ist auch $\mathrm{Cl}(A)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum: $a(\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(A)) = a(\mathrm{Cl}(A \times A)) \subseteq \mathrm{Cl}(a(A \times A)) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ und $s(\mathbb{K} \times \mathrm{Cl}(A)) = s(\mathrm{Cl}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Cl}(A)) = s(\mathrm{Cl}(\mathbb{K} \times A)) = \mathrm{Cl}(s(\mathbb{K} \times A)) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Satz 20

Seien X ein halbnormierter Vektorraum über $\mathbb{K}$, $y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Dann sind die Abbildungen $T_y : X \to X,\ x \mapsto x + y$ und $M_\lambda : X \to X,\ x \mapsto \lambda x$ topologisch.

Beweis

Mit a und s sind auch T_a und M_λ stetig. Die inversen Funktionen sind offenbar T_{-y} und $M_{\lambda^{-1}}$ und damit ebenfalls stetig.

Definition

Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, ||\cdot||)$ heißt $\mathbb{K}$-*Banachraum*, wenn X bzgl. $||\cdot||$ vollständig ist.

2.2 Grundeigenschaften linearer Abbildungen

Satz 21

Seien E, F normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $T : E \to F$ eine lineare Abbildung (ein sog. *(linearer) Operator*). Dann sind äquivalent:

(1) T ist *beschränkt*, d.h. $\exists \alpha > 0 : \forall x \in E : ||Tx||_F \leq \alpha ||x||_E$.
(2) T ist gleichmäßig stetig.
(3) Es gibt ein $a \in E$, so dass T stetig in a ist.
(4) T ist stetig in 0.

Beweis

(1)⇒(2): Wegen $||Tx - Ty||_F = ||T(x-y)||_F \leq \alpha ||x-y||_E$ konvergiert Tx gleichmäßig gegen Ty, falls x gegen y konvergiert.

(2)⇒(3): Trivial.

(3)⇒(4): Wegen $||Tx - T0||_F = ||T(x+y) - Ty||_F = ||T_y x - T_y 0||_F$ folgt mit der Stetigkeit von T_y, dass Tx für $x \to 0$ gegen $T0 = 0$ konvergiert.

(4)⇒(1): Zu $\epsilon := 1$ gibt es $\delta > 0$ mit $||Tx||_F \leq \epsilon$, falls $||x||_E \leq \delta$. Sei $y \in E \backslash \{0\}$. Setze $x := \delta \frac{y}{||y||_E}$, dann ist $||x||_E = \delta$ und damit $\frac{\delta}{||y||_E} ||Ty||_F = ||Tx||_F \leq 1$, also $||Ty||_F \leq \frac{1}{\delta} ||y||_E$. Also ist T durch $\frac{1}{\delta}$ beschränkt.

Definition

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt ein *Isomorphismus*, wenn T stetig und bijektiv ist und eine stetige Inverse besitzt.

T heißt *normerhaltend*, falls $\forall x \in E : ||Tx||_F = ||x||_E$.

Seien (E, δ_E) und (F, δ_F) metrische Räume. Eine Abbildung $t : E \to F$ heißt *isometrisch*, wenn $\forall x, y \in E : \delta_F(t(x), t(y)) = \delta_E(x, y)$.

Bemerkung

Eine normerhaltende Abbildung ist stets isometrisch:

$$\forall x, y \in E : \delta_F(Tx, Ty) = ||Tx - Ty||_F = ||T(x-y)||_F = ||x-y||_E = \delta_E(x,y).$$

Satz 22

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Vektorräume und $T : E \to F$ linear.

Genau dann ist T ein Isomorphismus, wenn T surjektiv ist und positive m, M existieren, so dass $m||x||_E \leq ||Tx||_F \leq M||x||_E$ für alle $x \in E$.

Beweis

Die Abschätzung impliziert, dass T injektiv ist, denn $Tx = 0 \Rightarrow ||Tx||_F = 0 \Rightarrow ||x||_E = 0 \Rightarrow x = 0$.

Da Stetigkeit äquivalent zur Beschränktheit ist, gilt

$$\begin{aligned} T \text{ stetig} &\Leftrightarrow \exists M \in (0,\infty) : \forall x \in E : ||Tx||_F \leq M||x||_E \text{ und} \\ T^{-1} \text{ stetig} &\Leftrightarrow \exists m \in (0,\infty) : \forall y \in F : ||T^{-1}(y)|| \leq \frac{1}{m}||x||_E \\ &\Leftrightarrow \exists m \in (0,\infty) : \forall x \in E : m||x||_E \leq ||Tx||_F. \end{aligned}$$

Definition

Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ zwei Normen auf E. $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ heißen *äquivalent*, falls $m, M \in (0,\infty)$ existieren mit $m||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M||x||_1$ für alle $x \in E$.

Satz 23

Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ zwei Normen auf E. Dann gelten:

(1) $\mathbb{O}(||\cdot||_1) \supseteq \mathbb{O}(||\cdot||_2) \Leftrightarrow \exists \alpha \in (0,\infty) : \forall x \in E : ||x||_F \leq \alpha ||x||_E$.

(2) $\mathbb{O}(||\cdot||_2) = \mathbb{O}(||\cdot||_1) \Leftrightarrow ||\cdot||_2$ und $||\cdot||_1$ sind äquivalent.

Beweis

(1) $\mathbb{O}(||\cdot||_1) \supseteq \mathbb{O}(||\cdot||_2) \Leftrightarrow \mathrm{id} : (E, ||\cdot||_1) \to (E, ||\cdot||_2)$ ist stetig $\Leftrightarrow \exists \alpha \in (0,\infty) : \forall x \in E : ||x||_F \leq \alpha ||x||_E$.

(2) Folgt direkt aus (1).

Konvention

Wir setzen $0 \cdot \infty := 0$ und $\sup\{\emptyset\} := 0$.

Definition

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Vektorräume und $T : E \to F$ linear.

$||T|| := \inf\{\alpha \in [0,\infty] \mid \forall x \in E : ||Tx||_F \leq \alpha ||x||_E\}$ heißt die *Operatornorm* von T.

Bemerkung

In Satz 25 werden wir zeigen, dass $||\cdot||$ tatsächlich eine Norm auf der Menge aller linearen, stetigen Abbildungen $T : E \to F$ definiert.

Satz 24 (Operatornorm)

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Vektorräume und $T : E \to F$ linear. Dann gilt:

$$||T|| = \min\{\alpha \in [0,\infty] \mid \forall x \in E : ||Tx||_F \leq \alpha ||x||_E\}.$$

Setze

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sup\{\frac{||Tx||_F}{||x||_E} \mid x \in E\backslash\{0\}\}; \\ S_2 &:= \sup\{||Tx||_F \mid x \in E,\ ||x||_E \leq 1\}; \\ S_3 &:= \sup\{||Tx||_F \mid x \in E,\ ||x||_E = 1\}; \\ S_4 &:= \sup\{||Tx||_F \mid x \in E,\ ||x||_E < 1\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = ||T||$.

Beweis

(1) Zur ersten Gleichheit: Gelte Œ $||T|| < \infty$. Seien $x \in E,\ n \in \mathbb{N}$, dann $||Tx||_F \leq (||T|| + \frac{1}{n})||x||_E$, also auch $||Tx||_F \leq ||T|| ||x||_E$, d.h. das Infimum wird tatsächlich angenommen.

(2) Sei $\alpha \in [0,\infty]$. Wegen $\forall x \in E : ||Tx||_F \leq \alpha ||x||_E \Leftrightarrow \forall x \in E\backslash\{0\} : \frac{||Tx||_F}{||x||_E} \leq \alpha \Leftrightarrow S_1 \leq \alpha$ gilt $S_1 \leq ||T||$, also $S_1 = ||T||$.

(3) Wir zeigen $S_3 \leq S_2 \leq S_1 \leq S_3$, also $S_2 = S_3 = ||T||$. $S_3 \leq S_2$ ist klar. Sei $0 < ||x||_E \leq 1$, dann $||Tx||_F \leq \frac{||Tx||_F}{||x||_E} \leq S_1$, also $S_2 \leq S_1$. Schließlich gilt für $x \in E\backslash\{0\}$, dass $\frac{||Tx||_F}{||x||_E} = ||T(\frac{x}{||x||_E})||_F \leq S_3$, also $S_1 \leq S_3$.

(4) Offenbar gilt $S_4 \leq S_2$. Wir zeigen, dass auch $S_3 \leq S_4$ und erhalten damit $S_4 = ||T||$. Seien dazu $\alpha \in (0,1)$ und $x \in E$ mit $||x||_E = 1$, dann $||\alpha x||_E = \alpha < 1$ und damit $\alpha ||Tx||_F = ||T(\alpha x)||_F \leq S_4$, d.h. $\alpha S_3 \leq S_4$ und damit (für $\alpha \to 1$) auch $S_3 \leq S_4$.

2.3 Der Raum der stetigen Operatoren

Definition

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann heißt die Menge

$$L(E,F) := \{A \in \mathrm{Abb}(E,F) \mid A \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear und stetig}\},$$

versehen mit der Operatornorm $||\cdot||$, der *Raum der stetigen Operatoren zwischen E und F*.

Beispiel

Wir betrachten die mit $||\cdot||_\infty$ versehenen $\mathbb{R}$-Vektorräume

$$\begin{aligned} E &:= \mathfrak{C}^1([0,1]) := \{f \in \mathrm{Abb}([0,1],\mathbb{R}) \mid f \text{ ist differenzierbar}\} \text{ und} \\ F &:= \mathfrak{C}^0([0,1]) := \{f \in \mathrm{Abb}([0,1],\mathbb{R}) \mid f \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung $D : E \to F,\ f \mapsto f'$ ist linear (da $(f+g)' = f' + g'$ und $(\alpha f)' = \alpha f'$), aber nicht stetig. Für die Monome $t_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^n$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt nämlich $||t_n||_\infty = 1$ und $||Dt_n||_\infty = n$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\forall f \in \mathfrak{C}^1([0,1]) : ||Df||_\infty \le \alpha ||f||_\infty$, also ist D unbeschränkt.

Satz 25

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann gelten:

(1) $L(E,F)$ ist ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.
(2) Ist $(F, ||\cdot||_F)$ vollständig, dann auch $L(E,F)$.

Beweis

(1) $L(E,F)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, denn seien $S, T \in L(E,F),\ \alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in E$. Dann gilt:

$$||(\alpha S + T)x||_F = ||\alpha Sx + Tx||_F \le |\alpha| ||Sx||_F + ||Tx||_F \le (|\alpha| ||S|| + ||T||) ||x||_E,$$

also $||\alpha S + T|| \le |\alpha| ||S|| + ||T|| < \infty$ und damit $\alpha S + T \in L(E,F)$.

$||\cdot||$ ist eine Norm: $||S+T|| \le ||S|| + ||T||$ und $||\alpha S|| \le |\alpha| ||S||$ haben wir eben gezeigt. Für $\alpha \ne 0$ gilt außerdem $||S|| = ||\frac{1}{\alpha}\alpha S|| \le \frac{1}{|\alpha|} ||\alpha S||$, also $||\alpha S|| \ge |\alpha| ||S||$.

Schließlich ist $||S|| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E : ||Tx|| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E : Tx = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

(2) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(E,F)$, dann gilt für $x \in E$ beliebig:

$$||A_n x - A_m x|| \le ||A_n - A_m|| ||x||_E \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h. $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in F. Da F vollständig, konvergiert $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen genau ein $y_x \in F$. Wir definieren $A : E \to F,\ x \mapsto y_x$ und zeigen, dass $A \in L(E,F)$ mit $A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

Seien $x, y \in E$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$A(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + y) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + Ay,$$

also ist A linear.

Sei nun $\epsilon > 0$, dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n, m \ge N : ||A_n - A_m|| < \epsilon$. Seien $n \ge N$ fest, $m \ge n$ beliebig und $x \in E$ mit $||x||_E \le 1$. Dann gilt

$$||A_n x - Ax||_F \le ||A_n x - A_m x|| + ||A_m x - Ax||_F \le ||A_n - A_m|| + ||A_m x - Ax||_F \le \epsilon + ||A_m x - Ax||_F.$$

Mit $m \to \infty$ folgt $||A_n x - Ax||_F \le \epsilon$, also $A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$. Insbesondere ist $||A_N - A|| \le \epsilon$ und damit $A_N - A$ stetig. Also liegt auch A in $L(E,F)$.

Folgerung

Ist $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann ist $E' := L(E, \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum.

Definition

$A := (A, a, s, m)$ heißt eine $\mathbb{K}$-*Algebra*, falls (A, a, s) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $m : A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto ab$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) m ist assoziativ, d.h. $\forall x, y, z \in A : x(yz) = (xy)z$.
(2) Die Distributivesetze gelten, d.h. $\forall x, y, z \in A : (x + y)z = xz + yz,\ z(x + y) = zx + zy$.
(3) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in A : \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

$e \in A$ heißt *Einselement*, falls $\forall x \in A : xe = x = ex$.

Ist A eine $\mathbb{K}$-Algebra und $||\cdot||$ eine *submultiplikative* Norm auf A (d.h. $\forall x, y \in A : ||xy|| \leq ||x||||y||$), dann heißt A (als $\mathbb{K}$-Algebra) *normiert*.

Eine normierte $\mathbb{K}$-Algebra $(A, ||\cdot||)$ heißt eine $\mathbb{K}$-*Banachalgebra*, falls A bzgl. $||\cdot||$ vollständig ist.

Bemerkung

Sind E, F, G normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $T \in L(E, F),\ S \in L(F, G)$, dann ist $ST \in L(E, G)$ und $||ST|| \leq ||S||||T||$.

Für $x \in E$ gilt nämlich $||STx||_G \leq ||S||||Tx||_F \leq ||S||||T||||x||_E < \infty$, also $||ST|| \leq ||S||||T||$ und damit insbesondere $ST \in L(E, F)$.

Im Allgemeinen gilt keine Gleichheit. Betrachte etwa $E = F = G = \mathbb{R}^2$, versehen mit $||\cdot||_\infty$ und $S = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\ T = \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, dann $||S|| = 1 = ||T||$, aber $ST = 0$ und damit auch $||ST|| = 0$.

Korollar 26

Sei $(E, a, s, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $(L(E, E), a, s, \circ, \mathrm{id}_E, ||\cdot||)$ eine normierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins id_E und $||\mathrm{id}_E|| = 1$.

Ist E zusätzlich vollständig, dann ist $(L(E, E), a, s, \circ, \mathrm{id}_E, ||\cdot||)$ eine $\mathbb{K}$-Banachalgebra.

Bemerkung

Ist $A = (A, a, s, m, e, ||\cdot||)$ eine normierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins, dann ist m stetig.

Seien nämlich $c, d, x, y \in A$, dann

$$||xy - cd|| = ||x(y - d) + (x - c)d|| \leq ||x||||y - d|| + ||x - c||||d|| \overset{x \to c,\ y \to d}{\longrightarrow} 0.$$

Definition

Sei $A = (A, a, s, m, e)$ $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins e. Zu $x \in A$ setzen wir $x^0 := e$ und $x^{n+1} := x^n x$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

$x \in A$ heißt eine *Einheit* in A, falls ein $y \in A$ exisiert mit $xy = e = yx$.

Bemerkung

(1) Einheiten sind eindeutig bestimmt. Ist y Einheit zu x, so setzen wir $y := x^{-1}$.

(2) Die Menge $A^\times$ der Einheiten von A bildet eine multiplikative Gruppe.

2.4 Reihen in normierten Vektorräumen

Wiederholung

Seien $E = (E, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$ eine Folge.

Die *Folge der Partialsummen* $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i := \sum\limits_{i\in\mathbb{N}_k} \alpha_i := (\sum_{i=k}^{n} \alpha_i)_{n\in\mathbb{N}_k}$ heißt die *Reihe* zu $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$.

Für $a \in E$ schreiben wir $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i = a$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=k}^{n} \alpha_i = a$.

$\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{i=k}^{\infty} ||\alpha_i||$ konvergiert.

Satz 27

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha : \mathbb{N}_k \to E$ und $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i$ absolut konvergent. Dann gilt:

(1) $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i$ ist konvergent und $||\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i|| \leq \sum_{i=k}^{\infty} ||\alpha_i||$.

(2) Ist $\sigma : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ bijektiv, dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_{\sigma(i)}$ absolut konvergent und $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_{\sigma(i)} = \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i$.

Beweis

(1) Setze $s_n := \sum_{i=k}^{n} \alpha_i$ $(n \in \mathbb{N}_k)$. Seien $n \in \mathbb{N}_k$ und $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$||s_{n+m} - s_n|| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} ||\alpha_i|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$ ist eine Cauchyfolge in E. Da E vollständig, gibt es ein $c \in E$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i = c$ und damit

$$||c|| = \lim_{n\to\infty} ||s_n|| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=k}^{n} \alpha_i \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k}^{n} ||\alpha_i|| = \sum_{i=k}^{\infty} ||\alpha_i|| < \infty.$$

(2) Für $n \in \mathbb{N}_k$ gilt $\sum_{i=k}^{n} ||\alpha_{\sigma(i)}|| \leq \sum_{i=k}^{\infty} ||\alpha_i|| < \infty$, d.h. $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_{\sigma(i)}$ ist absolut konvergent.

Setze $t_n := \sum_{i=k}^{n} \alpha_{\sigma(i)}$ $(n \in \mathbb{N}_k)$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}_k$ mit $\sum_{i=N+1}^{\infty} ||\alpha_i|| \leq \epsilon$ und da σ surjektiv, existiert dazu ein $M \in \mathbb{N}_k$ mit $\{k, ..., N\} \subseteq \{\sigma(k), ..., \sigma(N)\}$ (offenbar $M \geq N$).

Sei nun $n > M$, dann

$$||t_n - s_n|| = \left\| \sum_{i=k}^{n} \alpha_{\sigma(i)} - \sum_{i=k}^{n} \alpha_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} ||\alpha_i|| \right\| \leq \epsilon,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = c$.

Satz 28 (Charakterisierung von Banachräumen)

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, in dem alle absolut konvergenten Reihen konvergieren.

Dann ist E vollständig.

Beweis

Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in E, dann gibt es Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ mit $\forall n, m \geq n_i : ||\alpha_n - \alpha_m|| < \frac{1}{2^i}$ $(i \in \mathbb{N})$. Damit $\sum_{i=1}^{\infty} ||\alpha_{n_{i+1}} - \alpha_{n_i}|| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Nach Voraussetzung existiert dann ein $c \in E$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} - \alpha_{n_1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{n_{i+1}} - \alpha_{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{n_{i+1}} - \alpha_{n_i} = c.$$

Also konvergiert die Teilfolge $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $b := c + \alpha_{n_1}$ und da $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, konvergiert auch $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b.

Satz 29 (Neumann)
Seien $(A, ||\cdot||)$ eine $\mathbb{K}$-Banachalgebra mit Eins e und $x \in A$ derart, dass $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert. Dann ist $e - x$ eine Einheit in A und es gilt $(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Beweis

Setze $s := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, dann gilt

$$(e-x)s = \lim_{n\to\infty}(e-x)\sum_{i=0}^{n} x^i = \lim_{n\to\infty} e - x^{n+1} = e = \lim_{n\to\infty} e - x^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} x^i(e-x) = s(e-x).$$

Folgerung

Wegen $\forall n \in \mathbb{N} : ||x^n|| \leq ||x||^n$ gilt nach Satz 27 insbesondere $||x|| < 1 \Rightarrow e - x$ invertierbar und $(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Korollar 30 (Stetigkeit der Invertierung)
Seien $(A, ||\cdot||)$ eine $\mathbb{K}$-Banachalgebra mit Eins e. Dann ist $A^\times$ offen und $(\cdot)^{-1} : A^\times \to A^\times,\ x \mapsto x^{-1}$ stetig.

Beweis

Seien $x \in A^\times,\ \alpha \in (0,1)$ und $h \in A$ mit $||h|| \leq \alpha ||x^{-1}||^{-1}$. Wegen $||x^{-1}h|| \leq ||x^{-1}||||h|| \leq \alpha$ ist $e + x^{-1}h$ nach dem Satz von Neumann invertierbar, also auch $x + h = x(e + x^{-1}h)$ als Produkt invertierbarer Elemente. Damit ist $A^\times$ offen.

Weiter gilt $(x+h)^{-1} - x^{-1} = ((e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h)x^{-1} - x^{-1}hx^{-1}$. Setze $y := -x^{-1}h$, dann

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} ||(x+h)^{-1} - x^{-1}|| &\leq \lim_{h\to 0} ||(e-y)^{-1} - e - y||||x^{-1}|| + ||x^{-1}hx^{-1}|| \\
&\overset{\text{Neumann}}{\leq} \lim_{h\to 0}\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} y^n - e - y\right|\right| ||x^{-1}|| + \lim_{h\to 0}||h||||x^{-1}||^2 \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\left|\sum_{n=2}^{\infty} y^n\right|\right| ||x^{-1}|| \\
&\leq \lim_{h\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}||y||^n||x||^{-1} \\
&\overset{\text{geometr. Reihe}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{||y||^2}{1-||y||}||x||^{-1} \\
&\leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{1-\alpha}||x^{-1}||^3||h||^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $(\cdot)^{-1}$ stetig.

Beispiel (Näherungoperator)

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Nach Satz 25 ist dann auch $L(E,E)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum.

Sei $A \in L(E,E)$ invertierbar und $y \in E$. Gesucht ist $x \in E$ mit $Ax = y$.

Ist B ein „Näherungsoperator“ für A, kann man durch Lösen der Gleichung $Bz = y$ eine Approximation z für x ermitteln.

Man betrachte etwa im $E = \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$ (d.h. A ist eine $(n\times n)$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{R}$) das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ und dazu eine Näherungsmatrix B, in der beispielsweise die reellen Einträge durch abbrechende Dezimalzahlen oder „Maschinenzahlen“ approximiert werden.

Gilt $||B - A|| < ||A^{-1}||^{-1}$, dann ist $||A^{-1}(A-B)|| < 1$ und nach dem Satz von Neumann damit

$\mathrm{id}_E - A^{-1}(B-A)$ invertierbar und aus $B = A(\mathrm{id}_E - A^{-1}(B-A))$ erhalten wir

$$B^{-1} = (\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))^{-1}A^{-1}$$

und so die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
||z-x|| &= ||B^{-1}y - A^{-1}y|| \\
&\leq ||B^{-1} - A^{-1}||||y|| \\
&= ||((\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))^{-1} - \mathrm{id}_E)A^{-1}||||y|| \\
&\overset{u := A^{-1}(A-B)}{\leq} ||(\mathrm{id}_E - u)^{-1} - \mathrm{id}_E||||A^{-1}||||y|| \\
&\overset{\text{Neumann}}{=} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} u^n\right\| ||A^{-1}||||y|| \\
&\overset{\text{geometr. Reihe}}{\leq} \frac{||u||}{1-||u||}||A^{-1}||||y|| \\
&= \frac{||A^{-1}(A-B)||}{1-||A^{-1}(A-B)||}||A^{-1}||||y|| \\
&\leq \frac{||A^{-1}||^2||A-B||}{1-||A^{-1}||||A-B||}||y||.
\end{aligned}$$

Beispiel (aus der Quantenmechanik)

Mehrere „Operatoren“ P, Q der Quantenmechanik erfüllen die Relation $PQ - QP = -i\hbar\mathrm{id}_E =: -i\hbar$ (wobei $\hbar$ die *Planck-Konstante* bezeichnet). Ein Beispiel zweier solcher Operatoren wären der *Impulsoperator* P, gegeben durch $(Pu)(\xi) := -i\hbar u'(\xi)$ und der *Ortsoperator*, definiert durch $(QU)(\xi) := u(\xi)\xi$.

Operatoren, die diese *Vertauschungsrelation* erfüllen, können nicht beide stetig sein:

Satz 31 (Unstetigkeit bei Vertauschungsrelation)

Seien P, Q lineare Operatoren des $\mathbb{K}$-Banachraumes E, $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ und $PQ - QP = \alpha\mathrm{id}_E$.

Dann sind P und Q nicht beide stetig.

Beweis

Wir nehmen an, dass Q stetig ist, und zeigen, dass dann P nicht beschränkt sein kann.

(1) Per Induktion sehen wir, dass $\forall n \in \mathbb{N} : PQ^n - Q^nP = \alpha n Q^{n-1}$. Der Fall $n = 1$ ist nach Voraussetzung gegeben. Gelte die Behauptung also für ein n. Dann ist

$$\begin{aligned}
PQ^{n+1} &= (PQ^n)Q \overset{\text{IV}}{=} (Q^nP + \alpha n Q^{n-1})Q = Q^nPQ + \alpha n Q^n \\
&\overset{\text{IV}}{=} Q^n(QP + \alpha\mathrm{id}_E) + \alpha n Q^n = Q^{n+1}P + \alpha(n+1)Q^n.
\end{aligned}$$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : Q^n \neq 0$. Gäbe es nämlich so ein n, dann wäre nach (1) auch $\alpha n Q^{n-1}$ und damit Q^{n-1} bereits der Nulloperator und induktiv damit auch $Q^{n-2}, ..., Q^0 = \mathrm{id}_E$, Widerspruch.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $||Q^{n-1}|| \leq ||Q||^{n-1} < \infty$ und

$$n|\alpha|||Q^{n-1}|| \overset{(1)}{\leq} 2||P||||Q^n|| \leq 2||P||||Q^{n-1}||,$$

also $\frac{1}{||Q||}|\alpha|n \leq ||P||$ und damit $||P|| = \infty$, d.h. P ist unstetig.

2.5 Endlich dimensionale, normierte Vektorräume

Satz 32 (Isomorphie endlich dimensionaler Räume)

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(E) = n = \dim(F)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Dann sind E und F isomorph.

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass $(E, ||\cdot||)$ isomorph zu $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||)$ ist. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von E, dann ist die Abbildung $\omega : \mathbb{K}^n \to E$, $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ ein algebraischer Isomorphismus. Nach Satz 22 bleibt zu zeigen, dass positive m, M existieren mit $\forall \alpha \in \mathbb{K}^n : m||\alpha||_\infty \leq ||\omega(\alpha)||_E \leq M||\alpha||_\infty$.

Setze $M := \sum_{i=1}^n ||b_i||_E$, dann gilt für alle $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$: $||\omega(\alpha)||_E \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| ||b_i||_E \leq M||\alpha||_\infty$. Insbesondere ist ω damit stetig.

Dann ist auch $||\omega(\cdot)||_E : \mathbb{K}^n \to [0, \infty)$ stetig und da die *Einheitssphäre* $\mathbb{S} := \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid ||\alpha||_\infty = 1\}$ kompakt ist, existiert ein $\alpha^* \in \mathbb{S}$ mit $m := ||\omega(\alpha^*)||_E \leq ||\omega(\alpha)||_E$ für alle $\alpha \in \mathbb{S}$. Damit gilt auch $m||\alpha||_\infty \leq ||\omega(\alpha)||_E$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}^n$.

Folgerung

Jeder endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum ist vollständig, da isomorph zum $\mathbb{K}$-Banachraum $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_\infty)$.

Korollar 33 (Stetigkeit linearer Operatoren)

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(E) = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Dann ist jeder lineare Operator $T : E \to F$ stetig.

Beweis

Seien $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E und $\alpha \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\left\| T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right)\right\|_F = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i T b_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| ||Tb_i||_F \leq ||\alpha||_\infty \sum_{i=1}^n ||Tb_i||_F.$$

Betrachten wir wieder den oben definierten Isomorphismus ω, dann erhalten wir mit $c := \sum_{i=1}^n ||Tb_i||_F$, dass $||(T \circ \omega)(\alpha)||_F \leq c||\alpha||_\infty$, also ist $T \circ \omega$ stetig. Da auch ω^{-1} stetig ist, folgt insgesamt die Stetigkeit von T.

Folgerung

Auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

2.6 Der Satz von Hahn-Banach

Definition

Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine lineare Abbildung $f : E \to \mathbb{K}$ heißt ein *lineares Funktional* oder eine *Linearform*.

Der Raum der stetigen, linearen Funktionale $E' = L(E, \mathbb{K})$ heißt der *(topologische) Dualraum* zu E.

Der Raum der linearen Funktionale E^* heißt der *algebraische Dualraum* zu E.

Bemerkung

Eine Abbildung $p : E \to \mathbb{R}$ heißt ein *sublineares Funktional*, falls gelten:

(1) p ist subadditiv, d.h.$\forall x, y \in E : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ und
(2) p ist positiv homogen, d.h. $\forall x \in E, \alpha > 0 : p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

Satz 34 (Hahn-Banach)

Seien E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, M ein Teilraum von E, p ein sublineares Funktional und $f \in M^*$ mit $fz \leq p(z)$ für alle $z \in M$.

Dann existiert eine Fortsetzung $F \in E^*$ von f mit $\forall x \in E : -p(-x) \leq Fx \leq p(x)$.

Beweis

Wir betrachten das folgende System von Fortsetzungen zu f:

$$\mathcal{M} := \{(D, h) \mid M \subseteq D \text{ ist Teilraum von } E,\ h \in D^*,\ h|_M = f,\ \forall z \in D : hz \leq p(z)\}.$$

Für zwei Paare (D_1, h_1) und (D_2, h_2) aus $\mathcal{M}$ setzen wir $(D_1, h_1) \preccurlyeq (D_2, h_2) :\Leftrightarrow D_1 \subseteq D_2$ und $h_2|_{D_1} = h_1$.

$\mathcal{M}$ ist nicht leer, da $(M, f) \in \mathcal{M}$. Sei nun $\mathcal{K}$ eine nicht leere Kette in $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$. Dann erhalten wir mit $K := \bigcup\{D \subseteq E \mid (D, h) \in \mathcal{K}\}$ einen M umfassender Teilraum von E und durch $kz := hz$ für $(D, h) \in \mathcal{K},\ z \in D$ wird eine lineare Abbildung $k : K \to \mathbb{R}$ definiert mit $k|_M = f$ und $kz \leq p(z)$ für alle $z \in K$, also ist $(K, k) \in \mathcal{M}$.

Offenbar ist (K, k) eine obere Schranke zu $\mathcal{K}$. Nach dem Lemma von Zorn existiert dann ein maximales Element (E_0, F) von $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ und für $x \in E_0$ gilt $F(-x) \leq p(-x)$, also $-p(-x) \leq -F(-x) = Fx$. Es bleibt zu zeigen, dass $E_0 = E$.

Angenommen, es existiert ein $y \in E \backslash E_0$. Dann ist $H := \{x + \alpha y \mid x \in E_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein Teilraum von E mit $E_0 \subsetneq H$. Für festes $\gamma \in \mathbb{R}$ setzen wir $g(x + \alpha y) := Fx + \alpha\gamma$ $(x \in E_0, \alpha \in \mathbb{R})$. Dann ist g wohldefiniert, denn dann gilt für alle $x_1, x_2 \in E_0,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 + \alpha_1 y = x_2 + \alpha_2 y \Rightarrow x_1 - x_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)y \overset{y \notin E_0}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Damit ist $g : H \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $g|_{E_0} = F$. Wir müssen ein $\gamma \in \mathbb{R}$ finden, so dass $gz \leq p(z)$ ist für alle $z \in H$, denn genau dann gilt $(*)$ $\forall x \in E_0, \alpha \in \mathbb{R} : Fx + \alpha\gamma \leq p(x + \alpha y)$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Maximalität von (E_0, F).

Für $\alpha = 0$ ist $(*)$ eine leere Bedingung. Wir suchen also ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \forall x \in E_0 : \gamma \leq p\left(\frac{x}{\alpha} + y\right) - F\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha > 0 \quad \text{und} \\ \forall x \in E_0 : F\left(-\frac{x}{\alpha}\right) - p\left(-\frac{x}{\alpha} - y\right) \leq \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha < 0. \end{aligned}$$

Seien nun $u, v \in E_0$, dann gilt die Ungleichung $Fu + Fv = F(u + v) \leq p(u + v) \leq p(u - y) + p(v + y)$, also $Fu - p(u - y) \leq -Fv + p(v + y)$ und damit

$$a := \sup_{u \in E_0} \{Fu - p(u - y) \mid u \in E_0\} \leq \inf_{v \in E_0} \{-Fv + p(v + y) \mid v \in E_0\} =: b.$$

Für $a \leq \gamma \leq b$ ist dann $(*)$ erfüllt.

Korollar 35 (Hahn-Banach)

Seien E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, M ein Teilraum von E, p eine Halbnorm auf E und $f \in M^*$ mit $|fz| \leq p(z)$ für alle $z \in M$.

Dann existiert eine Fortsetzung $F \in E^*$ von f mit $\forall x \in E : |Fx| \leq p(x)$.

Beweis

Nach Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung $F \in E^*$ von f mit $\forall x \in E : Fx \leq p(x)$. Es ist also nur zu zeigen, dass $\forall x \in E : -Fx \leq p(x)$. Da p Halbnorm, folgt dies aus $-Fx = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$.

Korollar 36 (Bohnenblust-Sobczyk-Suhomilinov)

Seien E ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, M ein Teilraum von E, p eine Halbnorm auf E und $f \in M^*$ mit $|fz| \leq p(z)$ für alle $z \in M$.

Dann existiert eine Fortsetzung $F \in E^*$ von f mit $\forall x \in E : |Fx| \leq p(x)$.

Beweis

Als $\mathbb{C}$-Vektorraum ist E insbesondere auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir betrachten die Abbildung $g : M \to \mathbb{R}$ mit $z \mapsto \Re(fz)$. Es gelten:

(1) g ist $\mathbb{R}$-linear.

(2) $\forall z \in E : fz = gz - ig(iz)$: Sei $fz = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, dann

$$fz = a + ib = a - i\Re(-b + ia) = a - i\Re(i(a + ib)) = \Re(fz) - i\Re(f(iz)) = gz - ig(iz).$$

(3) $\forall z \in M : |gz| = |\Re(fz)| \leq |fz| \leq p(z)$.

Nach Korollar 35 existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $G : E \to \mathbb{R}$ con g mit $\forall x \in E : |Gx| \leq p(x)$. Wir betrachten die Abbildung $F : E \to \mathbb{C},\ x \mapsto Gx - iG(ix)$. Dann gelten:

(1) F ist eine Fortsetzung von f, denn für $x \in M$ gilt $Fx = Gx - iG(ix) = gx - ig(ix) = fx$.

(2) F ist $\mathbb{C}$-linear: Offenbar ist F $\mathbb{R}$-linear und für $x \in E$ gilt

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = iGx + G(ix) = i(Gx - iG(ix)) = iFx.$$

(3) Zu $x \in E$ setze $\alpha := \frac{\overline{Fx}}{|Fx|}$, dann $|\alpha| = 1$ und $\alpha Fx = |Fx|$. Damit

$$|Fx| = \alpha Fx = F(\alpha x) = \Re(F(\alpha x)) = G(\alpha x) = |G(\alpha x)| \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x).$$

Korollar 37

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, M ein Teilraum von E und $f \in M'$.

Dann existiert eine Fortsetzung $F \in E'$ von f mit $||F|| = ||f||$.

Beweis

In Korollar 35 bzw. 36 definiere $px := ||f||||x||$, dann gibt es eine Fortsetzung $F \in E^*$, die wegen $|Fx| \leq ||f||||x||$ stetig ist und $||F|| \leq ||f||$ erfüllt. Die Fortsetzungseigenschaft impliziert trivialerweise auch die umgekehrte Abschätzung $||f|| \leq ||F||$.

Korollar 38

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $x_0 \in E$, M ein Teilraum von E und $d := \operatorname{dist}(x_0, M) > 0$.

Dann existiert ein $g \in E'$ mit $||g|| = 1,\ g|_M = 0$ und $g(x_0) = d$.

Beweis

Betrachte den Teilraum $H := \{x + \alpha x_0 \mid x \in M,\ \alpha \in \mathbb{K}\}$. Wir setzen $f : H \to \mathbb{K},\ x + \alpha x_0 \mapsto \alpha d$. Dann ist f wohldefiniert und linear mit $f|_M = 0$ und $f(x_0) = d$. Weiter gilt

$$||f|| = \sup\left\{\frac{|\alpha|d}{||x+\alpha x_0||}\ \middle|\ x \in M,\ \alpha \in \mathbb{K} \text{ mit } x + \alpha x_0 \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{d}{||y - x_0||}\ \middle|\ y \in M\right\} = 1.$$

Mit Korollar 37 lässt sich f zu gesuchtem g fortsetzen.

Anmerkung

Unter den Voraussetzungen von Korollar 38 erfült jedes $g \in E'$ mit $||g|| = 1$ und $g|_M = 0$ die Abschätzung $|g(x_0)| \leq d$, denn für $y \in M$ ist $|g(x_0)| = |g(x_0 - y)| \leq ||x_0 - y||$ und damit gilt auch

$$|g(x_0)| \leq \inf_{y \in M} ||x_0 - y|| = d.$$

Korollar 39

Seien E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $x_0 \in E$.

(1) Ist p eine Halbnorm auf E, so existiert ein $F \in E^*$ mit $Fx_0 = p(x_0)$ und $\forall x \in E : |Fx| \leq p(x)$.

(2) Ist $E \neq \{0\}$ und $||\cdot||$ eine Norm auf E, dann gibt es $F \in E'$ mit $Fx_0 = ||x_0||$ und $||F|| = 1$.

Beweis

(1) In Korollar 35 bzw. 36 setze $M := \langle x_0 \rangle := \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ und $f : M \to \mathbb{K},\ \alpha x_0 \mapsto \alpha p(x_0)$.

(2) Im Fall $x = 0$ wähle $z_0 \in E\backslash\{0\}$ und $M := \{0\}$, dann liefert Korollar 38 das gesuchte Funktional.
Ist $x \neq 0$, dann liefert Korollar 38 (wieder mit $M := \{0\}$) direkt die Behauptung.

Korollar 40

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq E$ linear unabhängig.
Dann existiert ein $g \in E'$ mit $\forall i = 1, ..., n : g(x_i) = \alpha_i$.

Beweis

Zu $M := \{x_1, ..., x_n\}$ gibt es ein (eindeutiges) $f \in M^*$ mit $f(x_i) = \alpha_i$ $(i = 1, ..., n)$. Nach Korollar 33 ist f stetig und lässt sich daher mit Korollar 37 zu gesuchtem g fortsetzen.

Anwendung (Banachlimes)

Es gibt eine lineare Abbildung $\mathrm{LIM} : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ mit $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty : \liminf x_n \leq \mathrm{LIM} x_n \leq \limsup x_n$.
Insbesondere gilt also für konvergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, dass $\lim x_n = \mathrm{LIM} x_n$.

Beweis

Definiere $M := \{0\},\ f : 0 \mapsto 0$ und $p : \ell_\infty \to \mathbb{R},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \limsup x_n$. Dann ist p subadditiv und positiv homogen, also lässt sich f mit dem Satz von Hahn-Banach zu einem $g \in E^*$ mit $gx \leq p(x)$ fortsetzen $(x \in \ell_\infty)$. Dann gilt für jedes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ auch $-gx = g(-x) \leq \limsup(-x_n) = -\liminf x_n$ und damit $\liminf x_n \leq gx$.

2.7 Der Bidualraum

Definition

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. $E'' := (E')'$ heißt der *Bidualraum* zu E.

Bemerkung

Ist $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann sind E' und E'' nach Satz 25 Banachräume.

Definition

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $\varkappa : E \to E''$, definiert durch $\varkappa x : E' \to \mathbb{K}$, $(\varkappa x)x' := x'x$, die *kanonische Einbettung* von E in E''.

Bemerkung

(1) Für alle $x \in E,\ x' \in E'$ gilt $|(\varkappa x)x'| = |x'x| \leq ||x'||||x||$, d.h. $||\varkappa x|| \leq ||x||$. Also ist $\varkappa$ stetig.

(2) Nach Korollar 39 (2) gibt es andererseits ein $x' \in E'$ mit $|(\varkappa x)x'| = |x'x| = ||x||$, also $||\varkappa x|| = ||x||$, d.h. $\varkappa$ ist normerhaltend und insbesondere injektiv.

(3) $\mathrm{Cl}(\varkappa E)$ ist ein $\mathbb{K}$-Banachraum (eine *Vervollständigung* von E), denn nach (2.1) ist $\mathrm{Cl}(\varkappa E)$ ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Banachraumes E'' und damit selbst vollständig.

Definition

Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum $(E, ||\cdot||)$ heißt *reflexiv*, falls $\varkappa E = E''$, d.h. falls $\varkappa$ surjektiv ist.

Bemerkung

Die Existenz eines beliebigen, normerhaltenden Isomorphismus $f : E \to E''$ ist nicht hinreichend für die Reflexivität von E (James).

Satz 41 (Reflexivität endlich dimensionaler Räume)

Ist $(E, ||\cdot||)$ ein endlich dimensionaler, normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann ist E reflexiv.

Beweis

Sei $\dim E = n \in \mathbb{N}$. Nach Korollar 33 ist $E' = E^*$. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von E. Definiere $b_i^* : E \to \mathbb{K}$ durch $b_j \mapsto \{^{1,\ j=i}_{0,\ j\neq i} = \delta_{ij}$ $(i = 1, ..., n)$. Für beliebiges $f \in E^*$ gilt dann $f = \sum_{i=1}^n f(b_i)b_i^*$, denn für alle $x = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n \in E$ gilt

$$f(x) = \alpha_1 f(b_1) + ... + \alpha_n f(b_n) = b_1^*(x) f(b_1) + ... + b_n^*(x) f(b_n),$$

also $f \in \mathrm{span}\{b_1^*, ..., b_n^*\}$, d.h. $E^* = \mathrm{span}(b_1^*, ..., n_n^*)$. Da $(b_1^*, ..., b_n^*)$ linear unabhängig, folgt $\dim E' = n$ und damit auch $\dim \varkappa(E) = \dim E'' = \dim(E')' = n$. Mit $\varkappa(E) \subseteq E''$ erhält man schließlich $\varkappa(E) = E''$.

3 Hilberträume

3.1 Räume mit Skalarprodukt

Definition

Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ heißt ein *Semiskalarprodukt*, falls für alle $x, y, z \in H,\ \alpha \in \mathbb{K}$ gelten:

(1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist linear in der ersten Komponenten, d.h. $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist antisymmetrisch, d.h. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
(3) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist positiv, d.h. $\langle x, x\rangle \geq 0$.

Gilt zusätzlich $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$, dann heißt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein *Skalarprodukt*.

Bemerkung

Jedes Semiskalarprodukt ist sesquilinear in der zweiter Komponenten: Seien $x, y, z \in H,\ \alpha \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\langle x, \alpha y + z\rangle = \overline{\langle \alpha y + z, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$

Definition

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Semiskalarprodukt.

Zwei Elemente $x, y \in H$ heißen *orthogonal* (in Zeichen: $x \perp y$), falls $\langle x, y\rangle = 0$.

Seien I eine nicht leere Indexmenge und $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H$, dann heißt $(x_i)_{i\in I}$ ein *Orthonormalsystem*, falls $\forall i, j \in I : \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij} := \{\begin{smallmatrix} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{smallmatrix}$ (*Kronecker-Delta*).

Satz 42 (Orthonormalsysteme)

Seien H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Semiskalarprodukt auf H, $y \in H$, I eine nicht leere Indexmenge, $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H$, $(x_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem und $J \subseteq I$ endlich mit $\forall j \in J : \alpha_j \in \mathbb{K}$.

Für $x \in H$ setzen wir $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Dann gelten:

(1) $||y - \sum_{j\in J} \alpha_j x_j||^2 = ||y||^2 - \sum_{j\in J} |\langle y, x_j\rangle|^2 + \sum_{j\in J} |\alpha_j - \langle y, x_j\rangle|^2$.
(2) Genau dann ist $||y - \sum_{j\in J} \alpha_j x_j||^2$ (strikt) minimal, wenn $\alpha_j = \langle y, x_j\rangle$ $(j \in J)$.
(3) $||y - \sum_{j\in J} \langle y, x_j\rangle x_j||^2 = ||y||^2 - \sum_{j\in J} |\langle y, x_j\rangle|^2$.
(4) $||\sum_{j\in J} \alpha_j x_j||^2 = \sum_{j\in J} |\alpha_j|^2$ *(Verallgemeinerter Satz des Pythagoras)*.

Beweis

(2), (3) und (4) folgen unmittelbar aus (1). Dazu:

$$\begin{aligned}
\left\| y - \sum_{j\in J} \alpha_j x_j \right\|^2 &= \left\langle y - \sum_{j\in J} \alpha_j x_j, y - \sum_{j\in J} \alpha_j x_j \right\rangle \\
&= \langle y, y\rangle - \left\langle y, \sum_{j\in J} \alpha_j x_j \right\rangle - \left\langle \sum_{j\in J} \alpha_j x_j, y \right\rangle + \left\langle \sum_{j\in J} \alpha_j x_j, \sum_{j\in J} \alpha_j x_j \right\rangle \\
&= ||y||^2 - \sum_{j\in J} \overline{\alpha_j}\,\langle y, x_j\rangle - \sum_{j\in J} \alpha_j\,\langle x_j, y\rangle + \sum_{j\in J}\sum_{k\in J} \alpha_j \overline{\alpha_k}\,\langle x_j, x_k\rangle \\
&= ||y||^2 - \sum_{j\in J} \overline{\alpha_j}\,\langle y, x_j\rangle - \sum_{j\in J} \alpha_j\,\langle x_j, y\rangle + \sum_{j\in J} \alpha_j \overline{\alpha_j} \\
&= ||y||^2 - \sum_{j\in J} \langle y, x_j\rangle\,\overline{\langle y, x_j\rangle} + \sum_{j\in J} (\alpha_j - \langle y, x_j\rangle)\overline{(\alpha_j - \langle y, x_j\rangle)} \\
&= ||y||^2 - \sum_{j\in J} |\,\langle y, x_j\rangle\,|^2 + \sum_{j\in J} |\alpha_j - \langle y, x_j\rangle\,|^2.
\end{aligned}$$

Korollar 43 (Bessel-Ungleichung)

Seien H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Semiskalarprodukt auf H, $y \in H$, I eine nicht leere Indexmenge, $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H$ und $(x_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem.

Dann gilt die Ungleichung $\sum\limits_{i\in I} |\langle y, x_i\rangle|^2 \leq ||y||^2$.

Anmerkung

Für $\alpha_i > 0$ $(i \in I)$ setzen wir dabei $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i := \sup\{\sum\limits_{j\in J} \alpha_j \mid J \subseteq I \text{ endlich}\}$.

Folgerung

Die Menge $\{i \in I \mid \langle y, x_i\rangle \neq 0\}$ ist abzählbar.

Nach der Bessel-Ungleichung ist nämlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{i \in I \mid |\langle y, x_i\rangle| > \frac{1}{n}\}$ endlich.

Satz 44 (Grundeigenschaften von Semiskalarprodukten)

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Semiskalarprodukt. Dann gelten:

(1) Es gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: $\forall x, y \in H : |\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||$.

(2) $||\cdot|| : H \to \mathbb{R}_0^+$ ist eine Halbnorm auf H.

(3) Genau dann ist $||\cdot||$ eine Norm, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(4) Es gilt die *Parallelogrammregel*: $\forall x, y \in H : ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Beweis

(1) Im Fall $||x|| = 0 = ||y||$ gilt

$$0 \leq ||x - \langle x, y\rangle y||^2 = ||x||^2 - \overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle + |\langle x, y\rangle|^2||y||^2 = -2|\langle x, y\rangle|^2,$$

also $|\langle x, y\rangle| = 0$. Andernfalls (Œ $||x|| \neq 0$) folgt aus der Bessel-Ungleichung $|\langle y, \frac{x}{||x||}\rangle|^2 \leq ||y||^2$, also $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||$.

(2) Klar: $\forall x \in H,\ \alpha \in \mathbb{K} : ||x|| \geq 0$ und $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$. Zur Dreiecksungleichung:

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2|\langle x, y\rangle| + ||y||^2 \overset{(1)}{\leq} (||x|| + ||y||)^2.$$

(3) Trivial, denn $\forall x \in H : ||x|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0$.

(4) Durch Nachrechnen:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = ||x||^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + ||y||^2 + ||x||^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + ||y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Bemerkung

(1) Es gelten die *Polarisierungsformeln*

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\forall x, y \in H : 4\langle x, y\rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2$.
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\forall x, y \in H : 4\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{3} ||x + i^n y||^2$.

(2) Ist $(X, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, der die Parallelogrammregel erfüllt, so wird durch die Polarisierungsformel ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert, dessen induzierte Norm gerade $||\cdot||$ ist (d.h. es gilt $\forall z \in X : ||z|| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$).

Korollar 45

Ist $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Semiskalarprodukt, dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stetig.

Beweis

Seien $x, y, u, v \in H$. Dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $x \to u,\ y \to v$:

$$|\langle x, y\rangle - \langle u, v\rangle| = |\langle x-u, y-v\rangle| \leq ||x-u||||y-v|| \to 0.$$

Definition

$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt ein *$\mathbb{K}$-Prähilbertraum*, falls H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf H ist.

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Prähilbertraum und $||\cdot||$ die zu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gehörige Norm. Ist $(H, ||\cdot||)$ vollständig, so heißt $(H, ||\cdot||)$ ein *$\mathbb{K}$-Hilbertraum*.

Beispiele

(1) Im $\mathbb{K}^n$ definiere für $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Dann ist $(\mathbb{K}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum.

(2) Analog ist mit

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}\ (x, y \in \ell_2)$$

der Raum $(\ell_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum.

(3) Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Dann ist $(\mathfrak{C}([a, b]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein nicht vollständiger Hilbertraum, wenn man setzt

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ \mathrm{d}x\ (f, g \in \mathfrak{C}([a, b])).$$

Definiert man $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen, dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Semiskalarprodukt (aber kein Skalarprodukt).

Bemerkung

Ein Prähilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ lässt sich (als normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum) gemäß (2.7) via der kanonischen Einbettung $\varkappa : H \to H''$ zu einem $\mathbb{K}$-Banachraum erweitern.

Setzt man $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in natürlicher Weise auf die Vervollständigung von H fort, d.h. definiert man für $x, y \in \mathrm{Cl}(H)\backslash H$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$

$$\langle x, y\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle,$$

dann definiert die Fortsetzung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Cl}(H)$, bzgl. der $\mathrm{Cl}(H)$ vollständig, also ein Hilbertraum, ist.

3.2 Approximation und Orthogonalität

Definition

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, U eine nicht leere Teilmenge von E und $f \in E$. Dann heißt ein $g \in U$ mit $||f-g|| = \operatorname{dist}(f,U)$ eine *Minimallösung* oder *Bestapproximation* zu f bzgl. U.

Bemerkung

Ist $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \subseteq E$, dann nennen wir F *mittelpunktkonvex*, falls für alle $x, y \in F$ auch $\frac{1}{2}(x+y)$ in F liegt.

Hilfssatz 46

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prähilbertraum, $F \subseteq H$ nicht leer und mittelpunktkonvex, $x \in H$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||x - y_n|| = \operatorname{dist}(x,F)$. Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Beweis

Seien $v, w \in F$, dann gilt nach der Parallelogrammregel

$$2(||v-x||^2 + ||x-w||^2) = ||v-w||^2 + ||v+w-2x||^2,$$

also mit $d := \operatorname{dist}(x,F)$

$$||v-w||^2 = 2(||v-x||^2 + ||x-w||^2) - 4||\underbrace{\frac{1}{2}(v+w)}_{\in F} - x||^2 \leq 2(||v-x||^2 + ||x-w||^2) - 4d^2.$$

Speziell gilt also für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$||y_n - y_m||^2 \leq 2(||y_n - x||^2 + ||x-y_m||^2) - 4d^2 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Satz 47 (Bestapproximation in Hilberträumen)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $x \in H$, F nicht leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von H.

Dann gibt es genau ein $y \in H$ mit $||x-y|| = \operatorname{dist}(x,F)$.

Beweis

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ mit $||x-y_n|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d := \operatorname{dist}(x,F)$. Nach dem Hilfssatz ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F und da F abgeschlossener Unterraum eines $\mathbb{K}$-Banachraumes, konvergiert $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in F$. Da $||\cdot||$ stetig, ist dann $||x-y|| = d$.

Schließlich ist y eindeutig, denn gäbe es eine weitere Minimallösung $z \in F$, dann wäre nach dem Hilfssatz $||y-z||^2 = 2(||x-y||^2 + ||x-z||^2) - 4d^2 = 0$.

Satz 48 (Approximation und Orthogonalität)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum, U ein Unterraum von H, $f \in H$ und $g \in U$.

g ist genau dann eine Minimallösung zu f bzgl. U, wenn $(f-g)\perp U$ $(:\Leftrightarrow \forall u \in U : (f-g)\perp u)$ gilt.

Beweis

$\Leftarrow$: Für $u \in U$ gilt $||f-u||^2 = ||f-g+\overbrace{(g-u)}^{\in U}||^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} ||f-g||^2 + ||g-u||^2$.

$\Rightarrow$: Gäbe es ein $u \in U$ mit $\langle f-g, u\rangle \neq 0$ (insbesondere $u \neq 0$), dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$||f - \underbrace{(g-\lambda u)}_{\in U}||^2 = ||(f-g)+\lambda u||^2 = ||f-g||^2 + 2\Re(\lambda\langle u, f-g\rangle) + |\lambda|^2||g||^2.$$

Speziell für $\lambda := -\frac{\langle f-g,u\rangle}{||g||^2}$ erhält man $||f-(g-\lambda u)|| = ||f-g||^2 - \frac{|\langle f-g\rangle,u|^2}{||g||^2} < ||f-g||^2$, ein Widerspruch zur Minimalität von $||f-g||$.

3.3 Orthogonalräume und orthogonale Komplemente

Definition

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $A \subseteq H$. Dann heißt $A^\perp := \{x \in H \mid \forall a \in A : x \perp a\}$ der *Orthogonalraum* zu A.

Satz 49 (Grundeigenschaften von Orthogonalräumen)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $A, B \subseteq H$. Dann gelten:

(1) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
(2) $\{0\}^\perp = H,\ H^\perp = \{0\}$.
(3) $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
(4) $A \subseteq A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$. Wir schreiben dann auch $A \perp A^\perp$.
(5) $A^\perp$ ist ein Unterraum von H.
(6) $A^\perp$ ist abgeschlossen.
(7) $A^\perp = \langle A\rangle^\perp = (\mathrm{Cl}(\langle A\rangle))^\perp$.

Beweis

(1)-(5) sind klar.

(6) Nach Korollar 45 ist $\langle\cdot, y\rangle$ stetig für $y \in H$ beliebig. Dann ist $A^\perp = \bigcap_{y\in A} \mathrm{Kern}(\langle\cdot, y\rangle)$ abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge.

(7) Nach (1) gilt jeweils $\supseteq$. Außerdem ist offenbar $A^\perp \subseteq \langle A\rangle^\perp$. Sei nun $y \in \mathrm{Cl}(A)$, dann gibt es eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \langle A\rangle^{\mathbb{N}}$, die gegen y konvergiert. Für $x \in \langle A\rangle^\perp$ gilt dann $0 = \langle x, y_n\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$, also $x \perp y$.

Satz 50 (orthogonales Komplement)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum von H.

Dann ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H (das *orthogonale Komplement* von H).

Es gilt $H = M \oplus M^\perp$, d.h. zu jedem $x \in H$ existieren eindeutige $m \in M,\ m' \in M^\perp$ mit $x = m + m'$.

Beweis

Nach Satz 49 ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H und $M \cap M^\perp = \{0\}$. Weiter ist $H = M + M^\perp$, denn sei $x \in H$, dann gibt es nach Satz 47 eine eindeutige Bestapproximation y bzgl. M. Nach Satz 48 liegt $x - y$ in $M^\perp$ und $x = y + (x - y)$ ist die gewünschte Darstellung.

Gäbe es für ein $x \in H$ zwei Darstellungen $x = m + m' = n + n'$ mit $m, n \in M,\ m', n' \in M^\perp$, dann wäre $m + m' - (n + n') = (m - n) + (m' - n') = 0$ und damit $m - n = n' - m'$. Da $m - n$ in M und $n' - m'$ in $M^\perp$ liegt, folgt aus $M \cap M^\perp = \{0\}$, dass $m = n$ und $m' = n'$ gelten muss und damit die Eindeutigkeit der Darstellung.

Korollar 51

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $M \subseteq H$. Dann gilt $\mathrm{Cl}(\langle M\rangle) = M^{\perp\perp}$.

Beweis

Nach Satz 49 gilt $\mathrm{Cl}(\langle M\rangle) \subseteq \mathrm{Cl}(\langle M\rangle)^{\perp\perp} = M^{\perp\perp}$. Für die andere Inklusion setze $N := \mathrm{Cl}(\langle M\rangle)$, dann ist N ein abgeschlossener Unterraum von H. Nach Satz 50 gibt es zu $x \in M^{\perp\perp}$ $x_1 \in N,\ x_2 \in N^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$ und wegen $N \subseteq M^{\perp\perp}$ folgt $x - x_1 = x_2$ mit $x - x_1 \in M^{\perp\perp}$ und $x_2 \in N^\perp = M^\perp$. Damit ist $x - x_1 = 0$, also $x = x_1$, d.h. $x \in N$.

Definition

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum von H.

Dann heißt $P : H \to M,\ x = m + m' \mapsto m$ mit $m \in M,\ m' \in M^\perp$ der *orthogonale Projektor* auf M.

Satz 52 (orthogonaler Projektor)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum von H und P der orthogonale Projektor auf M, Q der orthogonale Projektor auf $M^\perp$. Dann gelten:

(1) P ist linear mit $P^2 = P$.
(2) $||P|| \leq 1$ und $M \neq \{0\} \Rightarrow ||P|| = 1$.
(3) $\forall x, y \in H : \langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$.
(4) $\forall x \in H : ||x||^2 = ||Px||^2 + ||Qx||^2$.

Beweis

(1) Seien $x, y \in H$, dann gibt es $m, n \in M,\ m', n' \in M^\perp$ mit $x = m + m',\ y = n + n'$. Also

$$P(x + \alpha y) = P(m + m' + \alpha(n + n')) = P(\underbrace{(m + \alpha n)}_{\in M} + \underbrace{(m' + \alpha n')}_{\in M^\perp}) = m + \alpha n = P(x) + \alpha P(y).$$

Außerdem ist $Px = m \in M$, also $PPx = Pm = m = Px$ und damit $PP = P$.

(2) Sei $x \in M$ und $m \in M,\ m' \in M^\perp$ mit $x = m + m'$. Dann gilt

$$||Px|| = ||m|| = \sqrt{\langle m, m\rangle} \leq \sqrt{\langle m, m\rangle + \langle m', m'\rangle} = \sqrt{\langle m, m', m + m'\rangle} = ||m + m'|| = ||x||,$$

also $||P|| \leq 1$. Ist umgekehrt $x \in M$, dann $||Px|| = ||x||$, also $||P|| \geq 1$, falls $M \neq \{0\}$.

(3) Seien $x, y \in H,\ x = m + m',\ y = n + n',\ m, n \in M,\ m', n' \in M^\perp$. Dann gilt

$$\langle Px, y\rangle = \langle m, n + n'\rangle = \langle m, n\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle m, n\rangle = \langle m + m', n\rangle = \langle x, Py\rangle.$$

(4) Sei $x \in H,\ x = m + m',\ m \in M,\ m' \in M^\perp$, dann

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \langle m + m', m + m'\rangle = \langle m, m\rangle + \langle m', m'\rangle = ||m||^2 + ||m'||^2 = ||Px||^2 + ||Py||^2.$$

Satz 53 (Hahn-Banach in Hilberträumen)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, M ein Unterraum von H und $f \in M'$.

Dann gibt es eine Fortsetzung $F \in H'$ von f mit $||F|| = ||f||$.

Beweis

Sei $f \in M'$ und g die Fortsetzung von f auf $\mathrm{Cl}(M)'$, d.h. für $x \in \mathrm{Cl}(M),\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ setzen wir $g(x) := \lim f(x_n)$. Dann ist g wohldefiniert, linear und stetig.

Trivialerweise ist $||f|| \leq ||g||$. Sei $x \in \mathrm{Cl}(M)$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}},\ x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, dann gilt

$$|g(x)| = |g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} |g(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} ||g||||x_n|| = ||g||||x||,$$

also auch $||g|| \leq ||f||$ und damit $||g|| = ||f||$.

Sei P nun der orthogonale Projektor auf $\mathrm{Cl}(M)$, dann tut's $F := g \circ P \in H'$.

3.4 Der Satz von Riesz

Satz 54 (Riesz)

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Dann gelten:

(1) $\varphi y : H \to \mathbb{K},\ x \mapsto \langle x, y\rangle$ ist ein stetiges Funktional mit $||\varphi y|| = ||y||$.

(2) Für jedes $f \in H'$ gibt es genau ein $y \in H$ mit $f = \varphi y$.

Beweis

(1) Sei $x \in H$, dann ist $|(\varphi y)x| = |\langle x, y\rangle| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} ||x||||y||$, also $\varphi y \in H'$ und $||\varphi y|| \leq ||y||$.

Umgekehrt gilt $|(\varphi y)y| = |\langle y, y\rangle| = ||y||||y||$, also $||\varphi y|| \geq ||y||$ und damit insgesamt $||\varphi y|| = ||y||$.

(2) Œ Sei $f \neq 0$. Dann ist $M := \mathrm{Kern}(f)$ ein echter, abgeschlossener Unterraum von H, insbesondere $M^\perp \neq \{0\}$.

Sei $m' \in M^\perp$ mit $||m'|| = 1$ und $u : H \to H,\ x \mapsto (fx)m' - (fm')x$. Dann liegt $u(x)$ für alle $x \in H$ in M, denn $f(u(x)) = f((fx)m' - (fm')x) = (fx)(fm') - (fm')(fx) = 0$.

Sei nun $x \in H$ beliebig, dann gilt wegen $u(x) \perp m'$, dass $\langle (fx)m' - (fm')x, m'\rangle = \langle u(x), m'\rangle = 0$, also $\langle (fx)m', m'\rangle = \langle (fm')x, m'\rangle$. Setzt man $y := \overline{fm'}m'$, dann erhält man

$$(fx) \overset{||m'||=1}{=} (fx)\langle m', m'\rangle = \langle (fx)m', m'\rangle = \langle (fm')x, m'\rangle = (fm')\langle x, m'\rangle = \langle x, \overline{fm'}m'\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Zur Eindeutigkeit: Seien $y, y' \in H$ derart, dass $\forall x \in H : \langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$, dann $\forall x \in H : \langle x, y' - y\rangle = 0$, also insbesondere $||y - y'|| = \langle y - y', y - y'\rangle = 0$ und damit $y - y' = 0$, d.h. $y = y'$.

Folgerung

Definiert man $\varphi : H \to H',\ y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$, dann ist φ bijektiv, normerhaltend und sesquilinear.

Korollar 55 (Reflexivität von Hilberträumen)

Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

Beweis

Zu zeigen ist die Surjektivität der kanonischen Einbettung $\varkappa : H \to H''$ aus (2.7).

Sei $F \in H''$. Wir suchen ein $x \in H$ mit $\varkappa x = F$, d.h. für alle $x' \in H'$ soll gelten $x'x = Fx'$. Nach dem Satz von Riesz ist dies äquivalent zu

$$\forall y \in H : F(\varphi y) = (\varphi y)x = \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{(\varphi x)y},$$

wir müssen also ein $x \in H$ finden mit $\forall y \in H : (\varphi x)y = \overline{F(\varphi y)}$.

Da die Abbildung $H \to \mathbb{K},\ y \mapsto \overline{F(\varphi y)}$ nach der Folgerung linear und außerdem beschränkt ist, liefert der Satz von Riesz ein $x \in H$ mit den gewünschten Eigenschaften.

3.5 Orthonormalbasen

Definition

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, I eine nicht leere Indexmenge, $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H$ und $(x_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem.

$(x_i)_{i\in I}$ heißt *vollständig* oder eine *Orthonormalbasis*, falls $\{x_i \mid i \in I\}$ (bzgl. $\subseteq$) maximale Teilmenge von H ist.

Bemerkung

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $x \in E$, I eine nicht leere Indexmenge und $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq E$. Existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein endliches $I_\epsilon \subseteq I$ existiert, so dass für alle endlichen $J \subseteq I$ mit $I_\epsilon \subseteq J$ gilt $||\sum_{j\in J} x_j - x|| < \epsilon$, dann setzen wir $\sum_{i\in I} x_i = x$.

Satz 56 (Charakterisierung von Orthonormalbasen)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, I eine nicht leere Indexmenge, $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H$ und $(x_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

(1) $(x_i)_{i\in I}$ ist eine Orthonormalbasis.

(2) $\forall y \in H : y = \sum_{i\in I} \langle y, x_i\rangle x_i$ (*Fourier-Entwicklung*).

(3) $\forall x, y \in H : \langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle$ (*Bilinearformel*).

(4) $\forall y \in H : ||y||^2 = \sum_{i\in I} |\langle y, x_i\rangle|^2$ (*Parseval-Gleichung*).

(5) $\langle\{x_i \mid i \in I\}\rangle$ liegt dicht in H (ist also eine *Hilbertbasis*).

Beweis

(2)⇒(5) und (3)⇒(4) sind klar.

(1)⇒(2): Zunächst ist zu klären, ob die Reihe in (2) konvergiert.

Nach Satz 42 (4) ist $||\sum_{j\in J} \langle y, x_j\rangle x_j||^2 = \sum_{j\in J} |\langle y, x_i\rangle|^2$ für $J \subseteq I$ endlich.

Die Bessel-Ungleichung liefert $\sum_{i\in I} |\langle y, x_j\rangle|^2 \leq ||y||^2$ und da $(H, ||\cdot||)$ vollständig ist, konvergiert $||\sum_{i\in I} \langle y, x_i\rangle x_i||^2$ (2.4: In Banachräumen ist jede absolut konvergente Reihe konvergen).

Setze $x := y - \sum_{i\in I} \langle y, x_i\rangle x_i$, dann gilt für alle $i \in I$ wegen der Stetigkeit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\langle x, x_i\rangle = \langle y - \sum_{j\in I} \langle y, x_j\rangle x_j, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle - \langle\sum_{j\in I} \langle y, x_j\rangle x_j, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle - \langle y, x_i\rangle\langle x_i, x_i\rangle = 0$$

und da $\{x_i \mid i \in I\}$ maximal ist, muss dann $x = 0$, also $y = \sum_{i\in I} \langle y, x_i\rangle x_i$ gelten.

(5)⇒(1): Sei $x \in \{x_i \mid i \in I\}^\perp$, dann $x \in \mathrm{Cl}(\langle\{x_i \mid i \in I\}\rangle)^\perp = H^\perp = \{0\}$ nach Satz 49 (7), also $x = 0$.

(2)⇒(3): Seien $x, y \in H$, dann gilt

$$\langle x, y\rangle = \langle\sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle x_i, \sum_{i\in I} \langle y, x_i\rangle x_i\rangle = \sum_{i\in I} \langle\langle x, x_i\rangle x_i, \langle y, x_i\rangle x_i\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle.$$

(4)⇒(2): Sei $J \subseteq I$ endlich, dann gilt nach Satz 42 (3) $||y - \sum_{j\in J} \langle y, x_j\rangle x_j||^2 = ||y||^2 - \sum_{j\in J} |\langle y, x_j\rangle|^2$, also $y = \sum_{i\in I} \langle y, x_i\rangle x_i$.

Bemerkung

Die Reihe in (2) konvergiert *unbedingt*, d.h. für jede Permutation der Indizes. Die Reihe in (3) konvergiert sogar absolut.

4 Klassische Sätze der Funktionalanalysis

4.1 Der Satz von Baire

Definition

Sei $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $A \subseteq X$ *nirgends dicht*, falls $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(A)) = \emptyset$.

A heißt *mager* oder *von erster Kategorie*, falls eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ nirgends dichter Mengen existiert mit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

A heißt *fett* oder *von zweiter Kategorie*, falls A nicht mager ist.

Folgerung

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$. Dann gelten:

(1) Ist A nirgends dicht und $B \subseteq A$, dann ist auch B nirgends dicht.
(2) Ist A mager und $B \subseteq A$, dann ist auch B mager.
(3) Ist A nirgends dicht, dann ist auch $\operatorname{Cl}(A)$ nirgends dicht.
(4) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge magerer Mengen, dann ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mager.
(5) Genau dann ist A nirgends dicht, wenn $\operatorname{Cl}(A)$ keine nicht leere, offene Menge enthält.

Definition

Sei $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum. Ist jede offene, nicht leere Teilmenge von X von zweiter Kategorie, dann heißt $(X, \mathbb{O})$ ein *Baireraum*.

Satz 57 (Charakterisierung von Baireräumen)

Sei $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

(1) $(X, \mathbb{O})$ ist ein Baireraum.
(2) $\forall A \subseteq X : A$ mager $\Rightarrow A^c$ dicht.
(3) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}},\ A_n \in \mathbb{A},\ \operatorname{Int}(A_n) = \emptyset : \operatorname{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$.
(4) $\forall (O_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{n},\ O_n \in \mathbb{O}$ dicht : $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ dicht.

Beweis

(1)⇒(3): $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist mager, also auch $\operatorname{Int}(A)$. Da $(X, \mathbb{O})$ Baireraum, folgt $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$.

(3)⇒(4): Nach dem Dualitätsprinzip ist $X = \operatorname{Cl}(O_n) = (\operatorname{Int}(O_n^c))^c$, also $\operatorname{Int}(O_n^c) = \emptyset$. Setzt man $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, dann gilt nach (3): $\operatorname{Int}(O^c) = \operatorname{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \emptyset$, also $\operatorname{Cl}(O) = (\operatorname{Int}(O^c))^c = X$.

(4)⇒(2): Sei $A \subseteq X$ mager, dann gibt es $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ mit $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(A_n)) = \emptyset$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Wieder mit der Dualität gilt für $O_n := (\operatorname{Cl}(A_n))^c$ $(n \in \mathbb{N})$ dann $\operatorname{Cl}(O_n) = (\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(A_n)))^c = X$; nach (4) ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ also dicht und wegen $A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ folgt die Dichtheit von A^c.

(2)⇒(1): Sei $O \in \mathbb{O}$ nicht die leere Menge, dann ist O^c abgeschlossen und $O^c \neq X$, also ist O^c nicht dicht und nach (2) O daher nicht mager.

Satz 58

Ist (X, d) ein vollständiger semimetrischer Raum, dann ist $(X, \mathbb{O}(d))$ ein Baireraum.

Beweis

Seien $O_n \in \mathbb{O}(d)$ dicht $(n \in \mathbb{N})$, $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ und $V \in \mathbb{O}$ nicht leer. Wir müssen zeigen, dass auch $V \cap O$ nicht leer ist. O_1 ist dicht, also gibt es $x_1 \in X$ und $\epsilon \in (0, 1)$ mit $K_{x_1}^{\epsilon_1} \subseteq O_1 \cap V$. Sei nun $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Da O_n dicht ist, gibt es dann induktiv $x_n \in X$ und $\epsilon_n \in (0, \frac{1}{n})$ mit $K_{x_n}^{\epsilon_n} \subseteq O_n \cap U_{x_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $i, j > n$ liegen x_i und x_j in $U_{x_n}^{\epsilon_n}$, also gilt $d(x_i, x_j) < 2\epsilon_n < \frac{2}{n}$. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Da X vollständig, gibt es ein $x \in X$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und da $x_i \in K_{x_n}^{\epsilon_n}$ für $n \in \mathbb{N},\ i \geq n$, liegt auch $x \in K_{x_n}^{\epsilon_n}$, also $x \in O \cap V$.

Korollar 59 (Kategoriesatz von Baire)

Jeder vollständige semimetrische Raum ist von zweiter Kategorie.

Bemerkung

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein topologischer Raum und $F \subseteq \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Wir nennen F *punktweise gleichmäßig nach oben beschränkt*, wenn gilt: $\forall x \in X : \sup\limits_{f \in F} f(x) < \infty$.

Satz 60 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Seien $(X, \mathbb{O})$ ein Baireraum und $F \subseteq \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ punktweise gleichmäßig nach oben beschränkt.

Dann existiert eine nicht leere, offene Menge O und ein $M \in [0, \infty)$ mit $\forall f \in F,\ x \in O : f(x) \leq M$.

Beweis

Œ $F \neq \emptyset$. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f \in F$, dann ist $E_m^f := \{x \in X \mid f(x) \leq m\}$ abgeschlossen, da f stetig. Also ist auch $E_m := \bigcap\limits_{f \in F} E_m^f$ abgeschlossen.

Zu $x \in X$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{f \in F} f(x) \leq m$, also $x \in E_m$ und damit $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

Da $(X, \mathbb{O})$ ein Baireraum ist, gibt es nach Satz 57 ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Int}(E_m) \neq \emptyset$. $O := \mathrm{Int}(E_m)$ und $M := m$ tun's.

Anwendung

Betrachtet man die Menge der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dann lässt sich zeigen, dass fast alle - d.h. alle bis auf eine magere Ausnahmemenge - dieser Funktionen nirgends differenzierbar sind.

Sei dazu $M := \{f \in \mathfrak{C}([0, 1]) \mid \exists x \in [0, 1] : f \text{ ist rechtsseitig differenzierbar in } x\}$. Wir zeigen, dass M mager in $\mathfrak{C}([0, 1])$ ist.

Mit der von $||\cdot||_\infty$ induzierten Metrik d ist $\mathfrak{C}([0, 1])$ ein vollständiger metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ sei $A_n := \{f \in \mathfrak{C}([0, 1]) \mid \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] : \forall h \in (0, \frac{1}{n}] : \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq n\}$. Dann ist $M \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$.

Sei $n \geq 2$. Dann ist A_n abgeschlossen: Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A_n^{\mathbb{N}}$ und $f \in \mathfrak{C}([0, 1])$ mit $||f_k - f||_\infty \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Wir müssen zeigen, dass $f \in A_n$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ derart, dass $|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leq nh$ für $h \in (0, \frac{1}{n}]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, die gegen ein $x \in [0, 1 - \frac{1}{n})$ konvergiert. Gelte also Œ $x_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} x$.

Seien nun $h \in (0, \frac{1}{n}]$ und $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $||f_k - f||_\infty < \epsilon$ und $|f(x_k + h) - f(x + h)| < \epsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq |f(x+h) - f(x_k + h)| + |f(x_k + h) - f_k(x_k + h)| \\ &\quad + |f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| + |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leq nh + 4\epsilon. \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} < n$, also $f \in A_n$.

Schließlich ist $\mathrm{Int}(A_n) = \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$, denn andernfalls gäbe es $f \in A_n$ und $\epsilon > 0$ derart, dass $U_f^{2\epsilon} \subseteq A_n$. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gäbe es dann ein Polynom $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $p \in U_f^\epsilon$, also $U_p^\epsilon \subseteq U_f^{2\epsilon} \subseteq A_n$. Wähle dazu ein $g \in \mathfrak{C}([0, 1])$ mit $g \geq 0,\ ||g||_\infty < \epsilon,\ g$ stückweise linear, so dass die Steigung aller linearer Abschnitte betraglich größer ale $n + ||p'||_\infty$ ist („Sägezahnfunktion"). Dann läge $g + p$ in $U_p^\epsilon \backslash A_n$, ein Widerspruch.

4.2 Der Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz 61 (gleichmäßige Beschränktheit)

Seien I eine nicht leere Indexmenge, $(E, ||\cdot||)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $(E_i, ||\cdot||_i)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $T_i \in L(E, E_i)$ $(i \in I)$ und für alle $x \in E$ sei $\{||T_i x||_i \mid i \in I\}$ beschränkt.

Dann ist $\{||T_i|| \mid i \in I\}$ beschränkt.

Beweis

Für $i \in I$ setze $f_i : E \to [0, \infty),\ x \mapsto ||T_i x||_i$. Dann sind alle f_i stetig als Verkettung stetiger Abbildungen. Da $(E, ||\cdot||)$ ein Baireraum ist, existieren nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit $a \in E$ und $\epsilon, M \in (0, \infty)$ derart, dass $\forall i \in I,\ x \in U_a^\epsilon : ||T_i x|| = f_i(x) \leq M$.

Ist $y \in E$ mit $||y|| < 1$, dann liegt $a + \epsilon y$ in U_a^ϵ, für $i \in I$ gilt also

$$\epsilon ||T_i y||_i = ||T_i(a + \epsilon y) - T_i a||_i \leq ||T_i(a + \epsilon y)||_i + ||T_i a||_i \leq 2M$$

und damit $||T_i|| \leq \frac{2M}{\epsilon}$ für alle $i \in I$.

Korollar 62

Seien I eine nicht leere Indexmenge, $(E, ||\cdot||)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $x_i' \in E'$ $(i \in I)$ und für alle $x \in E$ sei $\{|x_i' x| \mid i \in I\}$ beschränkt.

Dann ist $\{||x_i'|| \mid i \in I\}$ beschränkt.

Beweis

Klar nach Satz 61.

Korollar 63

Seien I eine nicht leere Indexmenge, $(E, ||\cdot||)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $x_i \in E$ $(i \in I)$ und für alle $x' \in E'$ sei $\{|x' x_i| \mid i \in I\}$ beschränkt.

Dann ist $\{||x_i|| \mid i \in I\}$ beschränkt.

Beweis

Da $(E', ||\cdot||_{E'})$ $\mathbb{K}$-Banachraum, $\varkappa x_i \in E''$ für alle $i \in I$ und $(\varkappa x_i) x' = x' x_i$ $(i \in I,\ x' \in E')$, ist $\{||(\varkappa x_i) x'||_{E'} \mid i \in I\}$ beschränkt, nach Korollar 62 also auch $\{||\varkappa x_i|| \mid i \in I\}$ und da $\varkappa$ normerhaltend, also auch $\{||x_i|| \mid i \in I\}$.

4.3 Der Satz von Banach-Steinhaus

Satz 64 (Banach-Steinhaus)

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$, $T_n \in L(E,F)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $M \subseteq E$ mit $\langle M \rangle$ dicht in E. Dann sind äquivalent:

(1) $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $x \in E$.
(2) $\{||T_n|| \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt und $(T_n m)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $m \in M$.

Ist die Äquivalenz erfüllt und $T : E \to F$ gegeben durch $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, dann ist T stetig.

Beweis

(1)$\Rightarrow$(2) ist klar nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit.

Gelte also jetzt (2). Da $(T_n m)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $m \in M$ konvergiert, konvergiert $(T_n m)_{n\in\mathbb{N}}$ auch für alle $m \in \langle M \rangle$. Sei $K \in (0,\infty)$ eine obere Schranke für $\{||T_n|| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zu $x \in E$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $z \in \langle M \rangle$ mit $||z - x||_E < \frac{\epsilon}{4K}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||T_m z - T_n z||_F < \frac{\epsilon}{2}$, falls $m, n \geq N$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
||T_n x - T_m x||_F &\leq ||T_n x - T_n z||_F + ||T_n z - T_m z||_F + ||T_m z - T_m x||_F \\
&\leq ||T_n|| ||x - z||_E + ||T_n z - T_m z|| + ||T_m|| ||x - z||_F \\
&\leq K||x - z||_E + \frac{\epsilon}{2} + K||x - z||E \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

also ist $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit konvergent.

Sei jetzt (1) erfüllt und $T : E \to F$ mit $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ $(x \in E)$. Dann gilt:

$$||Tx||_F = \lim_{n\to\infty} ||T_n x||_F \leq \lim_{n\to\infty} ||T_n|| ||x||_E \leq K||x||_E,$$

also $||T||$ beschränkt durch K.

Anwendung (Numerische Integration)

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ und ein stetiges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir suchen

$$I(f) := \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Häufig kann $I(f)$ nicht über $I(f) = F(b) - F(a)$ mittels einer Stammfunktion F zu f berechnet werden - sei es, weil keine Stammfunktion zu f existiert oder weil die Ermittlung von F nicht mit einem vertretbaren Aufwand numerisch möglich ist.

Nach der Definition des Riemann-Integrals lässt sich $I(f)$ allerdings beliebig genau durch eine endliche Linearkombination $\sum_{n=0}^{k} \lambda_k f(x_k)$ $\lambda_k \in \mathbb{R},\ x_k \in [a,b]$ approximieren.

Definition

Seien $n \in \mathbb{N},\ x_0, ..., x_n \in [a,b]$ und $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann heißt das durch

$$q(f) := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

definierte Funktional $q : \mathfrak{C}([a,b]) \to \mathfrak{C}([a,b])$ eine *Quadraturformel n-ter Ordnung* mit den *Stützstellen* $x_0, ..., x_n$ und den *Gewichten* $\lambda_0, ..., \lambda_n$.

Eine Folge von Quadraturformeln wird *Quadraturverfahren* genannt, falls die Folge der zugehörigen Ordnungen monoton wächst.

Korollar 65 (Szegö)

Seien $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Quadraturverfahren und $\lambda_0^{(k)}, ..., \lambda_{n_k}^{(k)}$ die zu q_k gehörigen Gewichte ($k \in \mathbb{N}$). Dann sind äquivalent:

(1) $\forall f \in \mathfrak{C}([a,b]) : q_k(f) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I(f)$.

(2) $\forall m \in \mathbb{N}_0 : q_k(x^m) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I(x^m)$ und $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n_k} |\lambda_i^{(k)}| < \infty$.

Beweis

Wir bezeichnen hier mit x^m die Abbildung $[a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^m$ ($m \in \mathbb{N}_0$). Nach dem Satz von Weierstraß liegt $M := \{x^m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $\mathfrak{C}([a,b])$, also sind mit den Räumen $(E, ||\cdot||_E) := (\mathfrak{C}([a,b]), ||\cdot||_\infty)$ und $(F, ||\cdot||_F) := (\mathbb{R}, |\cdot|)$ die Voraussetzungen des Satzes von Banach-Steinhaus erfüllt, wenn wir zeigen können, dass alle Quadraturformeln stetig sind.

Sei also q, gegeben durch $q(f) := \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k)$, eine Quadraturformel. Dann gilt $||q|| = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|$:

$\leq$: $|q(f)| = |\sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^n |\lambda_k||f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^n |\lambda_k|||f||_\infty$ ($f \in E$).

$\geq$: Für $f \in E$ mit $||f||_\infty = 1$ und $\forall k \in \{0, ..., n\} : f(x_k) = \operatorname{sign}(\lambda_k)$ gilt $q(f) = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|$.

Dass der Grenzwert in (1) auch tatsächlich das gesuchte Integral ist, folgt aus der Stetigkeit von I.

Korollar 66 (Steklov)

Seien $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Quadraturverfahren und die zu q_k gehörigen Gewichte $\lambda_0^{(k)}, ..., \lambda_{n_k}^{(k)}$ alle nicht negativ ($k \in \mathbb{N}$). Dann sind äquivalent:

(1) $\forall f \in \mathfrak{C}([a,b]) : q_k(f) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I(f)$.

(2) $\forall m \in \mathbb{N}_0 : q_k(x^m) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I(x^m)$.

Beweis

Nach dem Korollar von Szegö ist nur zu zeigen, dass $\sum_{i=0}^{n_k} |\lambda_i^{(k)}|$ beschränkt ist. Dazu:

$$\sum_{i=0}^{n_k} |\lambda_i^{(k)}| = \sum_{i=0}^{n_k} \lambda_i^{(k)} = q_k(x^0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b - a.$$

Bemerkung

(1) Ist q eine Quadraturformel mit $q(x^0) = I(x^0)$, dann gilt $||I - q|| \geq b - a$: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert nämlich ein $g \in \mathfrak{C}([a,b])$ mit $g(x_k) = \operatorname{sign}(\lambda_k)$, $||g|| \leq 1$ und $|I(g)| \leq \epsilon$. Nach der Umgekehrten Dreiecksungleichung gilt dann $||qg||_\infty - ||Ig||_\infty \leq ||Ig - qg||_\infty$, also

$$b - a = q(x^0) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \leq \sum_{k=0}^n |\lambda_k| = ||qg||_\infty \leq ||(I-q)g||_\infty + \epsilon \leq ||I-q||||g||_\infty + \epsilon \leq ||I-q|| + \epsilon$$

und damit (da $\epsilon > 0$ beliebig) $||I - q|| \geq b - a$.

Also ist eine gleichmäßige Approximation durch solche Quadraturformeln nicht möglich.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$. Fordern wir $q(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad n oder kleiner, dann wird bei vorgegebenen Stützstellen eindeutig eine Quadraturformel n-ter Ordnung bestimmt (*Lagrange-Verfahren*). Man nennt diese dann *interpolatorische Quadraturformeln*.

(3) Für interpolatorische Quadraturformeln mit äquidistanten Stützstellen ist das Korollar von Szegö nicht anwendbar (Gegenbeispiel von Polya).

(4) Für *Gauß-Formeln* sind die Gewichte nicht negativ, also ist das Korollar von Steklov anwendbar.

4.4 Der Satz von der offenen Abbildung

Satz 67 (Prinzip der offenen Abbildung)

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ $\mathbb{K}$-Banachräume und $A \in L(E, F)$ mit $AE = F$. Dann ist A offen.

Beweis

Sei $\mathbb{S}_n := \{x \in E \mid ||x||_E < \frac{1}{2^n}\}$. Wir zeigen zunächst, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt mit $\{y \in F \mid ||y||_F < \epsilon\} \subseteq A\mathbb{S}_0$. Wegen $AE = F$ und $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\mathbb{S}_1$ folgt $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA\mathbb{S}_1$. Nach dem Baireschen Kategoriesatz ist F von zweiter Kategorie, es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_1)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(nA\mathbb{S}_1)) \neq \emptyset$. Also gibt es ein $p \in F$ und ein $\eta \in (0, \infty)$ mit $\{y \in F \mid ||y - p||_F < \eta\} \subseteq \mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_1)$ und damit

$$\{z \in F \mid ||z||_F < \eta\} \subseteq \mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_1) - p \subseteq \mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_1) - \mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_1) \subseteq \mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_1 - A\mathbb{S}_1) \subseteq \mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_0).$$

Daher ist für $n \in \mathbb{N}_0$ auch $\{z \in F \mid ||z||_F < \eta\frac{1}{2^n}\} \subseteq \mathrm{Cl}(A\mathbb{S}_n)$ $(*)$.

Wir zeigen, dass $\epsilon := \frac{\eta}{2}$ die gewünschte Eigenschaft hat. Zu $y \in F$ mit $||y||_F < \frac{\eta}{2}$ gibt es nach $(*)$ ein $x_1 \in \mathbb{S}_1$ mit $||y - ax_1||_F < \frac{\eta}{2^2}$, dazu wieder nach $(*)$ ein $x_2 \in \mathbb{S}_2$ mit $||(y - Ax_1) - Ax_2||_F < \frac{\eta}{2^3}$ und induktiv schließlich ein $x_n \in \mathbb{S}_n$ mit $||x - \sum_{i=1}^{n} Ax_i|| < \frac{\eta}{2^{n+1}}$ $(**)$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $||x_i||_E < \frac{1}{2^i}$ und $(E, ||\cdot||_E)$ vollständig, folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i =: x$ mit $x \in \mathbb{S}_0$ und $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i = y$ (nach $(**)$).

Seien nun $O \subseteq E$ offen und $b \in AO$. Zu $a \in O$ mit $b = Aa$ existiert dann ein $\delta \in (0, \infty)$ derart, dass $\{x \in E \mid ||x - a||_E < \delta\} = \delta\mathbb{S}_0 + a \subseteq O$. Definiert man ϵ wie oben, dann liegt $U := \{z \in F \mid ||z||_F < \delta\epsilon\} + b$ in $\mathbb{U}_b^{(2)}$ mit $U \subseteq A(\delta\mathbb{S}_0 + a) \subseteq AO$.

Korollar 68 (Satz vom inversen Operator)

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ und $A \in L(E, F)$ bijektiv. Dann ist A^{-1} stetig.

Beweis

Nach dem Prinzip der offenen Abbildung ist A offen, also sind Urbilder offener Mengen unter A^{-1} offen und damit A^{-1} stetig.

Korollar 69

Seien $(E, ||\cdot||_1)$ und $(E, ||\cdot||_2)$ Banachräume über $\mathbb{K}$, $\alpha \in (0, \infty)$ und $||\cdot||_2 \leq \alpha||\cdot||_1$.

Dann sind $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ äquivalent.

Beweis

id_E ist stetig, linear und bijektiv, nach dem Satz vom inversen Operator ist also auch id_E^{-1}. Damit gilt $||x||_1 = ||\mathrm{id}x||_2 \leq ||\mathrm{id}_E||||x||_2$ für alle $x \in E$.

4.5 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Definition

Seien $(X, \mathbb{O}_X)$ und $(Y, \mathbb{O}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Wir nennen $G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ den *Graphen* von f.

f heißt *Graphen-abgeschlossen*, falls $G(f)$ abgeschlossen in der Produkttopologie von $X \times Y$ ist.

Satz 70

Seien $(X, \mathbb{O}_X)$ ein topopologischer Raum, $(Y, \mathbb{O}_Y)$ ein Hausdorffraum und $f : X \to Y$ stetig.

Dann ist f Graphen-abgeschlossen.

Beweis

Sei $(a, b) \in (X \times Y)\backslash G(f)$, d.h. $b \neq f(a)$. Da Y Hausdorffsch, gibt es ein $U_b \in \mathbb{U}_b$ und ein $U_{f(a)} \in \mathbb{U}_{f(a)}$ mit $U_b \cap U_{f(a)} = \emptyset$. Da f stetig, gibt es weiter ein $U_a \in \mathbb{U}_a$ mit $f(U) \subseteq U_{f(a)}$. Setze $U := U_a \times U_b$, dann $U \in \mathbb{U}_{(a,b)}$ und $U \subseteq (X \times Y)\backslash G(F)$.

Satz 71

Seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$ und $f : E \to F$ eine Abbildung. Dann gilt:

f ist Graphen-abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ x \in E,\ y \in F : ((x_n \to x$ und $Tx_n \to y) \Rightarrow Tx = y)$.

Beweis

Seien $x \in E$ und $y \in F$, dann gilt

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathrm{Cl}(G(T)) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (G(T))^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n\to\infty} Tx_n = y. \end{aligned}$$

Satz 72 (vom abgeschlossenen Graphen)

Seien $(E, ||\cdot||_1)$ und $(E, ||\cdot||_2)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ und $T : E \to F$ linear.

Genau dann ist T stetig, wenn T Graphen-abgeschlossen ist.

Beweis

$\Rightarrow$ ist klar nach Satz 70, da normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume Hausdorffsch sind.

Als abgeschlossener Unterraum von $E \times F$ ist $(G(T), ||\cdot||_{E\times F})$ selbst ein Banachraum, wenn man für $x \in E,\ y \in F$ setzt $||(x, y)||_{E\times F} := ||x||_E + ||y||_F$.

Die Abbildung $\varphi : G(T) \to E,\ (x, Tx) \mapsto x$ ist linear, stetig und bijektiv. Nach dem Satz von inversen Operator ist auch $\varphi^{-1} : E \to G(T),\ x \mapsto (x, Tx)$ stetig und somit auch T:

$$||Tx||_F \le ||x||_E + ||Tx||_F = ||x + Tx||_{E\times F} = ||\varphi^{-1}x||_{E\times F} \le ||\varphi^{-1}||||x||_E.$$

Bemerkung

(1) Seien $(E, ||\cdot||)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und E_1, E_2 abgeschlossene Unterräume von $E,\ E = E_1 \oplus E_2$. Für $x \in E$ gibt es dann eindeutige $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$ mit $x = x_1 + x_2$, die Abbildung $T : E_1 \times E_2 \to E$, $(x_1, x_2) \mapsto x1 + x_2$ ist also linear und bijektiv. Wegen $||T(x_1, x_2)|| = ||x_1 + x_2|| \le ||x_1|| + ||x_2||$ ist T auch stetig (in 0, also überall) und nach dem Satz vom inversen Operator damit ein Normisomorphismus.

(2) Seien $(E, ||\cdot||)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $P : E \to E$ ein *Projektor*, d.h. $P \in L(E, E)$ und $P^2 = P$. Dann ist auch $Q := \mathrm{id}_E - P$ ein Projektor und $PQ \equiv 0,\ P + Q = \mathrm{id}_E$. Da $E_1 := PE = \mathrm{Kern}(Q)$ und $E_2 := QE = \mathrm{Kern}(P)$ abgeschlossen sind, erfüllen E_1 und E_2 die Voraussetzungen von (1).

4.6 Der Satz von Alaoglu

Definition

Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Gamma \subseteq E^*$. Die Initialtopologie von Γ auf E (d.h. die gröbste Topologie auf E, bzgl. der alle $\gamma \in \Gamma$ stetig sind), wird als *Γ-Topologie* oder mit $\sigma(\Gamma)$ bzw. $\sigma(E,\Gamma)$ bezeichnet.

Bemerkung

(1) Offenbar gilt $\sigma(\Gamma) = \sigma(\langle\Gamma\rangle)$, da Linearkombinationen stetiger Abbildungen wieder stetig sind.

(2) Wir nennen Γ *total*, wenn $\forall x \in E\backslash\{0\} : \exists \gamma \in \Gamma : \gamma x \neq 0$.

(3) Zusätzlich zu unseren allgemeinen Überlegungen über initiale Topologien in (1.8) haben wir hier noch die Linearität der γ zur Verfügung.

(4) Ist $p \in E$, dann ist nach Satz 15 $U \subseteq E$ genau dann eine $\sigma(\Gamma)$-Umgebung von p, wenn ein endliches $F \subseteq \Gamma$ und Umgebungen $U_{\gamma p} \in \mathbb{U}^{\mathbb{K}}_{\gamma p}$ $(\gamma \in F)$ existieren mit $U \supseteq \bigcap\limits_{\gamma \in F} \gamma^{-1}(U_{\gamma p})$, d.h. wenn $\epsilon > 0$ und $F \subseteq \Gamma$ endlich existieren mit $U \subseteq \bigcap\limits_{\gamma \in F} \gamma^{-1}(U^\epsilon_{\gamma p})$.

Wir setzen $U^\epsilon_p(F) := \{x \in E \mid \forall \gamma \in F : |\gamma x - \gamma p| < \epsilon\} = \bigcap\limits_{\gamma \in F} \gamma^{-1}(U^\epsilon_{\gamma p})$.

(5) Für $x \in E$ gilt $x \in U^\epsilon_p(F) \Leftrightarrow \forall \gamma \in F : \gamma x \in U^\epsilon_{\gamma p} \Leftrightarrow \forall \gamma \in F : |\gamma x - \gamma p| < \epsilon$.

(6) Wegen $U^\epsilon_p(F) = U^\epsilon_0(F) + p$ ist die Γ-Topologie bereits bestimmt durch ihre Umgebungsbasis um 0: $\{U^\epsilon_0(F) \mid F \subseteq \Gamma \text{ endlich}, \epsilon \in (0,\infty)\}$.

(7) Für $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq E^*$ gilt $\sigma(\Gamma_1) \subseteq \sigma(\Gamma_2)$.

Satz 73 (Γ-Topologie)

Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Gamma \subseteq E^*$.

(1) $a : E \times E \to E$ und $s : \mathbb{K} \times E \to E$ sind stetig in $\sigma(\Gamma)$.

(2) Ist Γ total, dann ist $(E, \sigma(\Gamma))$ ein Hausdorffraum.

(3) Seien $x \in E$ und $\mathbb{F}$ eine Filterbasis auf E. Dann gilt $\mathbb{F} \to x \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma : \gamma\mathbb{F} \to \gamma x$.

Beweis

(1) Seien $p, q \in E$, $\beta \in \mathbb{K}$, $F \subseteq \Gamma$ endlich und $\epsilon > 0$, dann $U^{\frac{\epsilon}{2}}_p(F) + U^{\frac{\epsilon}{2}}_q(F) \subseteq U^{\frac{\epsilon}{2}}_{p+q}(F)$, denn seien $x \in U^{\frac{\epsilon}{2}}_p(F)$, $y \in U^{\frac{\epsilon}{2}}_q(F)$, dann gilt $\forall \gamma \in F : |\gamma x - \gamma p| < \frac{\epsilon}{2}$ und $\forall \gamma \in F : |\gamma y - \gamma p| < \frac{\epsilon}{2}$, also

$$\forall \gamma \in F : |\gamma(x+y) - \gamma(p+q)| \leq |\gamma x - \gamma p| + |\gamma y - \gamma q| < \epsilon.$$

Die Stetigkeit der Multiplikation in $\mathbb{K}$ liefert zu $\gamma \in F$ ein $\eta_\gamma > 0$, so dass $U^\eta_\beta U^\eta_{\gamma p} \subseteq U^\epsilon_{\beta\gamma p}$. Da F endlich ist, gilt es also ein $\delta := \min\{\eta_\gamma \mid \gamma \in F\} > 0$ mit $\forall \gamma \in F : U^\delta_\beta \cdot U^\delta_{\gamma p} \subseteq U\epsilon_{\gamma(\beta p)}$, damit $U^\delta_\beta \cdot U^\delta_p(F) \subseteq U^\epsilon_{\beta p}(F)$.

(2) Zu $p, q \in E$ mit $p \neq q$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $2\epsilon := |\gamma p - \gamma q| = |\gamma(p-q)| > 0$. Setze $F := \{\gamma\}$, dann $U^\epsilon_p(F) \cap U^\epsilon_q(F) = \emptyset$.

(3) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} \to x \text{ in } \sigma(\Gamma) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{U}^{\sigma(\Gamma)}_x \preccurlyeq \mathbb{F} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall U \in \mathbb{U}^{\sigma(\Gamma)}_x : \exists F \in \mathbb{F} : F \subseteq U \\
&\Leftrightarrow \quad \forall G \subseteq \Gamma \text{ endlich}, \ \epsilon > 0 : \exists F \in \mathbb{F} : F \subseteq U^\epsilon_x(G) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \gamma \in \Gamma, \ \epsilon > 0 : \exists F \in \mathbb{F} : F \subseteq U^\epsilon_x(\{\gamma\}) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \gamma \in \Gamma, \ \epsilon > 0 : \exists F \in \mathbb{F} : \gamma F \subseteq U^\epsilon_{\gamma x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \gamma \in \Gamma : \gamma\mathbb{F} \to \gamma x.
\end{aligned}$$

Korollar 74

Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $x \in E$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ und $\Gamma \subseteq E^*$.

Dann gilt $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in $\sigma(\Gamma) \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma : \gamma x_n \to \gamma x$.

Satz 75

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann sind E' und $\varkappa E$ total.

Die Normtopologie ist feiner als die E'-Topologie, d.h. $\sigma(E') \subseteq \mathbb{O}(||\cdot||)$.

Beweis

Dass E' total ist, liest man aus Korollar 39 zum Satz von Hahn-Banach ab. $\varkappa E$ total ist klar. Schließlich liegt γ genau dann in E', wenn $\gamma \in E^*$ und $\gamma : (E, \mathbb{O}(||\cdot||)) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ stetig, also folgt die Behauptung nach Definition von $\sigma(E')$.

Definition

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Dann nennt man die Normtopolodie $\mathbb{O}(||\cdot||)$ auch *starke Topologie* auf E.

$\sigma(E, E')$ wird als *schwache Topologie* auf E, $\sigma(E', \varkappa E)$ als *schwach-$*$-Topologie* bezeichnet.

Bemerkung

(1) Nach (7) und Satz 75 gilt $\sigma(E', \varkappa E) \subseteq \sigma(E', E'') \subseteq \mathbb{O}(||\cdot||)$ (wobei $||\cdot||$ hier die Operatornorm auf E' ist).

(2) Insbesondere ist in einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum jede stark konvergente Folge auch schwach konvergent.

Hilfssatz 76

Seien $n \in \mathbb{N},\ g, f_1, ..., f_n \in E^*,\ g \notin \langle f_1, ..., f_n\rangle$.

Dann gibt es ein $a \in E$ mit $g(a) = 1$ und $f_i(a) = 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

Beweis

Wäre dem nicht so, dann wäre

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Kern}(f_i) \subseteq \operatorname{Kern}(g) \qquad (*).$$

Betrachte $T : E \to \mathbb{K}^n,\ x \mapsto f_1x, ..., f_nx$. Nach $(*)$ gilt $\forall v, w \in E : Tv = Tw \Rightarrow gv = gw$. Daher ist $\psi : TE \to \mathbb{K},\ Tx \mapsto gx$ eine auf dem Untervektorraum TE des $\mathbb{K}^n$ definierte, $\mathbb{K}$-wertige, lineare Abbildung. Zu ψ existieren dann eine Fortsetzung $\varphi \in (\mathbb{K}^n)^*$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\varphi(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$ $(z \in \mathbb{K}^n)$. Für $x \in E$ gilt

$$gx = \psi(Tx) = \varphi(Tx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$$

im Widerspruch zu $g \notin \langle f_1, ..., f_n\rangle$.

Satz 77

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\Gamma \subseteq E'$.

Dann gilt $\langle\Gamma\rangle = \{\gamma \in E^* \mid \gamma : (E, \sigma(\Gamma)) \to (\mathbb{K}, |\cdot|) \text{ ist stetig}\} =: M$.

Beweis

Nach Definition von $\sigma(\Gamma)$ gilt $\Gamma \subseteq M$ und damit auch $\langle\Gamma\rangle \subseteq M$. Sei also $\gamma \in M$. Da γ stetig mit $\gamma 0 = 0$, gibt es $G \subseteq \Gamma$ endlich und $\delta > 0$, so dass $\gamma U_0^\delta(G) \subseteq U_0^1$. Für $x \in \bigcap_{\psi \in G} \operatorname{Kern}(\psi)$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt $mx \in U_0^\delta(G)$, damit $m|\gamma x| = |\gamma(mx)| < 1$, also $\gamma x = 0$.

Mit dem Hilfssatz folgt $\gamma \in \langle G\rangle \subseteq \langle\Gamma\rangle$.

Bemerkung

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\Gamma \subseteq E'$ total.

Definiert man $F := \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{K} = \mathbb{K}^\Gamma$ und $\tau : E \to F$, definiert durch $(\tau x)(\gamma) := \gamma x$, dann gelten:

(1) F ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. τ ist linear und injektiv (da Γ total).

(2) $\tau : (E, \sigma(\Gamma)) \to (\tau E, \mathbb{O}_{\tau E})$ ist stetig ($\mathbb{O}_{\tau E}$ Produkttopologie auf τE).

Hilfssatz 78

Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $c : E \to [0, \infty)$.

Dann ist $K := \{f \in E^* \mid \forall x \in E : |fx| \leq c(x)\}$ $\sigma(E^*, \varkappa E)$-kompakt.

Beweis

Fü $x \in E$ ist die Menge $I(x) := \{z \in \mathbb{K} \mid |z| \leq c(x)\}$ kompakt und nicht leer. Nach dem Satz von Tychonoff ist dann auch $I := \prod_{x\in E} I(x) \subseteq \mathbb{K}^E$ kompakt.

Fasst man E als (totale) Teilmenge von E^{**} auf, dann ist $\tau : (K, \sigma(E^*, E)_K) \to (\tau K, \mathbb{O}_{\tau K})$ topologisch. Es bleibt dann zu zeigen, dass τK abgeschlossen in I ist; dann ist τK kompakt und damit K $\sigma(E^*), E)$-kompakt.

Für $z \in E$ ist die Projektion $I \to I(z)$, $\iota \mapsto \iota(z)$ stetig, also sind für $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$ die folgenden Mengen abgeschlossen:

$$\begin{aligned} A(x,y) &:= \{\iota \in I \mid \iota(x+y) = \iota(x) + \iota(y)\}; \\ S(\alpha x) &:= \{\iota \in I \mid \iota(\alpha x) = \alpha\iota(x)\} \text{ und damit auch} \\ \tau K &= \bigcap_{(x,y)\in E\times E} A(x,y) \cap \bigcap_{(\alpha,x)\in\mathbb{K}\times E} S(\alpha x). \end{aligned}$$

Satz 79 (Alaoglu)

Sei E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $K := \{x' \in E' \mid ||x'|| \leq 1\}$ $\sigma(E', \varkappa E)$-kompakt.

In Worten: Der Einheitskreis im Dualraum ist schwach-$*$-kompakt.

Beweis

Wähle im Hilfssatz $c := ||\cdot||$. Wegen $K := \{x' \in E' \mid ||x'|| \leq 1\} = \{f \in E^* \mid \forall x \in E : |fx| \leq ||x||\}$ ist K $\sigma(E^*, \varkappa E)$-kompakt. Mit $\sigma(E', \varkappa E) = \sigma(E^*, \varkappa E)_{E'}$ folgt die Behauptung.

Korollar 80

Sei E ein reflexiver Banachraum über $\mathbb{K}$. Dann ist $\{x \in E \mid ||x|| \leq 1\}$ schwach kompakt.

Bemerkung

Es gilt auch die Umkehrung.

Definition

Seien E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Sigma \subseteq E^*$.

$M \subseteq E$ heißt *$\sigma(\Gamma)$-beschränkt*, falls γM beschränkt für alle $\gamma \in \Gamma$.

Bemerkung

$M \subseteq E$ ist also genau dann $\sigma(\Gamma)$-beschränkt, wenn gilt: $\forall U \in \mathbb{U}_0^{\sigma(\Gamma)} : \exists \lambda \in \mathbb{K} : M \subseteq \lambda U$.

Satz 81 (Charakterisierung der Beschränktheit in schwachen Topologien)

(1) Seien E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq E$. Dann gilt

$$M \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow M \text{ ist schwach beschränkt.}$$

(2) Ist E vollständig und $M \subseteq E'$, dann gilt:

$$M \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow M \text{ ist schwach } *\text{-beschränkt.}$$

Beweis

$\Rightarrow$ ist jeweils klar. $\Leftarrow$ gilt in (1) nach Korollar 63 und in (2) nach Korollar 62.

Korollar 82

Seien E ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $M \subseteq E'$. Dann gilt:

$$M \text{ ist schwach } *\text{-kompakt} \Leftrightarrow M \text{ ist beschränkt und schwach } *\text{-abgeschlossen.}$$

Beweis

$\Rightarrow$: Nach Satz 73 und Satz 75 ist $(E', \sigma(E', \varkappa E))$ ein Hausdorffraum, also M schwach $*$-abgeschlossen. Für $x \in E$ ist $\varkappa x : (E', \sigma(E', \varkappa E)) \to \mathbb{K}$ stetig, also $\varkappa x M$ kompakt, insbesondere beschränkt. Mit dem Satz 81 (2) folgt die Beschränktheit von M.

$\Leftarrow$: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $||\frac{1}{n} M|| \leq 1$. Mit M ist auch $\frac{1}{n} M$ $\sigma(E', \varkappa E)$-abgeschlossen; nach dem Satz von Alaoglu ist dann $\frac{1}{n} M$ und damit auch M $\sigma(E', \varkappa E)$-kompakt.

5 Spektraltheorie

5.1 Wiederholung: Lineare Operatoren

Definition

Seien E, F normierte Räume, $D(T) \subseteq E$ Untervektorraum.

Ein *linearer Operator* $T : D(T) \to F$ ist eine lineare Abbildung.

$G(T) := \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\} \subseteq E \oplus F$ heißt der *Graph* von T.

T heißt ab jetzt *abgeschlossen*, wenn $G(T) \subseteq E \oplus F$ abgeschlossen ist.

T heißt *abschließbar*, wenn es einen linearen Operator $\overline{T}$ gibt mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

$\overline{T}$ heißt dann der *Abschluss* oder die *Abschließung* von T.

Beispiele (linearer Operatoren)

(1) Seien $\ell_2 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid ||x||_{\ell_2} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$ und der *Rechtsshift* S_R sowie der *Linksshift* S_L gegeben durch

$$S_R((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \begin{cases} 0 & n = 1 \\ x_{n-1} > & n > 1 \end{cases}; \qquad S_L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2).$$

Dann sind $S_R, S_L \in L(\ell_2)$, $||S_R|| = 1$, $\mathrm{Kern}(S_R) = \{0\}$, d.h. S_R injektiv, aber S_R nicht surjektiv. Analog ist $||S_L|| = 1$, S_L surjektiv, aber nicht injektiv.

(2) Sei $\ell_2(\mathbb{Z}) := \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} \mid (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$. Dann sind $S_R((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ und $S_L((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ stetig, bijektiv und isometrisch (d.h. $||S_L(x))||_{\ell_2} = ||x||_{\ell_2}$.

(3) Seien $E := \mathfrak{C}^1([0,1])$ mit $||f||_E := \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$, $F := \mathfrak{C}([0,1])$, $||f||_F := \sup\limits_{i\in[0,1]} |f(t)|$ und $T : E \to F$ mit $T(f) = f'$.

Dann ist T stetig mit $||T||_{L(E,F)} = 1$.

(4) Wir versehen nun $E := \mathfrak{C}^1([0,1])$ mit $||f||_E := ||f||_\infty$. Dann ist E kein Banachraum, vlg. Satz von Weierstraß. Jetzt ist T nicht mehr stetig bzw. beschränkt, denn mit $f_n(t) := t^n$ ist $||f_n||_\infty = 1$ und $||f_n'||_\infty = n$.

Bemerkung

Seien E, F normierte Räume. Dann wird $E \times F$ ein normierter Raum durch $||(x,y)||_{E\times F}; = ||x||_E + ||y||_F$. Diese Norm erzeugt die Produkttopologie. Schreibe dann $E \oplus F$ für den Produktraum, versehen mit dieser Norm.

$||(x,y)|| := \max\{||x||_E, ||y||_F\}$ und $||(x,y)|| := (||x||_E^2 + ||y||_F^2)^{\frac{1}{2}}$ erzeugen die gleiche Topologie. Betrachte dazu einfach $(||x||_E, ||y||_F) \in \mathbb{R}^2$ statt $(x,y) \in E \times F$.

Falls E, F Banachräume, so auch $E \oplus F$.

Anmerkung

(1) Ein linearer Operator $T : D(T) \to F$ ist stetig, wenn T stetig bzgl. der Spurtopologie auf $D(T)$ ist. Also ist T genau dann stetig, wenn für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T)^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt, dass auch $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow T : (D(T), ||\cdot||_E) \to (F, ||\cdot||_F)$ beschränkt.

(2) Seien E, F Banachräume. Dann ist ein linearer Operator $T : D(T) \to F$ genau dann abgeschlossen, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T)^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ in E und $Tx_n \to y \in F$ gilt: $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

Wir müssen dazu nachweisen, dass $(x_n, Tx_n) \subseteq G(T)$, $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$ in $E \oplus F$ impliziert, dass $(x,y) \in G(T)$.

Lemma

Seien E, F Banachräume, $T \in L(E,F)$. Dann ist T abgeschlossen.

Beweis

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ in E und $Tx_n \to y$ in F. Da T stetig ist, folgt $Tx_n \to Tx$, damit $Tx = y$.

Lemma 83

Seien E, F Banachräume, $T : D(T) \to F$ ein linearer Operator. Dann definiert $||x||_T := ||x||_E + ||Tx||_F$ für $x \in D(T)$ eine Norm auf $D(T)$, die sog. *Graphennorm*.

Dann ist $(D(T), ||\cdot||_T)$ genau dann ein Banachraum, wenn T abgeschlossen ist.

Beweis

Klar: $||\cdot||_T$ definiert eine Norm auf $D(T)$.

Sei zunächst T abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T)^{\mathbb{N}}$ Cauchyfolge bzgl $||\cdot||_T$. Nach Definition der Graphennorm sind dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ und $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen; da E, F Banachräume, gibt es $x \in E, y \in F$ mit $x_n \to x$ in E und $Tx_n \to y$ in F.

Da T abgeschlossen ist, folgt $(x, y) \in G(T)$, d.h. $x \in D(T)$ und $y = Tx$; wegen $x_n \to x$ in E und $Tx_n \to Tx$ in F folgt $||x_n - x||_T \to 0$. Also existiert $x \in D(T)$ mit $x_n \to x$ bzgl $||\cdot||_T$, d.h. $(D(T), ||\cdot||_T)$ ist ein Banachraum.

Die umgekehrte Implikation folgt analog.

Wiederholung

(1) (Satz vom abgeschlossenen Graphen)

Seien E, F Banachräume, $T : D(T) \to F$ ein linearer Operator und $D(T)$ abgeschlossen. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist.

(2) (Prinzip der offenen Abbildung)

Seien E, F Banachräume, $T \in L(E, F)$ surjektiv. Dann ist T offen.

(3) (Stetigkeit des Inversen)

Seien E, F Banachräume, $T : D(T) \to F$ ein linearer Operator mit $\mathrm{Kern}(T) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(T)$ abgeschlossen. Dann ist $T^{-1} : \mathrm{Bild}(T) \to E$ stetig.

Lemma 84

Seien E ein Banachraum, F ein normierter Raum, $T : E \to F$ Isomorphismus normierter Räume (d.h. linear, bijektiv und T, T^{-1} stetig). Dann ist auch F ein Banachraum.

Beweis

Falls $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ mit $x_n := T^{-1}(y_n)$. Also gibt es $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in E$ und $Tx_n = y_n \to Tx = y$.

Beachte: Die Linearität ist hier wichtig, betrachte z.B. $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Satz 85

Seien E, F Banachräume und $T : D(T) \to F$ ein abgeschlossener linearer Operator.

Dann gilt: $\exists C > 0 : \forall x \in D(T) : ||Tx||_F \geq C||x||_E \Leftrightarrow T$ ist injektiv und $\mathrm{Bild}(T)$ abgeschlossen.

Beweis

$\Rightarrow$: Die Injektivität ist klar. Der Operator $T : (D(T), ||\cdot||_T) \to (\mathrm{Bild}(T), ||\cdot||_F)$ ist ein Isomorphismus normierter Räume. Da $(D(T), ||\cdot||_T)$ vollständig, ist nach Lemma 84 auch $(\mathrm{Bild}(T), ||\cdot||_F)$ vollständig, d.h. $\mathrm{Bild}(T) \subseteq F$ ist abgeschlossen.

$\Leftarrow$: Klar mit dem Satz vom stetigen Inversen.

5.2 Spektrum und Resolvente

Notation

Für $T \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$ schreiben wir ab jetzt $T - \lambda$ statt $T - \lambda \mathrm{id}_E$.

Definition

Seien E ein Banachraum, $T : D(T) \to E$ ein linearer Operator mit $\overline{D(T)} = E$ (d.h. T dicht definiert).

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda : D(T) \to E \text{ bijektiv}\}$$

heißt die *Resolventenmenge* von T.

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \rho(T)$$

heißt das *Spektrum* von T.

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ ist nicht injektiv}\}$$

heißt das *Punktspektrum* oder die *Menge der Eigenwerte*.

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ injektiv, nicht surjektiv und } \overline{\mathrm{Bild}(T - \lambda)} = E\}$$

heißt das *kontinuierliche Spektrum* von T.

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{\mathrm{Bild}(T - \lambda)} \neq E\}$$

heißt das *Restspektrum* oder *residuale Spektrum*.

Bemerkung

(1) $\rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ ist eine disjunkte Überdeckung von $\mathbb{C}$.

(2) Falls $\dim(E) < \infty$, so ist $\sigma_c(T) = \emptyset = \sigma_r(T)$.

(3) Falls T abgeschlossen und $\lambda \in \rho(T)$, so ist $T - \lambda$ surjektiv und nach dem Satz vom stetigen Inversen ist $(T - \lambda)^{-1} : E \to F$ stetig. Also $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ bijektiv, } (T - \lambda)^{-1} \text{ stetig}\}$.

Definition

Sei $E : D(T) \to E$ ein linearer Operator mit $\overline{D(T)} = E$.

Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt

$$R_\lambda(T) := (T - \lambda)^{-1}$$

die *Resolvente* von T und $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ die *Resolventenabbildung*.

Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt

$$\mathrm{Eig}(T, \lambda) := \mathrm{Kern}(T - \lambda)$$

der *geometrische Eigenraum* von T zu λ.

$$\mathrm{Hau}(T, \lambda) := \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \in \mathrm{Kern}(T - \lambda)^n\}$$

wird als der *algebraische Eigenraum* oder *Hauptraum* von T zu λ bezeichnet.

Die Elemente des Hauptraumes heißen *Hauptvektoren*.

Bemerkung

$\mathrm{Kern}(T - \lambda) = \{x \in D(T) \mid (T - \lambda)x = 0\}$ und $\mathrm{Kern}(T - \lambda)^n = \{x \in D(T) \mid (T - \lambda)^n x = 0\}$.

Beispiel

Für den Rechtsshift $S_R \in L(\ell_2)$ gilt $\mathrm{Kern}(S_R) = \{0\}$ und $\underline{\mathrm{Bild}(S_R) = \{}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2 \mid x_1 = 0\}$. Daher ist $||e^{(1)} - x|| \geq 1$ $(x \in \mathrm{Bild}(S_R))$, wobei $e^{(1)} = (1, 0, 0, ...)$, d.h. $\overline{\mathrm{Bild}(S_R)} \neq \ell_2$, also $0 \in \sigma_r(S_R)$.

Wiederholung (Neumann-Reihe)

Seien E ein Banachraum, $T \in L(E)$ mit $||T|| < 1$. Dann existiert $(1-T)^{-1} \in L(E)$ und

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \ ||(1-T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||T||}.$$

Beweis

Für die Partialsummen gilt

$$\sum_{n=0}^{N} ||T^n|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||T||^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||T||^n = \frac{1}{1-||T||},$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut in $L(E)$. Also existiert $S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ und

$$ST = TS = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = S - 1 \Rightarrow S(1-T) = (1-T)S = 1.$$

Damit existiert $(1-T)^{-1}$ und $S = (1-T)^{-1}$.

Satz 86

Seien E ein $\mathbb{C}$-Banachraum, T ein abgeschlossener linearer Operator in E mit $\overline{D(T)} = E$.

Dann sind $\rho(T)$ offen und $\sigma(T)$ abgeschlossen.

Beweis

Falls $\rho(T) = \emptyset$, ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \rho(T)$, dann

$$T - \lambda = (T - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0) = (T - \lambda_0)(1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}).$$

Falls $|\lambda - \lambda_0| ||(T-\lambda_0)^{-1}|| < 1$, so ist $(1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1})$ invertierbar nach dem Satz von Neumann und damit existiert

$$(T-\lambda)^{-1} = (1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1})^{-1}(T - \lambda_0)^{-1} \in L(E).$$

Also ist $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(T-\lambda_0)^{-1}||}\} \subseteq \rho(T)$, d.h. $\rho(T)$ ist offen.

Korollar 87

(1) Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ ist $||(T-\lambda_0)^{-1}|| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))}$.

(2) Für $\lambda_0 \in \rho(T),\ \lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(T-\lambda_0)^{-1}||}$ ist $R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}$.

Beweis

(1) Nach letzten Beweis gilt $||R_{\lambda_0}(T)|| < \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|} \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$. Also $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow ||R_{\lambda_0}(T)|| \geq \frac{1}{|\lambda-\lambda_0|}$. Damit

$$||R_{\lambda_0}(T)|| \geq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|} = \frac{1}{\inf\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda - \lambda_0|} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))}.$$

(2) Neumann-Reihe ausgeschrieben.

Definition

Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E *konvergiert schwach* gegen $x \in E$, falls für alle stetigen Funktionale $T \in E'$ gilt: $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$, d.h. $x_n \to x$ in der schwachen Topologie $\sigma(E, E')$.

Wir schreiben dann $x_n \rightharpoonup x$ bzw. $x_n \overset{w}{\longrightarrow} x$.

Definition

Seien E, F normierte Räume, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(E,F)^{\mathbb{N}}$ und $T \in L(E,F)$.

$T_n \to T$ *gleichmäßig* oder *in der Norm*, falls $||T_n - T||_{L(E,F)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$T_n \to T$ *stark* bzw. *in der starken Topologie*, falls $||T_n x - Tx||_F \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(x \in E)$.

$T_n \to T$ *schwach* bzw. *in der schwachen Topologie*, falls $\forall x \in E,\ \forall f \in F' : |f(T_n x) - f(Tx)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notation

$T_n \xrightarrow{||\cdot||} T$ (in der Norm), $T_n \xrightarrow{s} T$ (stark), $T_n \xrightarrow{w} T$ (schwach).

Beachte

Für Operatoren ist $T_n \xrightarrow{w} T$ doppelt (und verschieden) definiert. Meistens ist $T_n \xrightarrow{w} T$ wie in der letzten Definition zu verstehen.

Bemerkung

(1) In der starken Topologie ist $\{\{T \in L(E,F) \mid ||Tx||_F < \frac{1}{n}\} \mid x \in E,\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungssubbasis der 0.

(2) In der schwachen Topologie ist $\{\{T \in L(E,F) \mid |f(Tx)| < \frac{1}{n}\} \mid x \in E,\ f \in F',\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungssubbasis der 0.

(3) Beide Topologien sind lokal konvex.

Anmerkung

Es gilt $T_n \xrightarrow{||\cdot||} T \Rightarrow T_n \xrightarrow{s} T \Rightarrow T_n \xrightarrow{w} T$; die Umkehrungen gelten i.A. nicht.

Wiederholung (Fortsetzungssätze von Hahn-Banach)

(1) Seien E ein normierter Raum, $x \in E\backslash\{0\}$. Dann existiert ein $f \in E'$ mit $||f||_{E'} = 1$ und $fx = ||x||_E$.

(2) Sei E ein normierter Raum. Dann ist die Abbildung $\varkappa : E \to E''$ mit $(\varkappa x)(f) := f(x)$ $(f \in E')$ wohldefiniert, linear und isometrisch (insbesondere injektiv).

Lemma 88

Seien E ein normierter Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge, wenn $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge für alle $f \in E'$ mit $||f||_{E'} \le 1$ ist.

Eine Cauchyfolge heißt dabei *gleichmäßig*, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \ge N : \forall f \in E',\ ||f|| \le 1 : |f(x_n) - f(x)| < \epsilon.$$

Beweis

$\Rightarrow$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann ist

$$\sup_{f\in E',\ ||f||\le 1} |f(x_n) - f(x)| \le \sup_{f\in E',\ ||f||\le 1} ||f||_{E'} ||x_n - x_m||_E = ||x_n - x_m||_E \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge für alle $f \in E'$ mit $||f||_{E'} \le 1$.

$\Leftarrow$: Sei $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge. Wir verwenden $E \hookrightarrow E''$:

$$||x_n - x_m||_E = ||\varkappa x_n - \varkappa x_m||_{E''} = \sup_{f\in E',\ ||f||_{E'}\le 1} |\underbrace{f(x_n)}_{\varkappa x_n(f)} - \underbrace{f(x_m)}_{\varkappa x_m(f)}| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Definition

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein *Gebiet* (d.h. offen und zusammenhängend), E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $x : \Omega \to E$. Dann heißt x *holomorph*, falls für alle $z_0 \in \Omega$ der Limes

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{x(z_0 + h) - x(z_0)}{h}$$

in der Normtopologie existiert.

x heißt *schwach holomorph*, falls der Limes in der schwachen Topologie existiert.

Satz 89

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $x : \Omega \to E$.

Dann ist x genau dann holomorph, wenn x schwach holomorph ist.

Beweis

$\Rightarrow$ ist trivial. Seien x also schwach holomorph, $z \in \Omega$. Sei $\Gamma_z := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - z| = \epsilon\} \subseteq \Omega$ mit positiver Orientierung und ϵ passend. Für $f \in E'$ gilt nach der Cauchyschen Integralformel:

$$f(x(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{f(x(\mu))}{\mu - z} \, \mathrm{d}\mu.$$

Für $0 < |h| < \epsilon$ ist dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(f(x(z+h)) - f(x(z))) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(x(z)) \\
= \; & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\mu - z - h} - \frac{1}{\mu - z} \right) - \frac{1}{(\mu - z)^2} f(x(\mu)) \, \mathrm{d}\mu \\
= \; & \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{f(x(\mu))}{(\mu - z - h)(\mu - z)^2} \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mu \mapsto f(x(\mu))$ holomorph und damit stetig, also gibt es $C_f > 0$ mit

$$|f(x(\mu))| \leq C_f \ (\mu \in \Gamma_z, \ f \in E').$$

Damit $||x(\mu)||_E \leq C$ $(\mu \in \Gamma_z)$ für ein $C > 0$ nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Benutze dabei $f(x(\mu)) = \varkappa((x(\mu)))(f)$. Damit

$$\left| \frac{1}{h}(f(x(z+h)) - f(x(z))) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(x(z)) \right| \leq C_0 h ||f||_{E'} C \qquad \left(C_0 := \frac{1}{2\pi i} \int \left| \frac{1}{(\mu - z - h)(\mu - z)^2} \right| \, \mathrm{d}\mu \right).$$

Somit ist für $h_n \to 0$ die Folge $(\frac{1}{h_n}(x(z + h_n) - x(z)))_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßige, schwache Cauchyfolge für $f \in E'$, $||f|| \leq 1$, also eine Cauchyfolge in E nach Lemma 88, d.h. $x : \Omega \to E$ ist holomorph.

Korollar 90

Seien E ein Banachraum, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$. Es gelte weiter

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in E \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} ||a_n|| |z - z_0|^n < \infty \text{ für } |z - z_0| < \epsilon$$

Dann ist x holomorph an der Stelle z_0.

Beweis

Für $f \in E'$ gilt

$$f(x(z)) = f\left(\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n \right) = \lim_{N \to \infty} f\left(\sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n \right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} f(a_n)(z - z_0)^n,$$

also $f(x(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)(z-z_0)^n$. Weiter gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(a_n)||z-z_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||f||||a_n||_E|z-z_0|^n < \infty, \text{ da } |z-z_0| < \epsilon$$

Also lässt sich $f(x(z))$ um z_0 in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickeln, d.h. $f(x)$ ist holomorph an der Stelle z_0. Damit ist x schwach holomorph an der Stelle z_0; nach Satz 89 ist x damit an der Stelle z_0 holomorph.

Satz 91

Seien E ein Banachraum, T ein abgeschlossener linearer Operator in E mit $\overline{D(T)} = E$.

Dann ist die Resolvente $\rho(T) \to L(E),\ \lambda \mapsto R_\lambda(T)$ holomorph in $\rho(T)$.

Beweis

Beachte: Da T abgeschlossen ist, ist die Abbildung wohldefiniert.

Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Nach Korollar 87 lässt sich $R_\lambda(T)$ in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1} \text{ für } |\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}(T)||}.$$

Nach Korollar 90 ist $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ holomorph an der Stelle λ_0.

Satz 92

Seien E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in L(E)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer.

Beweis

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > ||T||$ ist $T - \lambda = (-\lambda)(1-\lambda^{-1}T)$ nach dem Satz von Neumann in $L(E)$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq ||T||\}$. Damit ist $\sigma(T)$ kompakt.

Für $|\lambda| > ||T||$ gilt

$$||R_\lambda(T)|| = \left\| \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - ||T||} \overset{|\lambda|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Angenommen, $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $C > 0$ mit $||R_\lambda(T)|| \leq C$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, da stetige Abbildungen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen. Für $x \in E$ und $f \in E'$ ist die Abbildung $\lambda \to f(R_\lambda(T))$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt ist, also nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen

$$|f(R_\lambda(T)x)| \leq ||f||||R_\lambda(T)||||x|| \overset{|\lambda|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt, dass $f(R_\lambda(T)x) = 0$. Damit

$$0 = f(R_\lambda(T)x) = (\varkappa(R_\lambda(T)x))(f) \Rightarrow R_\lambda(T)x = 0 \Rightarrow R_\lambda(T) = 0$$

im Widerspruch zur Invertierbarkeit.

Bemerkung

Falls T unbeschränkt, kann sowohl $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\sigma(T) = \emptyset$ auftreten:

(1) Seien $E = \mathfrak{C}([0,1])$ und T gegeben durch $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \mathfrak{C}^1([0,1])$. Dann ist T unbeschränkt, da für $f_n(t) := t^n$ folgt, dass $||f_n|| = 1$ und $||Tf_n|| = ||f_n'|| = n$, d.h. T unbeschränkt.

T ist abgeschlossen, dann sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T)^{\mathbb{N}}$ mit $f_n \to f$ in E und $Tf_n = f_n' \to g$ in E. Dann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren, gilt $f \in \mathfrak{C}^1([0,1])$ und $f_n' \to f$, also $f \in D(T)$ und $g = f' = Tf$. Also ist T abgeschlossen.

Allerdings gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$, denn die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ liegt in $\text{Kern}(T-\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

(2) Seien $E = \mathfrak{C}_0([0,1]) := \{f \in \mathfrak{C}([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \{f \in E \mid f' \in E\}$. Seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f, g \in E$. Betrachte die Gleichung $(T - \lambda)f =: g$ bzw. $f' - \lambda f = g$. Versehen mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differenzialgleichung die eindeutige Lösung $f(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\, ds$. Dann $f'(0) = g(0) + \lambda f(0) = 0$, d.h. $f' \in E$ und damit $f \in D(T)$. Somit ist $T - \lambda : D(T) \to E$ bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, also ist $\rho(T) = \mathbb{C} \Rightarrow \sigma(T) = \emptyset$.

Definition

Seien E, F, G normierte Räume, $S, \tilde{S}$ lineare Operatoren von E nach F und T ein linearer Operator von F nach G.

Der Operator $S + \tilde{S}$ ist definiert durch $D(S + \tilde{S}) := D(S) \cap D(\tilde{S})$ und $(S + \tilde{S})x := Sx + \tilde{S}x$ für $x \in D(S + \tilde{S})$.

Der Operator $TS : E \to G$ ist definiert durch $D(TS) := \{x \in D(S) \mid Sx \in D(T)\}$ und $(TS)x := T(Sx)$ für $x \in D(TS)$.

Notation

Wir schreiben $S \subseteq \tilde{S}$, falls $D(S) \subseteq D(\tilde{S})$ und $\tilde{S}|_{D(S)} = S$.

Lemma 93 (approximative Eigenwerte)

Seien E, F Banachräume und $T : D(T) \to F$ ein abgeschlossener linearer Operator.

Die *Menge der approximativen Eigenwerte* von T ist definiert als

$$\sigma_{app}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (D(T))^{\mathbb{N}},\ ||x_n|| = 1 : ||(T - \lambda)x_n|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Dann gilt $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{app}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Beweis

(1) Sei $\lambda \in \sigma_{app}(T)$. Angenommen, $\lambda \in \rho(T)$, dann $(T - \lambda)^{-1}$ stetig, d.h.

$$\frac{||x_n||}{||(T - \lambda)x_n||} \le ||(T - \lambda)^{-1}|| < \infty,$$

Widerspruch zu $\lambda \in \sigma_{app}(T)$.

(2) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ setze $x_n := x$ mit $x \in \mathrm{Kern}(T - \lambda)$, $||x|| = 1$. Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$, dann ist $T - \lambda$ injektiv und $\mathrm{Bild}(T - \lambda)$ nicht abgeschlossen. Nach Satz 85 gibt es damit kein $C > 0$ mit $||(T - \lambda)x|| \ge C||x||$ für alle $x \in D(T)$, d.h. es gibt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (D(T))^{\mathbb{N}}$, $||x_n|| = 1$ mit $||(T - \lambda)x_n|| \to 0$, d.h. $\lambda \in \sigma_{app}(T)$.

5.3 Adjungierte Operatoren in Banachräumen

Satz 94

Seien E, F Banachräume und $T \in L(E,F)$. Dann wird durch $f_1(x) := f(Tx)$ für jedes $f \in F'$ ein beschränktes, lineares Funktional $f_1 \in E'$ definiert.

Die Abbildung $T' : F' \to E',\ f \mapsto f_1$ heißt die *(Banachraum-)Adjungierte* zu T.

Es gilt $T' \in L(E', F')$ und $L(E,F) \to L(F', E'),\ T \mapsto T'$ ist eine Isometrie.

Beweis

$f_1 = f \circ T$, d.h. f_1 ist linear und stetig. Weiter gilt

$$|f_1(x)| = |f(Tx)| \leq ||f||||T||||x|| \Rightarrow ||f_1|| \leq ||f||||T|| \Rightarrow ||T'|| \leq ||T||.$$

Der Operator T' ist linear, da

$$T'(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx).$$

Also ist T' linear und stetig. Ebenso ist die Abbildung $T \to T'$ linear.

Zu zeigen bleibt $||T|| \leq ||T'||$. Nach Hahn-Banach existiert zu $x \in E$ ein $f_x \in E'$ mit $||f_x|| = 1$ und $f_x(Tx) = ||Tx||$. Damit ist

$$||Tx|| = |f_x(Tx)| = |(T'f_x)(x)| \leq ||T'||||f_x||||x|| = ||T'||||x||.$$

Bemerkung

(1) Für $T \in L(E,F)$ ist $T'' \in L(E'', F'')$ und $T''|_E = T$:
$$(T''(\varkappa x))(f) = (\varkappa x)(T'f) = (T'f)(x) = f(Tx) = (\varkappa(Tx))(f).$$

(2) Falls $T \in L(E,F)$ und $S \in L(F,G)$, so ist $(ST)' = T'S'$:
$$((ST)'f)(x) = f(STx) = (S'f)(Tx) = T'(S'f)(x).$$

(3) Falls $T \in L(E,F)$ invertierbar, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$:
$$(T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = \text{ id}' = \text{ id und } T'(T^{-1})' = (T^{-1}T)' = \text{ id}' = \text{ id}.$$

Definition

Seien E, F Banachräume, $T : E \to F$ linear und $\overline{D(T)} = E$. Dann definieren wir

$$D(T') := \{f \in F' \mid \exists f_1 \in E' : \forall x \in D(T) : f(Tx) = f_1(x)\} \text{ und } T'f := f_1,\ f \in D(T').$$

Kurz: $D(T') = \{f \in F' \mid x \mapsto f(Tx) \in E'\}$.

Bemerkung

(1) $T'f$ ist eindeutig bestimmt: Seien $f_1, f_2 \in E'$ mit $\forall x \in D(T) : f_1(x) = f(Tx) = f_2(x)$. Wegen $\overline{D(T)} = E$ und der Stetigkeit von f_1, f_2 auf E folgt $f_1 = f_2$ auf E.

(2) $(f,g) \in G(T') \Leftrightarrow \forall x \in D(T) : g(x) = f(Tx)$.

(3) T' ist abgeschlossen: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T')^{\mathbb{N}}$ mit $f_n \to f$ in F' und $T'f_n \to g$ in E'.
Für $x \in D(T)$ ist dann $\forall x \in D(T) : f(Tx) = \lim_{n\to\infty} f_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} (T'f_n)(x) = g(x)$.
Also $f \in D(T')$ und $T'f = g$, d.h. T' ist abgeschlossen.

5.4 Adjungierte Operatoren in Hilberträumen

Definition

Seien E, F Hilberträume. Dann ist $E \oplus F$ ein Hilbertraum, wenn man setzt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{E \oplus F} := \langle x_1, y_1 \rangle_E + \langle x_2, y_2 \rangle_F.$$

Weiter wird $E \oplus F$ ein normierter Raum durch

$$||(x, y)||_{E \oplus F} := \sqrt{||x||_E^2 + ||y||_F^2}.$$

Bemerkung

$|| \cdot ||_{E \oplus F}$ ist äquivalent zu der in (5.1) definierten Norm $|| \cdot ||_{E \times F}$.

Definition

Seien H ein Hilbertraum und $A \subseteq H$. Wir setzen

$$A^\perp := \{x \in H \mid \forall a \in A : \langle a, x \rangle_H = 0\}.$$

Bemerkung

(1) Es gilt $A^\perp = \overline{A}^\perp$ und $A^\perp$ ist abgeschlossen.

(2) A liegt genau dann dicht in H, wenn $A^\perp = \{0\}$.

Wiederholung (Satz von Riesz)

Sei H ein Hilbertraum. Dann ist

$$\iota_E : E \to E', \ x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$$

wohldefiniert, bijektiv, isometrisch und konjugiert linear.

Satz 95

Seien E, F Hilberträume, $T \in L(E, F)$. Dann gilt:

$$\forall y \in F : \exists! y^* \in E : \forall x \in E : \langle Tx, y \rangle_F = \langle x, y^* \rangle = \langle x, T^* y \rangle,$$

wenn man setzt $T^* y := y^*$. $T^* \in L(F, E)$ heißt die *(Hilbertraum-)Adjungierte* zu T.

Hilbertraum- und Banachraum-Adjungierte hängen zusammen über $T^* = \iota_E^{-1} \circ T' \circ \iota_F$.

Beweis

Folgt direkt aus Satz 94 und dem Satz von Riesz.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & E' \xrightarrow{T'} F' & \\ \iota_E \downarrow & & \downarrow \iota_F \\ & E \xrightarrow{T^*} F & \end{array}$$

kommutiert, d.h. $T^* = \iota_E^{-1} \circ T' \circ \iota_F$.

Definition

Seien E, F Hilberträume, $T : E \to F$ linear mit $\overline{D(T)} = E$. Dann ist

$$D(T^*) := \{y \in F \mid x \mapsto \langle Tx, y \rangle \text{ ist ein stetiges, lineares Funktional auf } D(T)\}.$$

Wir definieren dann $T^* : F \to E$ durch $T^* y := y^*, \ y \in D(T^*)$.

Bemerkung

Die Definition macht Sinn, da gilt $y \in D(T^*) \Rightarrow \exists! y^* \in E : \forall x \in D(T) : \langle Tx, y\rangle_F = \langle x, y^*\rangle_E = \langle x, T^* y\rangle$.

Definition

Seien E, F Hilberträume. $T \in L(E, F)$ heißt *unitär*, wenn $T^*T = \mathrm{id}_E$ und $TT^* = \mathrm{id}_F$.

$T : E \to F$ linear mit $\overline{D(T)} = E$ heißt *selbstadjungiert*, falls $T^* = T$, und *normal*, falls $TT^* = T^*T$.

T heißt *wesentlich selbstadjungiert*, falls T abschließbar und $\overline{T}$ selbstadjungiert.

T heißt *symmetrisch*, falls $T \subseteq T^*$, d.h. falls $\forall x, y \in D(T) : \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

Lemma 96

Seien E, F Hilberträume, $T : E \to F$ linear mit $\overline{D(T)} = E$. Wir definieren unitären Isomorphismus

$$U : E \oplus F \to F \oplus E,\ (x, y) \mapsto (y, -x).$$

Dann gilt $G(T^*) = U(G(T)^\perp) = (U(G(T)))^\perp$.

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(y, y^*) \in G(T^*) &\Leftrightarrow \forall x \in D(T) : \langle Tx, y\rangle_F - \langle x, y^*\rangle_E = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in D(T) : 0 = \langle (x, Tx), (-y^*, y)\rangle_{E\oplus F} = \langle (x, Tx), U^{-1}(y, y^*)\rangle_{E\oplus F} \\
&\Leftrightarrow U^{-1}(y, y^*) \in G(T)^\perp \\
&\Leftrightarrow (y, y^*) \in U(G(T)^\perp) \overset{\text{unitär}}{=} (U(G(T)))^\perp.
\end{aligned}$$

Satz 97

Seien E, F Hilberträume, $T : E \to F$ linear mit $\overline{D(T)} = E$. Dann gelten:

(1) T^* ist abgeschlossen.

(2) Falls T abschließbar, ist T^* dicht definiert und $T^{**} = \overline{T}$.

(1) Wegen $G(T^*) = (U(G(T)))^\perp$ ist $G(T^*)$ abgeschlossen.

(2) Gelte nun $\overline{D(T^*)} = E$. Sei T abschließbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
y_0 \in D(T^*)^\perp &\Rightarrow \forall y \in D(T^*) : \langle y_0, y\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \forall (y, z) \in G^(T^*) : \langle (0, y_0), (-z, y)\rangle_{E\oplus F} = 0 \\
&\overset{\text{Lemma 95}}{\Rightarrow} (0, y_0) \in (U^{-1}(G(T^*)))^\perp = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)} \overset{\text{abschl.}}{=} G(\overline{T}) \\
&\Rightarrow y_0 = \overline{T}0 = 0.
\end{aligned}$$

Wendet man nun Lemma 95 an auf $T^* : F \to E$, dann

$$G(\overline{T}) \overset{\text{s.o.}}{=} (U^{-1}(G(T^*)))^\perp = (-U^{-1}(G(T^*)))^\perp = (U(G(T^*)))^\perp \overset{\text{Lemma 95}}{=} G(T^{**}),$$

also $\overline{T} = T^{**}$.

Korollar 98

Seien E, F Hilberträume, $T : E \to F$ linear und abgeschlossen mit $\overline{D(T)} = E$. Dann ist $T^{**} = T$.

Satz 99

Seien E, F Hilberträume, $T : E \to F$ linear und abgeschlossen mit $\overline{D(T)} = E$. Dann gelten:

(1) $\text{Bild}(T)^\perp = \overline{\text{Bild}(T)}^\perp = \text{Kern}(T^*)$.

(2) $\overline{\text{Bild}(T)} = (\text{Kern}(T^*))^\perp$.

(3) $\text{Bild}(T^*)^\perp = \text{Kern}(T)$.

(4) $\overline{\text{Bild}(T^*)} = (\text{Kern}(T))^\perp$.

Beweis

(1) Es gilt: $y \in \text{Bild}(T)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in D(T) : \langle Tx, y\rangle = 0 \Leftrightarrow y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0 \Leftrightarrow y \in \text{Kern}(T^*)$.

(2) Mit (1): $\overline{\text{Bild}(T)} = \text{Bild}(T)^{\perp\perp} = (\text{Kern}(T^*))^\perp$.

(3) Nach Satz 96: T^* abgeschlossen, dicht definiert und $T^{**} = T \Rightarrow \text{Bild}(T^*)^\perp = \text{Kern}(T^{**}) = \text{Kern}(T)$ nach (1).

(4) Wende (2) an auf T^*.

Beispiel

Sei $E = \mathcal{L}_2([0,1])$, Definiere T_1, T_2, T_3 durch

$$\begin{aligned}
D(T_1) &= \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ absolut stetig}, f' \in \mathcal{L}_2([0,1])\} \\
D(T_2) &= D(T_1) \cap \{f \mid f(0) = f(1)\} \\
D(T_3) &= D(T_1) \cap \{f \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ und} \\
\\
T_k f &= if' \text{ für } f \in D(T_k),\ k = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Dann ist $(D(T_k))$ dicht in E, $k = 1,2,3$. Seien $f, g \in D(T_1)$. Dann gilt:

$$\langle T_1 f, g\rangle = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}\ \mathrm{d}x = if(x)\overline{g(x)}\Big|_0^1 - i\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}\ \mathrm{d}x = if(1)\overline{g(1)} - if(0)\overline{g(0)} + \langle f, T_1 g\rangle.$$

Damit $\forall f \in D(T_1), g \in D(T_3) : \langle T_1 f, g\rangle = \langle f, T_1 g\rangle$; ebenso für alle $f, g \in D(T_2)$. Folglich erhalten wir $D(T_1) \subseteq D(T_3^*)$, $D(T_2) \subseteq D(T_2^*)$ und $D(T_3) \subseteq D(T_1^*)$.

Seien nun $g \in D(T_1^*)$ und $\varphi := T_1^* g$, dann $\Phi(x) := \int_0^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ absolut stetig und $\Phi' = \varphi$. Für $f \in D(T_1)$ gilt dann:

$$\int_0^1 if'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \langle T_1 f, g\rangle = \langle f, \varphi\rangle = \int_0^1 f\overline{\varphi}\ \mathrm{d}x = \underbrace{f(x)\Phi(x)\Big|_0^1}_{=f(1)\Phi(1)} - \int_0^1 f'(x)\overline{\Phi(x)}\ \mathrm{d}x$$

Wähle f als Konstante, dann $\Phi(1) = 0$ und damit

$$\forall f \in D(T_1) : \int_0^1 if'(x)\overline{g(x) + i\Phi(x)}\ \mathrm{d}x = 0.$$

Damit $g + i\Phi \in \text{Bild}(T_1)^\perp = \{0\}$. Also ist g absolut stetig und $g(0) = -i\Phi(0) = 0$ und $g(1) = -i\Phi(1) = 0$, also $g \in D(T_3)$ und damit $D(T_1^*) = D(T_3)$ und $T_1^* = T_3$.

Analog sieht man $T_3^* = T_1$ und $T_2^* = T_2$; insbesondere sind T_1, T_2, T_3 abgeschlossen.

5.5 Das Spektrum selbstadjungierter und unitärer Operatoren

Vorbemerkung

In Anwendungen ist das Spektrum eines Operators oft wichtig. Zum Beispiel bestimmt bei Differenzialgleichungen das Spektrum des Operators die Stabilität, d.h. die Eigenschaft, dass die Lösung gegen 0 konvergiert für große Zeiten.

Am einfachsten sind selbstadjungierte Operatoren, die zum Glück auch am häufigsten sind.

Lemma 100

Seien E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E)$. Dann ist T selbstadjungiert $\Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in E$.

Beweis

(1) Sei $T = T^*$, dann $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$.

(2) Seien $x, y \in E,\ \alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist nach Voraussetzung

$$\begin{array}{rlcl} & \langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle & = & \overline{\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle} \\ \Longrightarrow & \alpha\langle Tx, y\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle & = & \alpha\langle y, Tx\rangle + \overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle \\ \overset{\alpha:=1}{\Longrightarrow} & \langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle & = & \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle \\ \overset{\alpha:=i}{\Longrightarrow} & \langle Ty, x\rangle - \langle Tx, y\rangle & = & \langle y, Tx\rangle - \langle x, Ty\rangle \\ \Longrightarrow & \langle Ty, x\rangle & = & \langle y, Tx\rangle \end{array}$$

für alle $x, y \in E$, also $T = T^*$.

Satz 101 (Spektrum selbstadjungierter Operatoren)

Seien E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und T ein selbstadjungierter (nicht notwendig beschränkter) Operator.

Dann gelten:

(1) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(2) $||(T-\lambda)^{-1}||_{L(E)} \leq |\Im(\lambda)|^{-1}$ $(\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$.

(3) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ sind algebr. und geometr. Vielfachheit identisch, d.h. $\mathrm{Kern}(T-\lambda) = \mathrm{Hau}(T, \lambda)$.

(4) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(5) $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Beweis

(1) Seien $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $x \in D(T)$. Dann gilt mit Lemma 100:

$$||(T-\lambda)x||\,||x|| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} |\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \geq |\Im\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \overset{\lambda\ \text{reell}}{=} |\Im(\lambda)|\,||x||^2. \qquad (*)$$

Nach Satz 85 ist $T-\lambda$ injektiv und $\mathrm{Bild}(T-\lambda)$ abgeschlossen.

$T-\lambda$ ist surjektiv, denn nach Satz 99 gilt $\mathrm{Bild}(T-\lambda)^{\perp} = \mathrm{Kern}(T-\lambda)^* = \mathrm{Kern}(T-\overline{\lambda}) = \{0\}$, da $T-\overline{\lambda}$ injektiv. Also $\lambda \in \rho(T)$.

(2) Setze $y := (T-\lambda)x$ in $(*)$ ein, dann $||y|| \geq |\Im(\lambda)|\,||(T-\lambda)^{-1}y||$ für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

(3) $\mathrm{Kern}(T-\lambda) \subseteq \mathrm{Hau}(T,\lambda)$ nach Definition. Sei also $x \in \mathrm{Hau}(T,\lambda)\backslash\mathrm{Kern}(T-\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ mit $(T-\lambda)^n x = 0$ und $(T-\lambda)x \neq 0$, also

$$||(T-\lambda)^{n-1}x||^2 = \langle (T-\lambda)^{n-1}x, (T-\lambda)^{n-1}x\rangle \overset{T=T^*}{=} \langle (T-\lambda)^n x, (T-\lambda)^{n-2}x\rangle = 0,$$

d.h. $(T-\lambda)^{n-1}x = 0$ und iterativ dann $(T-\lambda)x = 0$, Widerspruch.

(4) Seien λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte von T mit zugehörigen Eigenvektoren $x_1, x_2 \in E$, dann

$$\lambda_1 \langle x, y \rangle = \langle \lambda_1 x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle x, \lambda_2 y \rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle,$$

also $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x, y \rangle = 0$ und damit $\langle x, y \rangle = 0$, d.h. $x \perp y$.

(5) Angenommen, $\lambda \in \sigma_r(T)$, d.h. $T - \lambda$ injektiv und $\overline{\text{Bild}(T-\lambda)} \neq E$. Nach (1) ist $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\{0\} \neq \overline{\text{Bild}(T-\lambda)}^{\perp} = \text{Kern}(T-\lambda)^*$, Widerspruch.

Satz 102 (Spekturm unitärer Operatoren)

Seien E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E)$ unitär. Dann gelten:

(1) $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

(2) $||(T-\lambda)^{-1}|| \leq \frac{1}{||\lambda|-1|}$ für $|\lambda| \neq 1$.

(3) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ sind algebr. und geometr. Vielfachheit identisch, d.h. $\text{Kern}(T-\lambda) = \text{Hau}(T, \lambda)$.

(4) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(5) $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Beweis

Analog wie eben.

Definition

Seien H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$.

Der *numerische Wertebereich* ist definiert durch $W(T) := \{\langle Tx, x \rangle \mid ||x|| = 1\}$.

Lemma 103

Seien H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

Beweis

Für $\lambda \notin \overline{W(T)}$, $||x|| = 1$ gilt:

$$0 < d := \text{dist}(\lambda, \overline{W(T)}) \leq |\lambda - \langle Tx, x \rangle| = |\langle (\lambda - T)x, x \rangle| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} ||(\lambda - T)x|| ||x|| = ||(\lambda - T)x||$$

Damit $||(T-\lambda)x|| \geq d||x||$ für $x \in H$ beliebig. Nach Satz 85 ist $\text{Bild}(T-\lambda)$ abgeschlossen und $T - \lambda$ injektiv.

Für $x_0 \in \text{Bild}(T-\lambda)^{\perp}$, $||x_0|| = 1$ ist $0 = \langle (T-\lambda)x_0, x_0 \rangle = \langle Tx_0, x_0 \rangle - \lambda$, d.h. $\lambda \in W(T)$, Widerspruch. Somit $\text{Bild}(T-\lambda) = H$, d.h. $\lambda \in \rho(T)$.

Lemma 104

Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Für $m := \inf\limits_{||x||=1} \langle Tx, x \rangle$, $M := \sup\limits_{||x||=1} \langle Tx, x \rangle$ gilt: $\sigma(T) \subseteq [m, M]$ und $m, M \in \sigma(T)$.

Beweis

Nach Lemma 102 gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)} \subseteq [m, M]$.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ mit $\langle Tx_n, x_n \rangle \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} m$. Dann ist die Sesquilinearform $[x, y] := \langle (T-m)x, y \rangle$ positiv semidefinit nach Definition von m. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} ||(T-m)x||^2 &= [x, (T-m)x] \leq [x, x]^{\frac{1}{2}} [(T-m)x, (T-m)x]^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle (T-m)x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle (T-m)^2 x, (T-m)x \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wegen $\langle (T-m)x_n, x_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ und $\langle (T-m)^2x_n, (T-m)x_n\rangle$ beschränkt folgt $||(T-m)x_n|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also $m \in \sigma_{app}(T) = \sigma(T)$. Analog $M \in \sigma(T)$.

Satz 105

Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$. Für den *Spektralradius* $r(T) := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$ gilt:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Beweis

(1) Wir zeigen: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ 0 \le a_{n+m} \le a_n a_m\ (n, m \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a := \inf_{n\in\mathbb{N}} (a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Sei dazu $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{\frac{1}{N}} < a + \epsilon$ und setze $b(\epsilon) := \max\{a_1, ..., a_N\}$. Schreibe $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = kN + r,\ 0 \le r < N$. Dann

$$\begin{aligned}(a_n)^{\frac{1}{n}} &= (a_{kN+r})^{\frac{1}{n}} \le (a_N^k a_r)^{\frac{1}{n}} \le (a+\epsilon)^{\frac{kN}{n}} b^{\frac{1}{n}} \\ &= (a+\epsilon)(a+\epsilon)^{-\frac{r}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (a+\epsilon)\left(\frac{b}{(a+\epsilon)^r}\right)^{\frac{1}{n}} < a + 2\epsilon\end{aligned}$$

für hinreichend großes n. Also $(a_n)^{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

(2) Setze in (1) $a_n := ||T^n||$ (submultiplikativ). Dann $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$.
Sei $|\lambda| > r(T)$. Dann gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\left| \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right|\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{||T^n||^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|} = \frac{r(T)}{|\lambda|} < 1.$$

Also existiert $\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n = \frac{1}{\lambda}(1 - \frac{T}{\lambda})^{-1}$ (die Neumann-Reihe konvergiert in der Operatornorm), d.h. $|\lambda| \in \rho(T)$.

(3) Seien $r_0 := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ und $|\mu| > r_0$. Seien $f \in (L(H))'$ und $F(\lambda) := f((\lambda - T)^{-1})$. Dann ist F nach (2) holomorph in $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r(T)\}$, weil die Reihe $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} f(T^n)$ konvergiert. Andererseits ist F holomorph in $\rho(T)$, d.h. die Potenzreihe konvergiert im maximalen Kreisring, der ganz in $\rho(T)$ enthalten ist. Insbesondere konvergiert die Reihe an der Stelle μ, also $f(\mu^{-n-1}T^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da $f \in (L(H))'$ beliebig war, gilt $\mu^{-n-1}T^n \to 0$ in der schwachen Topologie.

$(\mu^{-n-1}T^n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L(H))^{\mathbb{N}}$ ist normbeschränkt, denn für $f \in (L(H))'$ ist $(f(\mu^{-n-1}T^n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$ beschränkt, d.h. $\exists c_f > 0 : |f(\mu^{-n-1}T^n)| \le c_f$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist $||\mu^{-n-1}T^n||_{L(H)} \le C$ für ein $C > 0$, d.h. $||T^n||^{\frac{1}{n}} \le (C|\mu|^{n+1})^{\frac{1}{n}}$. Mit $n \to \infty$ folgt: $r(T) \le |\mu|$ und da μ beliebig mit $|\mu| > r_0$, folgt $r(T) \le r_0$. Mit (2) gilt dann $r(T) = r_0 = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Korollar 106

Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$r(T) = ||T|| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\} = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Beweis

$||T|| = \sup\limits_{||x||=1} ||Tx|| = \sup\limits_{||x||=1} \langle Tx, Tx\rangle^{\frac{1}{2}} = \sup\limits_{||x||=1} \langle T^2x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \le ||T^2||^{\frac{1}{2}}$.

Andererseits ist $||T^2||^{\frac{1}{2}} \le ||T||$ wegen der Submultiplikativität von $||\cdot||$, alsp $||T|| = ||T^2||^{\frac{1}{2}}$; iterativ damit $||T|| = ||T^{2^n}||^{\frac{1}{2^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ für alle n, d.h. $||T| = r(T)$.

Der Rest folgt aus Lemma 103 und Satz 104.

Bemerkungen

(1) Falls T nicht selbstadjungiert, stimmt die Aussage nicht: Betrachte z.B. $H = \mathcal{L}^2([0,1])$ und den Operator $(Tf)(t) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ (ein sog. Volterra-Operator). Es gilt $\sigma(T) = \{0\}$. Also ist $r(T) = 0 \neq ||T||$.

(2) Es gibt selbstadjungierte Operatoren ohne Eigenwerte, z.B. den *Multiplikationsoperator*, definiert durch $(Tf)(t) := tf(t)$ in $\mathcal{L}^2([0,1])$.

(3) Die meisten obigen Aussagen gelten nicht nur für Operatoren $T \in L(H)$, sondern für Elemente in Banachalgebren bzw. „C^*-Algebren“. Hier nur die Definitionen der Gelfand-Theorie:

Definition

Eine *Banachalgebra* A ist ein $\mathbb{C}$-Banachraum, auf dem eine Multiplikation, d.h. eine bilineare, assoziative Abbildung $A \times A \to A,\ (x,y) \to xy$ definiert ist mit $||xy|| \leq ||x||||y||$ $(x, y \in A)$.

A heißt *kommutativ*, falls $\forall x, y \in A : xy = yx$.

$e \in A$ heißt *Einheit* oder *Einselement* von A, falls $\forall x \in A : ex = x = xe$ und $||e|| = 1$.

Eine Abbildung $A \to A,\ x \mapsto x^*$ heißt eine *Involution*, falls für alle $x, y \in A$ gelten:

$$(x+y)^* = x^* + y^*; \qquad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*; \qquad x^{**} = x; \qquad (xy)^* = y^* x^*.$$

A heißt eine C^*-Algebra, falls A eine Banachalgebra mit Involution ist derart, dass

$$\forall x \in A : ||x^* x|| = ||x||^2.$$

Ein *Homomorphismus* von C^*-Algebren ist ein Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \to B$ mit

$$\forall x \in A : \Phi(x^*) = (\Phi(x))^*.$$

Beispiele

(1) Seien $A = L(E)$ und E ein $\mathbb{C}$-Banachraum mit Eins id_E. Dann hat die Menge der „kompakten Operatoren“ $A = K(E) := \{T \in L(E) \mid T \text{ kompakt}\}$ eine Eins genau dann, wenn $\dim E < \infty$.

(2) Ist T ein kompakter Hausdorffraum, dann ist $\mathfrak{C}(T)$ eine Banachalgebra mit konstanter Funktion 1 als Einselement.

(3) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist $L^\infty(\mu)$ eine Banachalgebra mit konstanter Funktion 1 als Einselement.

5.6 Der stetige Funktionalkalkül

Vorbemerkung

Der Spektralsatz ist eine Integraldarstellung der Form

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E.$$

Damit lässt sich ein „Funktionalkalkül" der Form

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}E$$

definieren, der in Anwendungen wichtig ist.

Beispielsweise wird $(\partial_t - T)u = 0$ gelöst von $u(t) = e^{tT}u(0)$.

Weiter betrachten wir $|T|, \sqrt{T}, \ldots$.

Hier werden der stetige und der messbare Funktionalkalkül behandelt.

Konvention

Im Folgenden sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.

Definition

Für $T \in L(H,H)$ und ein Polynom $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$v ist $f(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n$ (mit $T^0 := \mathrm{id}_H$).

Lemma 107 (Spektralabbildungssatz für Polynome)

Seien $T \in L(H)$ und f ein Polynom. Dann gilt $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Beweis

(1) Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Faktorisiere $f(t) - \mu = \beta \prod_{i=1}^n (t - \gamma_i)$ (wobei $n = \deg f$), $\beta, \gamma_i \in \mathbb{C}$. Dann ist $f(T) - \mu = \beta \prod_{i=1}^n (T - \gamma_i)$. Da $f(T) - \mu$ nicht bijektiv ist, gibt es ein i_0 mit $(T - \gamma_{i_0})$ nicht bijektiv, d.h. $\gamma_{i_0} \in \sigma(T)$. Andererseits ist $f(\gamma_{i_0}) - \mu = 0$, d.h. $\mu = f(\gamma_{i_0}) \in f(\sigma(T))$.

(2) Sei $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gibt ein $\gamma \in \sigma(T)$ mit $\mu = f(\gamma)$. Dann ist $f(t) - \mu = (t - \gamma)\tilde{f}(t)$ mit $\deg \tilde{f} = n-1$, also $f(T) - \mu = (T-\gamma)\tilde{f}(T) = \tilde{f}(T)(T-\gamma)$. Falls $T-\gamma$ nicht injektiv, ist auch $\tilde{f}(T)(T-\gamma)$ nicht injektiv, d.h. $f(T)-\mu$ nicht injektiv. Weiter ist $T-\gamma$ nicht surjektiv, falls $f(T)-\mu = (T-\gamma)\tilde{f}(T)$ nicht surjektiv. Somit ist $f(T) - \mu$ nicht bijektiv, also $\mu \in \sigma(f(T))$.

Satz 108 (Stetiger Funktionalkalkül)

Seien $P(\sigma(T)) := \{f \in \mathfrak{C}(\sigma(T)) \mid f \text{ Polynom}\}$, $\mathbb{1}$ die konstante Funktion 1 auf $\sigma(T)$ und $T \in L(H)$ selbstadjungiert.

Dann existiert genau ein stetiger Homomorphismus $\Phi : \mathfrak{C}(\sigma(T)) \to L(H)$ von C^*-Algebren mit $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$ und $\Phi(\mathbb{1}) = \mathrm{id}_H$.

Φ heißt *stetiger Funktionalkalkül*. Wir schreiben $f(T) := \Phi(f)$ $(f \in \mathfrak{C}(\sigma(T)))$.

Beweis

(1) Dichtheit der Polynome: Da T selbstadjungiert und beschränkt, gibt es ein Intervall $[m, M] \subseteq \mathbb{R}$ mit $\sigma(T) \subseteq [m, M]$. Zu $f \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$ gibt es eine Fortsetzung $\tilde{f} \in \mathfrak{C}([m, M])$ (Lemma von Tietze, s.u.). Nach dem Satz von Weierstraß ([PA]) liegen die Polynome dicht in $\mathfrak{C}([m, M])$ bzgl. $||\cdot||_\infty$.

(2) Eindeutigkeit: Da Φ stetig ist, ist Φ durch die Werte auf der Menge $P(\Sigma(T))$ aller Polynome bereits festgelegt. Wegen $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ist Φ bereits durch die Werte $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)})$ und $\Phi(\mathbb{1})$ eindeutig bestimmt.

(3) Existenz: Für $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n f^n$ setze $\Phi(f) = \sum_{n=0}^N a_n T^n$. Dann ist $\Phi : P(\sigma(T)) \to L(H)$ linear, multiplikativ und $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$.

Zu zeigen: Φ ist stetig. Für $f \in P(\sigma(T))$ ist

$$\begin{aligned} ||\Phi(f)||^2 &= ||\Phi(f)^*\Phi(f)|| = ||\Phi(f\overline{f})|| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\Phi(f\overline{f}))\} \\ &= \sup\{(\overline{f}f)(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 = ||f||_\infty^2. \end{aligned}$$

Hier wurden Korollar 106 auf den selbstadjungierten Operator $\Phi(\overline{f}f)$ angewendet sowie Lemma 107.

Somit ist $\Phi : (P(\sigma(T)), ||\cdot||_\infty) \to L(H)$ isometrisch, insbesondere stetig, und es existiert eine eindeutige (wieder isometrische) Fortsetzung $\Phi : \mathfrak{C}(\sigma(T)) \to L(H)$. Diese Fortsetzug ist wieder linear, multiplikativ und erfüllt $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$.

Zu Letzterem: Sei $f \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$, $g = \lim_{n\to\infty} f_n$, $f_n \in P(\sigma(T))$. Dann

$$\Phi(\overline{f}) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n) = \lim_{n\to\infty} (\Phi(f_n))^* = (\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n))^* = (\Phi(\lim_{n\to\infty} f_n))^* = \Phi(f)^*.$$

Bemerkung

Aus dem Lemma von Urisohn ([TOP]) folgt ...

Lemma (Tietze)

Seien (X, τ) ein normaler topologischer Raum, $M \subseteq X$ abgeschlossen und $f : M \to [a, b]$ stetig.

Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F : X \to [a, b]$ von f.

Bemerkung

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *normal*, falls zu $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ stets offene Mengen $U_A \supseteq A, U_B \supseteq B$ mit $U_A \cap U_B = \emptyset$ existieren.

Satz 109 (Eigenschaften des Funktionalkalküls)

(1) Der Funktionalkalkül $\mathfrak{C}(\sigma(T)) \to L(H)$, $f \mapsto f(T)$ ist isometrisch, d.h. $||f(T)|| = ||f||_\infty$.

(2) Falls $f \geq 0$ auf $\sigma(T)$, so ist $f(T) \geq 0$, d.h. $\forall x \in H : \langle f(T)x, x\rangle \geq 0$.

(3) Falls $Tx = \lambda x$, dann ist $f(T)y = f(\lambda)x$ $(f \in \mathfrak{C}(\sigma(T)))$.

(4) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ $(f \in \mathfrak{C}(\sigma(T)))$ *(Spektralabbildungssatz)*.

(5) $\{f(T) \mid f \in \mathfrak{C}(\sigma(T))\} \subseteq L(H)$ ist eine kommutative Unteralgebra. Der Operator $f(T)$ ist normal und $f(T)$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn f auf $\sigma(T)$ reellwertig ist.

Beweis

(1) Schon gezeigt in Satz 108.

(5) Folgt aus den Eigenschaften eines Funktionalkalkül (z.B. $f(T)^* = \overline{f}(T)$).

(2) Sei $0 \leq f = g^2$, $g \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$, $g \geq 0$. Dann ist

$$\langle f(T)x, x\rangle = \langle g^2(T)x, x\rangle \overset{g \text{ selbstadj.}}{=} ||g(T)x||^2 \geq 0 \ (x \in H).$$

(3) Klar für Polynome und damit für stetige f durch Approximation.

(4) Sei zunächst $\mu \notin f(\sigma(T))$, d.h. $g := \frac{1}{f-\mu} \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$. Dann gilt

$$(f(T) - \mu)g(T) = ((f - \mu)g)T = \mathbb{1}(T) = \mathrm{id}_H \text{ und mit (5) } g(T)(f(T) - \mu) = \mathrm{id}_H.$$

Also ist $f(T) - \mu$ bijektiv und damit $\mu \notin \sigma(f(T))$.

Sei umgekehrt $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gibt $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\mu = f(\lambda)$. Wähle $g_n \in P(\sigma(T))$ derart, dass $||f - g_n||_\infty \leq \frac{1}{n}$. Dann ist $g_n(\lambda) \in \sigma(g_n(T))$, d.h. es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ mit $||x_n|| = 1$ und $||(g_n(T) - g_n(\lambda))x_n|| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (approximativer Eigenwert).

Damit

$$||(f(T) - f(\lambda))x_n|| \leq \underbrace{||(f(T) - f_n(T))x_n||}_{\substack{\leq ||f(T) - g_N(T)||_{L(H)} \\ = ||f - g_n||_\infty \leq \frac{1}{n}}} + \underbrace{||(g_n(T) - g_N(\lambda))x_n||}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{||(f_n(\lambda) - g_n(\lambda))x_n||}_{\leq \frac{1}{n}} \leq \frac{3}{n}.$$

Also $\mu = f(\lambda) \in \sigma(f(T))$.

Bemerkung

Im letzten Beweis wurde verwendet, dass für normale Operatoren $T \in L(E)$ gilt: $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Sei nämlich $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\overline{\text{Bild}(T - \lambda)} \neq H$. Dann gilt:

$$\{0\} \neq \overline{\text{Bild}(T - \lambda)}^\perp = \text{Kern}(T^* - \overline{\lambda}) \overset{T \text{ normal}}{=} \text{Kern}(T - \lambda),$$

Also $\lambda \in \sigma_p(T)$. Beachte dabei:

$$\begin{aligned} ||(T - \overline{\lambda})x||^2 &= \langle (T^* - \overline{\lambda})x, (T^* - \overline{\lambda})x \rangle = \langle (T - \lambda)(T^* - \overline{\lambda})x, x \rangle \\ &= \langle (T^* - \overline{\lambda})(T - \lambda)x, x \rangle = ||(T - \lambda)x||^2. \end{aligned}$$

Lemma 110 (Stetige Sesquilinearformen)

Seien H ein Hilbertraum und $B : H \times H \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit

(1) $\forall y \in H : B(\cdot, y)$ linear;
(2) $\forall x \in H : B(x, \cdot)$ sesquilinear;
(3) $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x, y \in H : |B(x, y)| \leq C||x||||y||$.

Dann gibt es genau ein $T \in L(H, H)$, so dass für alle $x, y \in H$ gilt:

$$B(x, y) = \langle x, Ty \rangle$$

und weiter $||T||$ die kleinste Konstante C ist, für die (3) gilt.

Beweis

Sei $y \in H$. Da $B(\cdot, y)$ nach (1) linear und nach (3) stetig, existiert nach dem Satz von Riesz genau ein $z_y \in H$ mit $B(\cdot, y) = \langle \cdot, z_y \rangle$. Wir definieren

$$T : H \to H, \ y \mapsto z_y.$$

Wegen der Eindeutigkeit der z_y ist T wohldefiniert und erfüllt $\forall x, y \in H : B(x, y) = \langle x, Ty \rangle$.

T ist additiv, d.h. $\forall u, v \in H : T(u + v) = z_{u+v} \overset{\text{z.z.}}{=} z_u + z_v = T(u) + T(v)$, denn

$$\langle \cdot, z_{u+v} \rangle = B(\cdot, u + v) = B(\cdot, u) + B(\cdot, v) = \langle \cdot, z_u \rangle + \langle \cdot, z_v \rangle.$$

T ist homogen, d.h. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, u \in H : T(\alpha u) = z_{\alpha u} \overset{\text{z.z.}}{=} \alpha z_u = \alpha T(u)$, denn

$$\langle \cdot, z_{\alpha u} \rangle = B(\cdot, \alpha u) = \overline{\alpha} B(\cdot, u) = \overline{\alpha} \langle \cdot, z_u \rangle = \langle \cdot, \alpha z_u \rangle.$$

Also ist T linear. Für die Operatornorm von T gilt:

$$||T|| = \sup_{y \neq 0} \frac{||Ty||}{||y||} = \sup_{y \neq 0} \frac{||z_y||}{||y||} \overset{\text{Riesz}}{=} \sup_{y \neq 0} \frac{||\langle \cdot, z_y \rangle||}{||y||} = \sup_{y \neq 0} \frac{||B(\cdot, y)||}{||y||} \leq \frac{C||y||}{||y||} = C.$$

Also ist T stetig und $||T||$ das kleinste $C \in \mathbb{R}$ mit $|B(x, y)| \leq C||x||||y||$.

Angenommen, es gibt eine weitere Abbildung $S \in L(H, H)$, für die (1)-(3) gilt. Dann gilt für alle $x, y \in H$:

$$0 = B(x, y) - B(x, y) = \langle x, Ty \rangle - \langle x, Sy \rangle = \langle x, Ty - Sy \rangle = \langle x, (T - S)y \rangle,$$

d.h. $(T - S)y$ steht senkrecht auf allen $x \in H$, also $\forall y : (T - S)y = 0 \Rightarrow T - S = 0 \Rightarrow T = S$.

5.7 Der messbare Funktionalkalkül

Definition

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *signiertes Maß*, falls für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen gilt: $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Maße $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft (σ-Additivität) heißen *komplexe Maße*.

Die Menge der signierten bzw. komplexen Maße wird mit $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ bezeichnet.

Falls X topologischer Raum, setze $\mathcal{M}(X) := \mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$, wobei $\mathcal{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra auf X bezeichnet.

Zu $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ definiert man die *Variation* (das *Variationsmaß*) $|\mu|$ durch

$$|\mu|(A) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{E\in\mathcal{Z}} |\mu(E)|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von A in endlich viele, paarweise disjunkte Mengen $E \in \mathcal{A}$ gebildet wird.

Die *Totalvariation* von μ ist $||\mu|| := |\mu|(X)$.

Bemerkung

(1) Wir fordern nicht mehr die Positivität von Maßen wir in [AIV].
(2) $|\mu|$ ist ein endliches, nicht negatives Maß auf $\mathcal{A}$.
(3) $||\cdot||$ definiert eine Norm auf $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$.
(4) $(\mathcal{M}(X, \mathcal{A}), ||\cdot||)$ ist ein Banachraum.

Anmerkung

Sei λ das Lebesgue-Maß und f messbar. Dann ist $\mu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ ein signiertes Maß.

Satz 111 (Darstellungssatz von Riesz)

Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist die Abbildung

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) & \to & (\mathfrak{C}(X))' \\ \mu & \mapsto & T\mu \end{array} \quad \text{mit} \quad T\mu(f) := \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen.

Beweis

$\to$ Rudin: *Real and Complex Analysis*.

Lemma 112

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer. Sei $\mathfrak{C}(X) \subseteq U \subseteq \mathfrak{B}(X)$, wobei $\mathfrak{B}(X)$ die Menge der beschränkten, messbaren Funktionen $X \to \mathbb{C}$ bezeichnet.

Sei U abgeschlossen bzgl. punktweiser, gleichmäßig beschränkter Konvergenz (K), d.h. für alle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise gilt stets $f \in U$.
Dann ist $U = \mathfrak{B}(X)$.

Beweis

Setze $V := \bigcap\{S \supseteq \mathfrak{C}(X) \mid S \text{ erfüllt (K)}\}$. Wir zeigen $V = \mathfrak{B}(X)$ (dann auch $U = \mathfrak{B}(X)$).

Offensictlich gilt $\mathfrak{C}(X) \subseteq V$. Wir zeigen zunächst: V ist ein Vektorraum. Sei $f \in \mathfrak{C}(X)$. Für die Menge $V_f := \{h \in \mathfrak{B}(X) \mid f + h \in V\}$ gilt $\mathfrak{C}(X) \subseteq V_f$ und V_f erfüllt (K). Also $V_f \supseteq V$. Für jedes $g \in V$ und $f \in \mathfrak{C}(X)$ ist also $f + g \in V$. Also gilt $V_g \supseteq \mathfrak{C}(X)$ und V_g erfüllt (K), d.h. $V_g \supseteq V$. Für alle $f, g \in V$ ist somit $f+g \in V$. Ebenso zeigt man, dass V abgeschlossen unter Skalarmultiplikation ist. Also ist V ein Vektorraum.

Wir zeigen nun: $V = \mathfrak{B}(X)$. Da die (messbaren) Treppenfunktionen dicht in $\mathfrak{B}(X)$ liegen, genügt es zu zeigen, dass jede Treppenfunktion in V liegt. Da V ein Vektorraum ist, genügt es zu zeigen, dass jede messbare charakteristische Funktion χ in V liegt. Dazu approximieren wir die charakteristischen Funktionen durch bzgl. (K) stetige Funktionen.

Sei $\mathcal{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra auf X und $\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{B}(X) \mid \chi_A \in V\}$. Zu zeigen: $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$.

Sei A offen, dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{C}(X))^{\mathbb{N}}$ mit $0 \leq f_n \leq 1$ und $f_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi_A(t)$ $(t \in X)$. Also sind alle offenen Mengen in $\mathcal{F}$. Weiter gilt:

(1) $A, B \in \mathcal{F},\ A \subseteq B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{F}$, denn $\chi_{B\backslash A} = \chi_B - \chi_A \in V$.

(2) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann ist $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$, denn es gelten $\chi_A = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$ und $V \ni \sum_{n=1}^N \chi_{A_n} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$ punktweise und durch 1 beschränkt. Also $\chi_A \in V$, d.h. $A \in \mathcal{F}$.

Damit ist $\mathcal{F}$ ein Dynkin-System. Da die offenen Mengen schnittstabil sind, ist das von ihnen erzeugte Dynkin-System gleich der erzeugten σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$. Da $\mathcal{F}$ Dynkin-System, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$. Also liegt jede Treppenfunktion in V.

Satz 113 (Messbarer Funktionalkalkül)

Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\Phi : \mathfrak{B}(\sigma(T)) \to L(H)$ mit

(1) $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T,\ \Phi(\mathbb{1}) = 1$,

(2) Φ ist ein stetiger Homomorphismus von C^*-Algebren und

(3) Zu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(\sigma(T)),\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty < \infty,\ f_n(t) \to f(t)\ (t \in \sigma(T))$ gilt $\langle \Phi(f_n), y\rangle \to \langle \Phi(f)x, y\rangle$ $(x, y \in H)$.

Beweis

(1) Eindeutigkeit:

Durch (1) und (2) wird Φ auf $\mathfrak{C}(\sigma(T))$ festgelegt (vgl. Satz 108). Nach (3) ist $\Phi(f)$ eindeutig bestimmt für alle $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$, welche punktweise, gleichmäßig beschränkte Grenzwerte stetiger Funktionen sind. Nach Lemma 112 sind dies alle $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$.

(2) Existenz:

Zu $x, y \in H$ definiere $l_x^y : \mathfrak{C}(\sigma(T)) \to \mathbb{C}$ durch $f \mapsto \langle \Phi(f)x, y\rangle$ (mit $\Phi(f) := f(T)$). Dann ist $l_x^y \in \mathfrak{C}((\sigma(T)))'$: Linearität klar; zur Stetigkeit betrachte (mit Satz 109)

$$|l_x^y(f)| = |\langle f(T)x, y\rangle| \leq ||f(T)||_{L(H)}||x||||y|| = ||f||_\infty ||x||||y|| < \infty.$$

Nach Riesz existiert ein komplexes Maß $\mu_x^y \in \mathcal{M}(\sigma(T))$ mit $\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_x^y$, daher (109)

$$||\mu_x^y|| = ||l_x^y||_{(\mathfrak{C}(\sigma(T)))'} \leq ||x||||y||.$$

$\langle f(T)x, y\rangle$ ist für jedes $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$ definiert. Für beliebiges $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$ ist die Abbildung $(x, y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_x^y$ sesquilinear und

$$\left| \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_x^y \right| \leq ||f||_\infty ||\mu_x^y|| \leq ||f||_\infty ||x||||y||.$$

Nach Lemma 110 existiert $\Phi(f) \in L(H)$ mit

$$\int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_x^y = \langle \Phi(f)x, y\rangle \text{ und } ||\Phi(f)||_{L(H)} \leq ||f||_\infty.$$

Damit ist $\Phi(f) \in L(H)$ für $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$ stets definiert. Zu zeigen sind (1)-(3).

(1) ist klar, da $\Phi(f) = f(T)$, falls f stetig. Φ ist stetig, da linear und $||\Phi(f)|| \leq ||f||_\infty$.

(3) Nach majorisierter Konvergenz gilt

$$\langle \Phi(f_n)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f_n \, \mathrm{d}\mu_x^y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}\mu_x^y = \langle \Phi(f)x, y\rangle.$$

Beachte dabei: Die Konvergenzsätze gelten analog, zum Beispiel existiert eine Zerlegung $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$ für $\mu \in \mathcal{M}(\sigma(T))$ mit μ_j positives, endliches Maß $(j = 1, 2, 3, 4)$.

(2) Sei $g \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$. Setze $U := \{f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))) \mid \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)\}$. Mit Satz 109: $\mathfrak{C}(\sigma(T)) \subseteq U$.

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty < \infty$ und $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ punktweise.

$$\langle \Phi(fg)x, y\rangle \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n g)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n)\Phi(g)x, y\rangle \overset{(3)}{=} \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle.$$

Also $f \in U$ und nach Lemma 112 folgt $U = \mathfrak{B}(\sigma(T))$.

Analog erhalten wir dann für $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$ die Gleichheit $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, also gilt die Multiplikativität für alle $f, g \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$. Linearität klar, $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$ analog.

Notation

Schreibe wieder $f(T)$ für $\Phi(f)$ $(f \in \mathfrak{B}(\sigma(T)))$.

Lemma 114

Seien $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $B(\sigma(T)) \to L(H)$, $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{B}(\sigma(T)))^{\mathbb{N}}$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty < \infty$ und $f_n \to f$ punktweise.

Dann filt $f_n(T)x \to f(T)x$ in der starken Operatortopologie.

Beweis

In einem Hilbertraum konvergiert $z_n \to z$ in der Normtopologie genau dann, wenn $z_n \to z$ in der schwachen Topologie und $||z_n|| \to ||z||$:

$$||z_n - z||^2 = ||z_n||^2 + ||z||^2 - 2\Re\langle z_n, z\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach (3) konvergiert $f_n(T)x \to f(T)x$ schwach.

$$||f_n(T)x||^2 = \langle f_n(T)x, f_n(T)x\rangle\rangle\langle f_n(T)^* f_n(T)x, x\rangle = \langle (\overline{f}_n f_n)(T)x, x\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle (\overline{f} f)(T)x, x\rangle = ||f(T)||^2.$$

Somit $f_n(T)x \to f(T)x$.

5.8 Orthogonale Projektoren

Definition

Seien H ein Hilbertraum, $M \subseteq H$ ein algebraischer Unterraum. Dann heißt die Abbildung $P : H \to H$, $x \mapsto x_1$ mit $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in M,\ x_2 \in M^\perp$ die *orthogonale Projektion* auf M.

Lemma 115

(1) Sei P eine orthogonale Projektion. Dann ist P stetig mit $||P|| = 1$, falls $P \neq 0$. Weiter gilt $\text{Kern}(T) = M^\perp$, $\text{Bild}(T) = M$.

(2) Sei $P \in L(H)$, dann ist P genau dann eine orthogonale Projektion, falls $P^2 = P = P^*$.

Beweis

(1) $||Px||^2 = ||x_1||^2 \leq ||x_1^2|| + ||x_2||^2$ nach Pythagoras ($\langle x_1, x_2\rangle = 0$), also $P \in L(H)$ und $||P|| \leq 1$.

Sei $x \in M$, dann $Px = x$, also $||P|| = 1$ (falls $M \neq \{0\}$).

$x \in \text{Kern}(P) \Leftrightarrow x_1 = 0$, d.h. $x = x_2 \in M^\perp$ und $x \in \text{Bild}(P) \Rightarrow x = x_1 \in M$.

(2) $\Rightarrow$: Sei P eine orthogonale Projektion. Dann $P^2x = Px_1 = x_1 = Px$, d.h. $P^2 = P$.

Seien $x, y \in H$ mit $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ Zerlegungen in $M, M^\perp$, dann

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, Py\rangle,$$

d.h. $P = P^*$.

$\Leftarrow$: Sei $P = P^2 = P^*$. Setze $M := \text{Bild}(P)$. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\text{Bild}(P))^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x,\ x_n = Py_n$ ist $Px_n = P^2y_n = Py_n = x_n$, also

$$||x_n - Px|| = ||Px_n - Px|| \leq ||P||||x_n - x|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mit $x_n \to x$ folgt $Px = x$, d.h. $\text{Bild}(P)$ ist abgeschlossen.

Sei $\tilde{P}$ die orthogonale Projektion auf $M := \text{Bild}(P)$. Für $x \in H,\ y \in M$ gilt

$$\langle \tilde{P}x, y\rangle = \langle x, \tilde{P}y\rangle = \langle x, y\rangle \overset{y\,\in\,\text{Bild}(P)}{=} \langle x, Py\rangle = \langle Px, y\rangle.$$

Setze $y := \tilde{P}x - Px \in M$, dann

$$0 = \langle(\tilde{P} - P)x, y\rangle = \langle(\tilde{P} - P)x, (\tilde{P} - P)x\rangle = ||(\tilde{P} - P)x||^2 \ (x \in H).$$

Also $P = \tilde{P}$, d.h. P orthogonale Projektion.

Lemma 116

Seien H ein Hilbertraum und P_1, P_2 orthogonale Projektionen auf die abgeschlossenen Unterräume M_1, M_2.

(1) P_1P_2 ist orthogonale Projektion $\Leftrightarrow P_1P_2 = P_2P_1$. In diesem Fall ist P_1P_2 Projektion auf $M_1 \cap M_2$.

(2) Es sind äquivalent:

(1) $M_1 \subseteq M_2$.
(2) $||P_1x|| \leq ||P_2x||$ $(x \in H)$.
(3) $P_1 \leq P_2$, d.h. $\forall x \in H : \langle P_1x, x\rangle \leq \langle P_2x, x\rangle$.
(4) $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.

Beweis

(1) Sei $P_1P_2 = P_2P_1$. Dann $(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$ und $(P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1 = P_1P_2$, d.h. P_1P_2 ist orthogonale Projektion.

Seien $P_1 P_2$ orthogonale Projektion und $x, y \in H$, dann

$$\langle x, P_2 P_1 y\rangle = \langle x, P_2^* P_1^* y\rangle = \langle P_1 P_2 x, y\rangle \overset{P_1 P_2 \text{ selbstadj.}}{=} \langle x, P_1 P_2 y\rangle.$$

also $P_2 P_1 = P_1 P_2$.

Sei nun $P_1 P_2$ eine orthogonale Projektion. Dann gelten $\text{Bild}(P_1 P_2) \subseteq \text{Bild}(P_1) = M_1$ und $\text{Bild}(P_1 P_2) = \text{Bild}(P_2 P_1) \subseteq \text{Bild}(P_2) = M_2$, d.h. $\text{Bild}(P_1 P_2) \subseteq M_1 \cap M_2$. Umgekehrt gilt für $x \in M_1 \cap M_2$, dass $x = P_1 x = P_2 x$, d.h. $x = P_1 P_2 x \in \text{Bild}(P_1 P_2)$, d.h. $\text{Bild}(P_1 P_2) = M_1 \cap M_2$.

(2) (1)$\Rightarrow$(2): Gelte $M_1 \subseteq M_2$. Sei $x \in H$, dann $P_2(P_1 x) = P_1 x$, da $P_1 x \in M_1 \subseteq M_2$, und

$$P_1(P_2 x) = P_1(P_2(x_{M_1} + x_{M_1^\perp})) = P_1(P_2 x_{M_1}) + P_1(P_2(x_{M_1^\perp})) = P_1(x_{M_1}) = x_{M_1} = P_1 x.$$

(2)$\Rightarrow$(3): Gelte $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1$. Sei $x \in H$ beliebig, dann

$$||P_1 x||^2 = \langle P_1 x, P_1 x\rangle = \langle P_1 P_1 x, x\rangle = \langle P_1 x, x\rangle = \langle P_2 P_1 x, x\rangle = \langle P_1 x, P_2 x\rangle \leq ||P_1 x|| ||P_2 x||.$$

Gelte Œ $P_1 x \neq 0$, dann liefert Division durch $||P_1 x||$ die Behauptung.

(3)$\Rightarrow$(4): Gelte $\forall x \in H : ||P_1 x|| \leq ||P_2 x||$, dann erfüllt jedes $x \in H$

$$\langle P_1 x, P_1 x\rangle \leq \langle P_2 x, P_2 x\rangle \Rightarrow \langle P_1 P_1 x, x\rangle \leq \langle P_2 P_2 x\rangle \Rightarrow \langle P_1 x, x\rangle \leq \langle P_2 x, x\rangle,$$

also $P_1 \leq P_2$.

(4)$\Rightarrow$(1): Gelte $P_1 \leq P_2$. Angenommen, es gäbe $x \in M_1 \backslash M_2$, dann $x = x_{M_2} + x_{M_2^\perp}$ mit $x_{M_2^\perp} \neq 0$ und $P_1 x = x$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \langle P_1 x, x\rangle \leq \langle P_2 x, x\rangle = \langle x_{M_2}, x\rangle = \langle x - x_{M_2^\perp}, x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x_{M_2^\perp}, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle x_{M_2^\perp}, x_{M_2} + x_{M_2^\perp}\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x_{M_2^\perp}, x_{M_2}\rangle - \langle x_{M_2^\perp}, x_{M_2^\perp}\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle x_{M_2^\perp}, x_{M_2^\perp}\rangle < \langle x, x\rangle,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Lemma 117

Seien $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L(H))^{\mathbb{N}}$ eine Folge orthogonaler Projektoren mit $P_n \leq P_m$ für alle $n \leq m$.

Dann konvergiert P_n in der starken Operatortopologie gegen eine orthogonale Projektion P.

Beweis

Für $x \in H$ ist $(||P_n x||)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monoton wachsend und (durch $||x||$) beschränkt, also konvergent. Für $m \leq n$ ist

$$\begin{aligned}
||P_n x - P_m x||^2 &= ||P_n x||^2 - \langle P_n x, P_m x\rangle - \langle P_m x, P_n x\rangle + ||P_m x||^2 \\
&= ||P_n x||^2 - 2||P_m x||^2 + ||P_m x||^2 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

wegen $\langle P_n x, P_m x\rangle = \langle P_m P_n x, x\rangle = \langle P_m x, x\rangle = \langle P_m x, P_m x\rangle = ||P_m x||^2 = ... = \langle P_m x, P_n x\rangle$.

Somit existiert $Px := \lim\limits_{n\to\infty} P_n x$ $(x \in H)$. Es ist $P \in L(H)$.

$$\begin{aligned}
\langle Px, y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle P_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, P_n y\rangle = \langle x, Py\rangle \ (x, y \in H); \\
\langle P^2 x, y\rangle &= \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_n x, P_n y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_n x, y\rangle = \langle Px, y\rangle,
\end{aligned}$$

also $P^2 = P = P^*$ und $P_n \to P$ in der starken Topologie.

5.9 Projektorwertige Maße

Definition

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum (d.h. $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra über X).

$E : \mathcal{A} \to L(H)$ heißt *projektorwertiges Maß*, falls gelten:

(1) $E(A)$ ist orthogonale Projektion $A \in \mathcal{A}$.
(2) Zu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist $(E(\bigcup_{n=1}^{\infty})A_n)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)x$ $(x \in H)$.
(3) $E(X) = \mathrm{id}_H$.

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt E-*Nullmenge*, falls $E(A) = 0 \in L(H)$.

Falls X topologischer Raum und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$,so heißt E kompakter Träger, falls eine kompakte Menge $K \in \mathcal{A}$ existiert mit $E(K) = \mathrm{id}_H$.

Bemerkung

(1) $E(\emptyset) = 0$.

(2) $E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B)$ $(A, B \in \mathcal{A})$.

(3) $E(A \backslash B) = E(B) - E(A)$ $(A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B)$.

(4) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow E(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} E(A_n)$ in der starken Topologie).

(5) Analog $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \supseteq A_{n+1} \Rightarrow E(\bigcap_{n=1}^{\infty})A_n = \lim_{n\to\infty} E(A_n)$ in der starken Topologie.

(6) Sei $x \in H$. Dann ist $E_x : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, $A \mapsto \langle E(A)x, x\rangle = ||E(A)x||^2$ ein endliches Maß mit $||E_x|| = E_x(X) = ||x||^2$.

(7) Seien $x, y \in H$. Dann ist $E_x^y : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $A \mapsto \langle E(A)x, y\rangle$ ein komplexes Maß mit $||E_x^y|| \leq ||x|| ||y||$.

Definition

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, E ein projektorwertiges Maß. Sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, d.h. es gibt eine Darstellung $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{A_i}$ mit $f_i \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt.

Dann heißt

$$\int f \ \mathrm{d}E := \sum_{i=1}^{n} f_i E(A_i) \in L(H)$$

das Integral von f bzgl. E.

Bemerkung

Es ist nachzurechnen, dass das Integral wohldefiniert ist.

Lemma 118

Seien E ein projektorwertiges Maß und f, g Stufenfunktionen. Dann gelten:

(1) Die Abbildung $f \mapsto \int f \ \mathrm{d}E$ ist linear.

(2) Für $x \in H$ gilt $||(\int f \ \mathrm{d}E)x||^2 = \int |f|^2 \ \mathrm{d}E_x \leq ||f||^2 ||x||^2$.

(3) $(\int f \ \mathrm{d}E)(\int g \ \mathrm{d}E) = \int fg \ \mathrm{d}E$.

(4) $(\int f \ \mathrm{d}E)^* = \int \overline{f} \ \mathrm{d}E$.

Beweis

(1) Klar nach Definition des Integrals und Lemma 118 (4).

(2) $||(\int f \ \mathrm{d}E)x||^2 = ||\sum_{i=1}^{n} f_i E(A_i)x||^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 ||E(A_i)x||^2 = \int |f|^2 \ \mathrm{d}E_x \leq ||f||_{\infty}^2 \ \mathrm{d}E_x = ||f||_{\infty}^2 ||x||^2$.

(3) $(\int f\mathrm{d}E)(\int g\mathrm{d}E) = (\sum_{i=1}^{n} f_i E(A_i))(\sum_{j=1}^{m} g_j E(B_j)) = \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i)E(B_j) = \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i \cap B_j) = \int fg\mathrm{d}E$.

(4) $(\sum_{i=1}^{n} f_i E(A_i))^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i E(A_i)$.

Definition

Sei E ein projektorwertiges Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Für $f \in \mathfrak{B}(X)$ wähle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{B}(X))^{\mathbb{N}}$, f_n Stufenfunktion mit $||f_n - f||_\infty \to 0$.

Definiere
$$\int f \ \mathrm{d}E := \int f(\lambda) \ \mathrm{d}E(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}E \in L(H).$$
Für $A \in \mathcal{A}$ setze
$$\int_A f \ \mathrm{d}E := \int \chi_A f \ \mathrm{d}E.$$

Bemerkung

(1) $\int f \ \mathrm{d}E$ ist wohldefiniert nach Lemma 118 (2) (Konvergenz von $\int f_n \ \mathrm{d}E$ in der Normtopologie von $L(H)$).

(2) Die Eigenschaften aus Lemmas 118 übertragen sich in der üblichen Weise auf $f, g \in \mathfrak{B}(X)$.

(3) Falls $K \in \mathcal{A}$ mit $E(K) = \mathrm{id}_H$, so ist $\int f \ \mathrm{d}E = \int_K f \ \mathrm{d}E$ $(f \in \mathfrak{B}(X))$, da $E(X\backslash K) = 0$.

Satz 119

Seien E ein projektorwertiges Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt mit $E(K) = \mathrm{id}_H$.

(1) Durch $T := \int \lambda \ \mathrm{d}E(\lambda)$ wird ein selbstadjungierter Operator $T \in L(H)$ definiert.

(2) $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$.

(3) Die Abbildung $\Psi : \mathfrak{B}(\sigma(T)) \to L(H)$ mit $f \mapsto \int_{\sigma(T)} f \ \mathrm{d}E$ ist der (eindeutig bestimmte) messbare Funktionalkalkül zu T.

Beweis

(1) Klar.

(2) Wähle Intervall $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $K \subseteq (a, b]$, d.h. $E((a, b]) = \mathrm{id}_H$.

(a) Zeige zunächst: Zu $\mu \in \rho(T) \cap \mathbb{R}$ existiert offene Umgebung U_μ mit $E(U_\mu) = 0$.

Approximiere dazu $\mathrm{id}_{(a,b]}$ durch eine Stufenfunktion $f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{(a_{k-1},a_k]}$, mit äquidistanter Zerlegung $\{a_k \mid k = 0, ..., N\}$, d.h. $a_k = a+k\delta$, $\delta := \frac{b-a}{N}$. Dann $||T - \int f \ \mathrm{d}E|| \le ||\mathrm{id}_{(a,b]} - f||_\infty \le \delta$.

Wegen
$$\int f \ \mathrm{d}E = \sum_{k=1}^N a_k E((a_{k-1}, a_k]) \text{ und } \sum_{k=1}^N E((a_{k-1}, a_k]) = \mathrm{id}_H$$
folgt
$$\left\| (\mu - T) - \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k]) \right\| \le \delta.$$
Für δ hinreichend klein ist $S := \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k])$ invertierbar und
$$||S^{-1}|| \le 1 + ||(\mu - T)^{-1}|| \text{ (hier ein bisschen überlegen ...)}.$$
Andererseits ist auch
$$S^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mu - a_k} E((a_{k-1}, a_k]),$$
d.h. für die Norm von S^{-1} gilt
$$||S^{-1}|| = \max\left\{ \frac{1}{|\mu - a_k|} \,\middle|\, E((a_{k-1}, a_k]) \neq 0 \right\}$$

und damit

$$\max \left\{ \frac{1}{|\mu - a_k|} \;\middle|\; E((a_{k-1}, a_k]) \neq 0 \right\} \leq 1 + ||(\mu - T)^{-1}||.$$

Also gilt auch

$$|\mu - a_k| < \frac{1}{1 + ||(\mu - T)^{-1}||}$$

und damit $E((a_{k-1}, a_k]) = 0$. Somit ist $E(U_\mu) = 0$ für eine offene Umgebung von μ.

(b) Falls $A \subseteq \rho(T)$ kompakt, ist $A \subseteq \bigcup_{\mu \in A} U_\mu$ offene Überdeckung, d.h. es gibt eine endliche Teilüberdeckung $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\mu_i}$.

Damit gilt $E(A) \leq \sum_{i=1}^n E(U_{\mu_i}) = 0$.

(c) Schreibe $\rho(T)$ als abzählbare Vereinigung aufsteigender kompakter Mengen, d.h. $\rho(T) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ mit $A_n \subseteq A_{n+1},\ A_n$ kompakt.

Dann $E(\rho(T))x = \lim_{n\to\infty} E(A_n)x = 0$ $(x \in H)$, d.h. $E(\rho(T)) = 0$ und damit $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$.

(3) Rechne die Eigenschaften aus Satz 113 nach:

(a) $\Psi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = \int_{\sigma(T)} \lambda E(\lambda) = T$ nach Definition.

(b) $\Psi(\mathbb{1}_{\sigma(T)}) = \int_{\sigma(T)} 1 \,\mathrm{d}E = E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$ nach (2).

(c) Ψ ist stetiger Homomorphismus von C^*-Algebren nach Lemma 118.

(d) Für die letzte Eigenschaft verwende

$$\left\langle \left(\int f \,\mathrm{d}E \right) x, y \right\rangle = \int f \,\mathrm{d}E_x^y \qquad (E_x^y(A) = \langle E(A)x, y\rangle)$$

(klar für Stufenfunktionen und durch Approximation für $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$).

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt die Behauptung. Damit ist $\Psi(f) = f(T)$ der messbare Funktionalkalkül.

Lemma 120 (Transformation)

Seien $S \in L(H)$ selbstadjungiert, $f \in \mathfrak{B}(\sigma(S), \mathbb{R})$ und $f \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann gilt $(f \circ g)(S) = f(g(S))$.

Beweis

Beachte: $f \circ g \in \mathfrak{B}(\sigma(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ und (da g reellwertig) $g(S) \in L(H)$ selbstadjungiert.

Seien E das projektorwertige Maß zu $g(S)$ und F das projektorwertige Maß zu S. Es genügt, die Behauptung für charakteristische Funktionen $f = \chi_A$ $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ zu zeigen; die Verallgemeinerung auf Stufenfunktionen mittels Linearität und auf $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mittels Approximation folgt wir üblich.

Zu zeigen: $(\chi_A \circ g)(S) = \chi_A(g(S))$. Wegen $\chi_A \circ g = \chi_{g^{-1}(A)}$ und $\chi_A(g(S)) = E(A)$ ist damit zu zeigen: $F(g^{-1}(A)) = E(A)$ $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Betrachte wieder die zugehörigen Maße $\mu_x^y := \langle E(\cdot)x, y\rangle$ und $\tilde{\nu}_x^y := \langle F(g^{-1}(\cdot))x, y\rangle$ $(x, y \in H)$. Das Maß $\tilde{\nu}_x^y$ ist das Bildmaß von $\nu_x^y := \langle F(\cdot)x, y\rangle$, d.h. $\tilde{\nu}_x^y = \nu_x^y \circ g^{-1}$. Nach dem Transformationssatz aus (AIV) gilt dann

$$\begin{aligned}
\int \lambda^n \,\mathrm{d}\tilde{\nu}_x^y(\lambda) &= \int \lambda^n \,\mathrm{d}(\nu_x^y \circ g^{-1})(\lambda) \\
&= \int (g(\lambda))^n \,\mathrm{d}\nu_x^y(\lambda) \\
&\overset{F \text{ PV-Maß zu } S}{=} \langle (g(S))^n x, y\rangle \\
&\overset{E \text{ PV-Maß zu } g(S)}{=} \int \lambda^n \,\mathrm{d}\mu_x^y(\lambda)
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Weierstraß und dem Satz von Riesz folgt $\tilde{\nu}_x^y = \mu_x^y$, d.h. für alle $A \in \mathcal{B}(\sigma(S))$ und alle $x, y \in H$ gilt $\langle E(A)x, y\rangle = \langle F(g^{-1}(A))x, y\rangle$ und damit $E(A) = F(g^{-1}(A))$.

5.10 Der Spektralsatz für beschränkte, selbstadjungierte Operatoren

Satz 121 (Spektralsatz für beschränkte, selbstadjungierte Operatoren)

Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert.

Dann existiert genau ein projektorwertiges Maß E mit $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$ und $T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$.

Die Abbildung $\mathfrak{B}(\sigma(T)) \to L(H),\ f \mapsto f(T) := \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, \mathrm{d}E(\lambda)$ definiert den messbaren Funktionalkalkül zu T.

Für $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T)),\ x, y \in H$ gilt $\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, \mathrm{d}E_x^y(\lambda)$ $(E_x^y(A) := \langle E(A)x, y\rangle)$.

Beweis

(1) Definition des projektorwertigen Maßes E: Sei $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül zu T. Für $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ definiere $E(A) := \chi_A(T)$.

(a) $E(A)$ ist eine orthogonale Projektion: Klar wegen $E(A) = \chi_A^2(T) = \chi_A(T) = E(A)$ und $(E(A))^* = \overline{\chi_A}(T) = \chi_A(T)$.

(b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{N}}(\sigma(T))$ Folge paarweise disjunkter Mengen. Die Funktionen $f_n := \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}$ konvergieren punktweise gegen $f := \chi_A,\ A := \bigcup_{k=1}^\infty A_n$ und sind durch 1 beschränkt. Nach Lemma 114 folgt

$$\sum_{k=1}^\infty E(A_k)x = \sum_{k=1}^\infty \chi_{A_k}(T)x = \lim_{n\to\infty} f_n(T)x = f(T)x = \chi_A(T)x = E(A)x \ (x, \in H).$$

(c) $E(\sigma(T)) = \mathbb{1}_{\sigma(T)} = \mathrm{id}_H$ nach dem messbaren Funktionalkalkül.

Also ist E ein projektorwertiges Maß.

Definiere $S := \int_{\sigma(T)} \lambda\, \mathrm{d}E(\lambda)$ nach Satz 119. Sei $f := \Psi(f) := \int_{\sigma(T)} f(\lambda))\, \mathrm{d}E(\lambda)$ der zugehörige messbare Funktionalkalkül zu S. Zu zeigen ist also $S = T$. Wähle dazu eine Stufenfunktion f auf $\sigma(T)$ mit $||f - \mathrm{id}_{\sigma(T)}|| \leq \epsilon$. Dann

$$||T - S|| \leq ||T - f(T)|| + ||f(T) - \Psi(f)|| + ||\Psi(f) - S||.$$

Nach dem messbaren Funktionalkalkül ist $||T - f(T)||_{L(H)} \leq ||\mathrm{id}_{\sigma(T)} - f||_\infty \leq \epsilon$ und nach Lemma 118 (2) ist $||S - \Psi(f)|| = ||\int_{\sigma(T)}(\lambda - f(\lambda))\, \mathrm{d}E(\lambda)||_{L(H)} \leq ||\mathrm{id}_{\sigma(T)} - f||_\infty \leq \epsilon$. Da f Stufenfunktion, ist schließlich $f(T) - \Psi(f) = \sum_{j=1}^n f_j\chi_{A_j}(T) - \sum_{i=1}^n f_j E(A_i) = 0$. Damit $||S - T|| \leq 2\epsilon$, d.h. $S = T$.

Lemma 122

Seien $T \in L(H)$ selbstadjungiert, E das zugehörige projektorwertige Maß und $S \in L(H)$.

Dann sind äquivalent:

(1) S vertauscht mit T.
(2) S vertauscht mit allen Projektionen $E(A)$ $(A \in \mathcal{B}(\sigma(T)))$.
(3) S vertauscht mit allen Operatoren $f(T)$ $(f \in \mathfrak{B}(\sigma(T)))$.

Beweis

E ist durch die Menge aller komplexwertigen Maße E_x^y bestimmt. Für $n \in \mathbb{N},\ x, y \in H$ gilt dann

$$\begin{aligned}
ST = TS \quad &\Leftrightarrow \quad ST^n = T^nS \\
&\overset{\text{Spektralsatz}}{\Leftrightarrow} \quad \langle ST^nx, y\rangle = \langle T^nSx, y\rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{\sigma(T)} \lambda^n \, \mathrm{d}\langle SE(\lambda)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda^n \langle E(\lambda)Sx, y\rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \text{die Maße } A \mapsto \langle SE(A)x, y\rangle \text{ und } A \mapsto \langle E(A)Sx, y\rangle \text{ stimmen als Funktionale} \\
&\qquad \text{auf allen Polynomen überein} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{die beiden Maße stimmen als Funktionale auf allen } f \in \mathfrak{C}(\sigma(T)) \text{ überein} \\
&\qquad \text{(Weierstraß), d.h. als Elemente in } \mathfrak{C}'(\sigma(T))
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ Die Maße sind gleich (Darstellungssatz von Riesz),
d.h. $\langle SE(A)x, y\rangle = \langle E(A)Sx, y\rangle$ $(A \in \sigma(T))$

$\Leftrightarrow$ $SE(A) = E(A)S$ $(A \in \mathcal{B}(\sigma(T)))$

Wir haben bereits gesehen, dass aus $ST = TS$ folgt $Sf(T) = f(T)S$ für alle stetigen $f \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$. Wie üblich folgt durch Approximation, dass S mit allen $f(T)$, $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$, vertauscht. Beachte: $\langle ST^n x, y\rangle = \langle SE(A)x, y\rangle$.

Beispiele

(1) Sei $t \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\mu_1, ..., \mu_n$. Sei $E(\mu_j)$ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\text{Kern}(T-\mu_j)$. Dann gilt $T = \sum_{j=1}^n \mu_j E(\{\mu_j\})$, also $T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$.

Dabei E, gegeben durch $E(A) = \sum_{j=1}^n E(A \cap \{\mu_j\}) = \sum_{\mu_j\in A}^j E(\{\mu_j\})$ $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das projektorwertige Maß zu A.

(2) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und *kompakt*, d.h. $T(\{x \in H \mid ||x|| \leq 1\})$ ist *präkompakt*, d.h. $\overline{T(\{x \in H \mid ||x|| \leq 1\})}$ ist kompakt. Dann ist $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$ und $\sigma(T)$ ist abzählbar.

Seien $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Dann gilt $\mu_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und das zugehörige Maß E erfüllt $E(A) = \sum_{\mu_j\in A}^j E(\{\mu_j\})$ $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Beispiel (Multiplikationsoperator)

Seien $H \in \mathcal{L}^2([0,1])$ und $T \in L(H)$ gegeben durch $T(x)(t) := tx(t)$ $(x \in \mathcal{L}^2([0,1]))$. Dann ist T selbstadjungiert und $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$. Für $x, y \in \mathcal{L}^2([0,1])$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 tx(t)\overline{y(t)} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \lambda \, \mathrm{d}E_x^y(\lambda)$$

mit $E_x^y(\lambda) = x(\lambda)\overline{y(\lambda)} \, \mathrm{d}\lambda$ (komplexes Maß mit Dichte $x(\lambda)\overline{y(\lambda)}$ bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $[0,1]$). Damit

$$E_x^y(A) = \int_0^1 \chi_A(\lambda)x(\lambda)\overline{y(\lambda)} \, \mathrm{d}\lambda = \langle \chi_A x, y\rangle = \langle E(A)x, y\rangle,$$

also $E(A) \in \mathcal{L}^2([0,1])$ gegeben durch $E(A) = \chi_A x$ (Multiplikationsoperator mit χ_A, $A \in \mathcal{B}([0,1])$).

Satz 123 (Spektrum und Spektralmaß)

Seien $T \in L(H)$ selbstadjungiert und E das zugehörige projektorwertige Maß.

(1) Für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda_0 \in \rho(T)$, falls eine offene Umgebung U von λ_0 existiert mit $E(U) = 0$.

(2) Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow E(\lambda_0) \neq 0$. Für alle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ist $E(\{\lambda_0\})$ die orthogonale Projektion auf $\text{Kern}(T - \lambda_0)$.

(3) Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow E(\{\lambda_0\}) = 0$ und $E((\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)) \neq 0$ für alle $\epsilon > 0$.

Beweis

(1) Wir wissen bereits: $E(\rho(T) \cap \mathbb{R}) = 0$.

Sei andererseits $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von λ_0 mit $E(U) = 0$. Definiere $g(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)$ und $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\chi_{\sigma(T)\backslash U}$. Dann sind $f, g \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$ und es gilt

$$f(T)(T - \lambda_0) = f(T)g(T) = (fg)(T) = \chi_{\sigma(T)\backslash U}(T) = E(\sigma(T)\backslash U) = E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$$

und analog $(T - \lambda_0)f(T) = f(T)(T - \lambda_0) = \mathrm{id}_H$. Also ist $T - \lambda_0$ bijektiv und damit $\lambda_0 \in \rho(T)$.

(2) Zu zeigen ist die zweite Aussage. Sei $x \in \text{Bild}(E(\{\lambda_0\}))$, d.h. $x = E(\{\lambda_0\})x$. Dann

$$\langle (T - \lambda_0)x, y\rangle = \langle (T - \lambda_0)E(\{\lambda_0\})x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} (\lambda - \lambda_0)\chi_{\{\lambda_0\}} \, \mathrm{d}E_x^y(\lambda) = 0 \ (y \in H),$$

d.h. $x \in \text{Kern}(T - \lambda_0)$.

Sei nun $x \in \operatorname{Kern}(T - \lambda_0)$, d.h. $Tx = \lambda_0 x$. Dann folgt $f(T)x = f(\lambda_0)x$ nach Satz 109 für alle $f \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$ und nach Lemma 114 für alle $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$.

Setze $f := \chi_{\{\lambda_0\}}$, dann $E(\{\lambda_0\})x = \chi_{\{\lambda_0\}}(T)x = \chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda_0)x = x$, d.h. $x \in \operatorname{Bild}(E(\{\lambda_0\}))$.

(3) Was übrig bleibt (beachte: $\sigma_r(T) = \emptyset$).

Lemma 124

(1) Seien $A, B \in L(H),\ A, B \geq 0$ (insbes. selbstadjungiert) und $AB = BA$. Dann ist auch $AB \geq 0$.

(2) Sei $A \in L(H),\ A \geq 0$. Dann gibt es genau ein $B \in L(H)$ mit $B^2 = A$. B heißt die *Wurzel* von A. Insbesondere existiert zu jedem $A \in L(H)$ der Absolutbetrag $|A| := \sqrt{A^*A}$.

Beweis

(1) $AB = A\sqrt{B^2} = A\sqrt{B}\sqrt{B} = \sqrt{B}A\sqrt{B} \geq 0$ wegen $\langle \sqrt{B}A\sqrt{B}x, x\rangle = \langle A\sqrt{B}x, \sqrt{B}x\rangle \geq 0$ $(x \in H)$. Beachte dabei: $A\sqrt{B} = \sqrt{B}A$ nach Lemma 122.

(2) Setze $B := \sqrt{A}$, dann $B \geq 0$ und $B^2 = A$ nach dem Spektralsatz.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\tilde{B} \geq 0,\ \tilde{B}^2 = A$. Wähle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > M := \sup\{\langle x, Ax\rangle \mid ||x|| = 1\}$ und $b > ||\tilde{B}||^2$. Zur Funktion $g(t) := \sqrt{t}$ existieren nach Weierstraß Polynome $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $||g - p_n||_\infty \to 0$ im Intervall $[0, b]$. Damit folgt $||p_n(A) - g(A)|| = ||p_n(A) - B|| \to 0$. Setze $\tilde{p}_n(t) := p_n(t^2)$ und $\tilde{g}(t) := g(t^2) = t$, dann $||\tilde{p}_n - \tilde{g}||_\infty \to 0$ im Intervall $[0, \sqrt{b}] \supseteq [0, ||\tilde{B}||]$. Nach dem Funktionalkalkül zu $\tilde{B}$ gilt $||\tilde{p}_n(\tilde{B}) - \tilde{g}(\tilde{B})|| = ||\tilde{p}_n(\tilde{B}) - \tilde{B}|| \to 0$, aber $\tilde{p}_n(\tilde{B}) = p_n(A)$. Daher ist $\tilde{B} = g(A) = \sqrt{A} = B$.

Bemerkung

Aus dem Spektralsatz folgen viele Aussagen über Spektrum bzw. Norm:

(1) $T = T^* \in L(H),\ \lambda_0 \in \rho(T) \Rightarrow ||(T - \lambda_0)^{-1}|| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))}$.

(2) $T = T^* \in L(H),\ f \in \mathfrak{C}(\sigma(T)) \Rightarrow ||f(T)|| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(f(T))\} = ||f||_\infty$ (Spektralradius von $f(T)$). Zum Beispiel folgt aus $T = \int_K \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda),\ K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt bereits $||T|| \leq \max\{|\lambda| \mid \lambda \in K\}$.

Anmerkung

Der Spektralsatz wird oft mit „Spektralscharen“ formuliert. Dabei heißt eine Familie $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine *Spektralschar*, falls $F_\lambda \in L(H)$ mit

(1) F_λ ist eine orthogonale Projektion $(\lambda \in \mathbb{R})$.
(2) $F_\mu F_\lambda = F_\lambda F_\mu = F_\mu$ für $\mu \leq \lambda$ $(\Leftrightarrow F_\mu \leq F_\lambda)$.
(3) $F_\mu x \to F_\lambda x$ für $\mu \searrow \lambda$ $(x \in H)$ (Rechtsstetigkeit).
(4) $F_\lambda x \to 0$ für $\lambda \to -\infty$ und $D_\lambda x \to x$ für $\lambda \to \infty$ $(x \in H)$.

Sei $T = T^* \in L(H)$ mit zugehörigem projektorwertige Maß E. Dann definiert $F_\lambda := E((-\infty, \lambda])$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ eine Spektralschar.

E ist auch durch F eindeutig bestimmt. Definiert man das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}F_\lambda$$

entsprechend, so gilt

$$T = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda) = \int \lambda \, \mathrm{d}F_\lambda.$$

Man kann dazu als Verallgemeinerung des Riemann-Integrals

$$\int f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \approx \sum_j f(\lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})$$

das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int f(\lambda) \, \mathrm{d}g(\lambda) \approx \sum_j f(\lambda_j)(g(\lambda_j) - g(\lambda_{j-1}))$$

verwenden.

5.11 Der Spektralsatz für unitäre Operatoren

Lemma 125

Seien H ein Hilbertraum und $U \in L(H)$. Dann sind äquivalent:

(1) U ist unitär (d.h. $UU^* = U^*U = \mathrm{id}_H$).
(2) U ist surjektiv und $\forall x, y \in H : \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.
(3) U ist surjektiv und isometrisch (d.h. $\forall x \in D(U) : ||Ux|| = ||x||$).

Beweis

(1)⇒(2) Sei U unitär. Wegen $UU^* = \mathrm{id}_H$ ist U surjektiv und $\forall x, y \in H : \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

(2)⇒(3) Trivial.

(3)⇒(2): Mit der Isometrie folgt die Gleichheit der Skalarprodukte aus der Polarisierungsformel.

(2)⇒(1): Falls $\forall x, y \in H : \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, dann $U^*U = \mathrm{id}_H$ und damit $U^* = U^{-1}$, da U bijektiv.

Bemerkung

Falls $T = T^* \in L(H)$, so ist e^{iT} unitär (Funktionalkalkül). So erhält man auch alle unitären Operatoren:

Satz 126

Sei $U \in L(H)$ unitär. Dann ex. ein selbstadjungierter Operator $T \in L(H)$ mit $||T|| \le \pi$ und $U = e^{it}$.

Beweis

Setze $V := \Re(U) = \frac{1}{2}(U + U^*)$ und $W := \Im(U) = \frac{1}{2i}(U - U^*)$. Dann sind V, W selbstadjungiert, $VW = WV$, $V^2 + W^2 = \mathrm{id}_H$, $||V|| \le 1$, $||W|| \le 1$ und $U = V + iW$.

Wir suchen einen Operator T mit $V + iW = U = e^{iT} = \cos(T) + i\sin(T)$, also T mit $V = \cos(T)$ und $W = \sin(T)$.

Versuch: $T := \arccos(V)$.

Problem: es gilt nicht immer $\sin(T) = W$. Wir modifizieren also: Setze $\tilde{W} := \sin(\arccos(T))$, dann gilt $V^2 + \tilde{W}^2 = 1$, $\tilde{W}$ ist selbstadjungiert und $\tilde{W}W = W\tilde{W}$. Damit $W^2 = \tilde{W}^2$.

Man rechnet direkt nach, dass dann $W = (2P-1)\tilde{W}$, wobei $P := \chi_{\{0\}}(W - \tilde{W})$ die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Kern}(W - \tilde{W})$ ist. Beachte dabei: $H = \mathrm{Bild}(W - \tilde{W}) \oplus \mathrm{Bild}(W + \tilde{W})$ und $(2P - 1)^2 = 1$.

Setze jetzt $T := (2P - 1)\arccos(V)$, dann gilt $\cos(T) = V$ nach Potenzreihendarstellung: Die Reihe enthält nur quadratische Terme und $(2P - 1)^2 = 1$ und $(2P - 1)\arccos(V) = \arccos(V)(2P - 1)$ nach dem Funktionalkalkül.

Damit gilt auch $\sin(T) = W$, denn die Potenzreihendarstellung des Sinus enthält nur ungerade Terme, d.h. $\sin(T) = \sin((2P - 1)\arccos(V)) = (2P - 1)\sin(\arccos(V)) = (2P - 1)\tilde{W} = W$.

Also ist $e^{iT} = U$ und wegen $||\arccos||_\infty = \pi$ folgt $||T|| \le \pi$ nach dem Spektralsatz.

Satz 127 (Spektralsatz für unitäre Operatoren)

Sei $U \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein projektorwertiges Maß E auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ derart, dass $E([-\pi, \pi]) = \mathrm{id}_H$ und $U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\, \mathrm{d}E(\lambda)$.

Für jedes Polynom p gilt $p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\lambda})\, \mathrm{d}\lambda$.

Durch $f(U) := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})\, \mathrm{d}E(\lambda)$ wird zu jedem $f \in \mathfrak{B}([-\pi, \pi])$ ein Operator $f(U) \in L(H)$ definiert.

Beweis

Seien $U = e^{iT}$ nach Satz 126 und E das projektorwertige Maß zu T.

Beachte $\sigma(T) \subseteq [-||T||, ||T||] \subseteq [-\pi, \pi]$. Für die Aussage über $p(U)$ verwende den Transformationssatz.

5.12 Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

Wiederholung

Sei T ein linearer Operator in H mit $\overline{D(T)} = H$. Dann heißt T ...

... *symmetrisch*, wenn $T \subseteq T^*$, d.h. $D(T) \subseteq D(T^*)$ und $T^*_{|D(T)} = T$.

... *selbstadjungiert*, wenn $T = T^*$, insbes. $D(T) = D(T^*)$.

... *wesentlich selbstadjungiert*, wenn der Abschluss $\overline{T}$ existiert und selbstadjungiert ist.

Bemerkung

(1) Es gilt $T \subseteq T^* \Leftrightarrow G(T) \subseteq G(T^*) \Leftrightarrow \forall x, y \in D(T) : \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

(2) Falls T symmetrisch ist, folgt $\forall x \in D(T) : \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Im $\mathbb{C}$-Hilbertraum gilt auch die Umkehrung.

(3) Falls T symmetrisch ist, ist T abschließbar und $\overline{T} \subseteq T^*$, da T^* stets abgeschlossen.

Definition

Sei T ein linearer Operator im Hilbertraum H. Dann heißt

$$\mathrm{reg}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists C_\lambda > 0 : \forall x \in D(T) : ||(T - \lambda)x|| \geq C_\lambda ||x||\}$$

die *Menge der regulären Punkte* von T.

Bemerkung

Falls T symmetrisch ist, gilt $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subseteq \mathrm{reg}(T)$, denn für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist

$$||(T-\lambda)x||||x|| \geq |\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \geq |\Im\langle (T-\lambda)x, x\rangle| = |\Im(\lambda)|||x||^2, \text{ da } \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

Definition

Sei T ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H. Dann heißen $n_+(T) := \dim \mathrm{Bild}(T - i)^\perp$ und $n_-(T) := \dim \mathrm{Bild}(T + i)^\perp$ die *Defektindizes* von T.

Bemerkung

Ein symmetrischer Operator besitzt genau dann eine selbstadjungierte Fortsetzung, falls $n_+(T) = n_-(T)$. Weiter gilt $n_+(T) = \dim \mathrm{Bild}(T - \lambda)^\perp$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Im(\lambda) > 0$.

Definition

Sei T ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H. Dann heißt $U_T : \mathrm{Bild}(T + i) \to H$, gegeben durch $U_T := (T - i)(T + i)^{-1}$ die *Cayley-Transformierte* von T.

Bemerkung

Wegen $i \in \mathrm{reg}(T)$ ist $T + i$ injektiv und damit auf $\mathrm{Bild}(T + i)$ invertierbar.

Lemma 128

Sei T ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H. Dann gelten:

(1) T ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathrm{Bild}(T + i)$ und $\mathrm{Bild}(T - i)$ abgeschlossen sind.

(2) U_T ist isometrisch mit $1 \notin \sigma_p(U_T)$.

(3) U_T ist genau dann unitär, wenn T selbstadjungiert ist.

Beweis

(2) Zu zeigen: $||U_t y|| = ||y||$ für alle $y \in D(U_T) = \text{Bild}(T+i)$ bzw. $||(T-i)x|| = ||(T+i)x||$ für alle $x \in D(T)$. Dies folgt durch Quadrieren und Ausmultiplizieren aus $\forall x \in D(T) : \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Angenommen, $1 \in \sigma_p(U_T)$, dann gibt es $x \in D(T)$ mit $T-i)x = (T+i)x$, d.h. $x = 0$, ein Widerspruch.

(1) Sei zunächst T abgeschlossen. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\text{Bild}(T+i))^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \to y \in H$. Wegen $||U_t y_n|| = ||y_n||$ ist auch $(U_T y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, etwa $U_T y_n \to \tilde{y} \in H$. Schreibe $y_n = (T+i)x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, dann ist $U_T y_n = (T-i)x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Damit erhalten wir $x_n = \frac{1}{2i}(y_n - U_T y_n)$ und $Tx_n = \frac{1}{2}(y_n + U_T)$. Also $x_n \to x := \frac{1}{2i}(y - \tilde{y})$ und $Tx_n \to w := \frac{1}{2}(y + \tilde{y})$; da T abgeschlossen ist, folgt $x \in D(T)$ und $w \in \text{Bild}(T)$ mit $Tx = w$. Damit $y = Tx + ix \in \text{Bild}(T+i)$, d.h. $\text{Bild}(T+i)$ ist abgeschlossen. Da U_T eine Isometrie und damit offen ist, ist auch $\text{Bild}(U_T) = R(T-i)$ abgeschlossen.

Falls $\text{Bild}(T \pm i)$ abgeschlossen ist, folgt mit analoger Rechnung, dass auch T abgeschlossen ist.

(3) Sei zunächst T selbstadjungiert. Dann ist $\text{Bild}(T \pm i)^\perp = \text{Kern}(T^* \mp i) = \text{Kern}(T \mp i) = \{0\}$ und $\text{Bild}(T \pm i)$ nach (1) abgeschlossen, d.h. $\text{Bild}(T \pm i) = H$. Somit ist $D(U_T) = \text{Bild}(U_T) = H$ und damit U_T unitär nach Lemma 125.

Sei umgekehrt U_T unitär. Dann sind $\text{Bild}(T+i) = D(U_T) = H$ und $\text{Bild}(T-i) = \text{Bild}(U_T) = H$ nach Lemma 125. Sei $v \in D(T^*)$. Dann ist $\langle Tx, v\rangle = \langle x, T^*v\rangle$ $(x \in D(T))$. Verwende $x = \frac{1}{2i}(y - U_T y)$ und $Tx = \frac{1}{2}(y + U_T y)$ mit $y := (T+i)x$ und setze ein, dann $\langle \frac{1}{2}(y + U_T y), v\rangle = \langle \frac{1}{2i}(y - U_T y), T^*v\rangle$ $(y \in D(T) = H)$ und damit $\langle y, -iv - iU_T^* v\rangle = \langle y, T^*v - U_T^* T^* v\rangle$ $(y \in H)$. Daraus folgt dann $-iv - iU_T^* v = T^*v - U_T^* T^* v \Rightarrow T^*v - iv = U_T(T^*v + iv)$, da $U_T U_T^* = \text{id}_H$. Setze $z := T^*v + iv$, dann $T^*v - iv = U_T z$. Auflösen nach v ergibt $v = \frac{1}{2i}(z - U_T z) = \frac{1}{2i}(\text{id} - U_T)z \in \text{Bild}(\text{id} - U_T) = D(T)$ und außerdem $T^*v = \frac{1}{2}(z + U_T z) = Tv$. Insgesamt erhalten wir $v \in D(T^*) \Rightarrow v \in D(T)$ und $T^*v = Tv$, d.h. $T^* \subseteq T$. Andererseits ist T symmetrisch, d.h. $T \subseteq T^*$ und damit $T = T^*$, d.h. T ist selbstadjungiert.

Bemerkung

(1) Wir sehen also, dass $D(T) = \text{Bild}(\text{id} - U_T)$ und $Tx = i(\text{id} + U_T)(\text{id} - U_T)^{-1}$ $(x \in D(T))$. Beachte dabei: $\text{id} - U_T$ ist bijektiv. Somit ist T durch U_T eindeutig festgelegt.

(2) Es gibt keine einfache „Struktur“ (Norm etc.) auf der Menge der unbeschränkten Operatoren.

Satz 129 (Spektralsatz für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren, skalare Version)

Sei T ein selbstadjungierter, unbeschränkter Operator im $\mathbb{C}$-Hilbertraum H. Dann existiert ein projektorwertiges Maß $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$ mit $\langle Tx, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, \mathrm{d}\langle E(\lambda)x, x\rangle$ $(x \in D(T))$.

Beweis

Sei U_T die Cayley-Transformierte von T. Nach Lemma 128 ist U_T unitär und

$$T = i(\text{id} + U_T)(\text{id} - T_T)^{-1}.$$

Sei $\tilde{E} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$ das zu U_T gehörige projektorwertige Maß, d.h.

$$-U_T = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda} \, \mathrm{d}\tilde{E}(\lambda).$$

Es gilt $\tilde{E}(\{\pm\pi\}) = 0$, andernfalls wäre nach Satz 123 $\pm\pi$ ein Eigenwert des Operators

$$B := \int_{[-\pi,\pi]} \lambda \, \mathrm{d}\tilde{E}(\lambda)$$

$(B = B^*,\ B \in L(H))$, d.h. es gäbe ein $x \neq 0$ mit $Bx = \pm\pi x$. Nach Satz 109 wäre dann $f(B)x = f(\pm\pi)x$ für alle $f \in \mathfrak{C}([-\pi,\pi])$. Setze $f(t) := e^{it}$, damit

$$-1 = e^{\pm i\pi} \in \sigma_p(e^{iB}) = \sigma_p\left(\int e^{i\lambda} \, \mathrm{d}\overline{E}(\lambda)\right) = \sigma_p(-U_T)$$

im Widerspruch zu Lemma 128. Also ist

$$-U_T = \int_{(-\pi,\pi)} e^{i\lambda} \, \mathrm{d}\tilde{E}(\lambda).$$

Seien $x \in D(T) = \operatorname{Bild}(\mathrm{id} - U_T)$ und $y := (\mathrm{id} - U_T)^{-1}x$, dann ist $Tx = i(\mathrm{id} + U_T)y$ nach der Bemerkung und damit

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle &= \langle i(\mathrm{id} - U_T)y, (\mathrm{id} - U_T)y\rangle = i(\langle U_T y, y\rangle - \langle y, U_T y\rangle) \\ &= i\langle (U_T - U_T^*)y, y\rangle = i\int_{(-\pi,\pi)} (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})\ \mathrm{d}\langle \tilde{E}(\lambda)y, y\rangle.\end{aligned}$$

Betrachte die Transformation $\varphi : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ \mu \mapsto \tan(\frac{\mu}{2})$ und definiere das Bildmaß $E := \tilde{E} \circ \varphi^{-1}$. Dann gilt mit $x = (\mathrm{id} - U_T)y$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \lambda\ \mathrm{d}\langle E(\lambda)x, x\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda\ \mathrm{d}\langle \tilde{E} \circ \varphi^{-1}(\lambda)x, x\rangle \\ &= \int_{(-\pi,\pi)} \varphi(\lambda)\ \mathrm{d}\langle \tilde{E}(\lambda)x, x\rangle \\ &= \int_{(-\pi,\pi)} \varphi(\lambda)\ \mathrm{d}\langle \tilde{E}(\lambda)(\mathrm{id} - U_T^*)(\mathrm{id} - U_T)y, y\rangle \\ &\overset{\tilde{E}(\cdot)(\mathrm{id} - U_T^*) = (\mathrm{id} - U_T^*)\tilde{E}(\cdot)}{=} \left\langle \left(\int_{-\pi,\pi} \varphi(\lambda)\ \mathrm{d}\tilde{E}(\lambda)\right)(\mathrm{id} - U_T^*)(\mathrm{id} - U_T)y, y\right\rangle \\ &\overset{U_T = -e^{iB}}{=} \langle \varphi(B)(\mathrm{id} - U_T^*)(\mathrm{id} - U_T)y, y\rangle \\ &= \langle \varphi(B)(1 + e^{-iB})(1 + e^{iB})y, y\rangle \\ &= \int_{(-\pi,\pi)} \underbrace{\tan\frac{\lambda}{2}(1 + e^{-i\lambda})(1 + e^{i\lambda})}_{=-i(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})}\ \mathrm{d}\langle \tilde{E}(\lambda)y, y\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle\end{aligned}$$

Satz 130 (Spektralsatz, allgemeine Version mit projektorwertigen Maßen)

Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T : D(T) \to H$ ein normaler Operator (d.h. $TT^* = T^*T$).

Dann existiert genau ein projektorwertiges Maß $E : \mathcal{B}(\sigma(T)) \to L(H)$ mit $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\ \mathrm{d}E(\lambda)$.

Für jede messbare Funktion $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ wird durch $f(T) := \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\ \mathrm{d}E(\lambda)$ mit Definitionsbereich $D(f(T)) := \{x \in H \mid \int_{\sigma(T)} |f(\lambda)|^2\ \mathrm{d}\langle E(\lambda)x, x\rangle < \infty\} = \{x \in H \mid f \in \mathcal{L}^2(Ex)\}$ ein normaler Operator $f(T)$ definiert.

Durch $f \mapsto f(T)$ wird ein Funktionalkalkül definiert, der in den bisher betrachteten Fällen $(T = T^* \in L(H),\ f \in \mathcal{B}(\sigma(T)))$ mit dem messbaren Funktionalkalkül übereinstimmt.

5.13 Anwendungen in der Quantenmechanik

Zum Abschluss

Dieser Abschnitt ist der letzte, der sich mit dem Spektralsatz im weiteren Sinne beschäftigt. Mit den bisher behandelten Begriffen und Methoden haben wir schon alles zur Verfügung, um die Quantentheorie zu formulieren. Die Operatortheorie ist das wichtigste Hilfsmittel, um quantenmechanische Aussagen zu beweisen. Hier findet auch das Spektrum eines Operators eine Interpretation. In diesem Abschnitt sollen vor allem Begriffe geklärt werden.

Definition

Ein *quantenmechisches System* ist beschrieben durch:

(1) ... den *Zustandsraum* H, ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Die Menge $H_1 := \{\psi \in H \mid ||\psi|| = 1\}$ heißt die *Menge der reinen Zustände*.

(2) ... eine *Observable*, ein *selbstadjungierter* Operator in H oder äquivalent ein projektorwert. Maß E. Beispiele sind der Ort X, der Impult P, der Drehimpuls J, die Energie H und der Spin σ.

(3) Sei S eine Observable mit projektorwertigen Maß E. Falls das System im *Zustand* $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ist, so heißt $\langle\psi, S\psi\rangle$ der *Erwartungswert* von S im Zustand ψ.

Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $E_\psi(A) = \langle\psi, E(A)\psi\rangle = ||E(A)\psi||^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung von S der gemessene Wert in A liegt.

Bemerkung

Wegen $||E_\psi|| = E_\psi(\mathbb{R}) = ||\psi||^2 = 1$, d.h. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : E_\psi(A) \in [0, 1]$, ist E_ψ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Nach dem Spektralsatz gilt

$$\langle\psi, S\psi\rangle = \left\langle \psi, \left(\int_{\sigma(S)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)\right)\psi \right\rangle = \int_{\sigma(S)} \lambda \, \mathrm{d}\langle\psi, E(\lambda)\psi\rangle = \int_{\sigma(S)} \lambda \, \mathrm{d}E_\psi(\lambda).$$

Dies stimmt mit der Definition des Erwartungswertes in der Stochastik überein.

Beispiel (eindimensionale Ortsobservable)

Hier ist $H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Die Ortsobservable X ist definiert durch $(X\psi)(x) := x\psi(x)$ (Multiplikationsoperator mit $\mathrm{id}_\mathbb{R}$). Der natürliche Definitionsbereich ist $D(X) = \{\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{id}_\mathbb{R} \cdot \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\}$.

X ist selbstadjungiert und $\sigma(X) = \sigma_c(X) = \mathbb{R}$. Das zugehörige projektorwertige Maß ist gegeben durch $(E(A)\psi)(x) = \chi_A(X)\psi(X)(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \psi \in H)$. Somit ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens im Zustand ψ in der Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gerade $\langle\psi, E(A)\psi\rangle = \int_\mathbb{R} \psi(X)\overline{\chi_A(x)\psi(x)} = \int_A |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x$.

Es gilt $\int_\mathbb{R} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$. Somit ist $|\psi(\cdot)|^2$ die Aufenthaltsdichte des Teilchens im Zustand ψ.

Dies ist die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion im Ortsraum nach Schrödinger.

Beispiel (Impulsobservable)

Wieder ist $H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Betrachte $U : \mathbb{R} \to L(H)$, gegeben durch $(U(a)\psi)(x) := \psi(x-a)$. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $U(a)$ unitär und $(U(a))_{a\in\mathbb{R}}$ ist eine stark stetige, unitäre Gruppe. Nach dem Satz von Stone existiert ein selbstadjungierter Operator P mit $U(a) = e^{-ia\frac{P}{\hbar}}$. Dabei sind das *Plancksche Wirkungsquantum* $\hbar$ und das Vorzeichen (aus mathematischer Sicht) nur Konvention.

Es gilt $P\psi = \frac{\hbar}{i}\psi'$ $(\psi \in D(P))$, wobei $D(P) = \{\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \mid \psi' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\} =: H^1(\mathbb{R})$ Beachte dabei: ψ' wird über die „Distributionstheorie" in „Sobolew-Räumen erster Ordnung" definiert.

Lemma 131 (Kanonische Vertauschungsrelation nach Heisenberg)

Für Orts- und Impulsobservable gilt $XP - PX \subseteq \hbar\mathrm{id}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$.

Beweis

Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) := \{\psi \in \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}(\psi) \text{ ist kompakt}\}$ gilt:

$$((XP - PX)\psi)(x) = x\frac{\hbar}{i}\psi'(x) - \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\psi(x)) = -\frac{\hbar}{i}\psi(x) = \hbar i\psi(x)$$

Setzt man $A := \frac{1}{\hbar i}(XP - PX)$, dann ist $A_{|\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ und A symmetrisch, d.h. $A \subseteq A^*$, und weiter $\mathrm{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = A_{|\mathcal{D}(\mathbb{R})} \subseteq A \subseteq A^*$, also $A \subseteq \overline{A} = A^{**} \subseteq (\mathrm{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})})^* = (\overline{\mathrm{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}})^* = \mathrm{id}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$.

Lemma 132 (Kanonische Vertauschungsrelation nach Weyl)
Wir setzen der Einfachheit halber $\hbar = 1$. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $e^{iaP}e^{ibX} = e^{iba}e^{ibX}e^{iaP}$.

Beweis

Der Operator $e^{ibX} \in L(H)$ ist der Multiplikationsoperator mit der Funktion $t \mapsto e^{ibt}$.
Weiter ist $(e^{iaP}\psi)(x) = \psi(x + a)$, also

$$\begin{aligned} (e^{iaP}e^{ibX}\psi)(x) &= (e^{ibX}\psi)(x+a) = e^{ib(x+a)}\psi(x+a) \quad \text{und} \\ (e^{ibX}e^{iaP}\psi)(x) &= e^{ibx}\psi(x+a). \end{aligned}$$

Definition
Seien S eine Observable und $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ein reiner Zustand. Schreibe $\langle S\rangle_\psi := \langle \psi, S\psi\rangle$.
Für $\psi \in D(S^2) \subseteq D(S)$ ist die *Varianz* von S im Zustand ψ definiert durch

$$\operatorname{var}_\psi(S) := \langle \psi, (S - \langle S\rangle_\psi)^2\psi\rangle = \int_{\sigma(S)} (\lambda - \langle S\rangle_\psi)^2 \,\mathrm{d}E_\psi(\lambda).$$

$(\Delta S)_\psi := \sqrt{\operatorname{var}_\psi(S)}$ heißt die *Standardabweichung* bzw. *Unschärfe* von S im Zustand ψ.

Satz 133 (Heisenbergsche Unschärferelation)
Seien A, B zwei Observablen in H und $\psi \in D(A^2) \cap D(BA) \cap D(AB) \cap D(B^2)$.
Dann gilt $(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2}\langle C\rangle_\psi$, wobei $C := \frac{1}{i}(AB - BA)$.
Speziell gilt für Ort und Impuls $(\Delta X)_\psi(\Delta P)_\psi \geq \frac{\hbar}{2}$ $(\psi \in H_1 \cap D(X^2) \cap D(P^2))$.

Beweis

Seien $a := \langle A\rangle_\psi,\ b := \langle B\rangle_\psi,\ A_0 := A - a$ und $B_0 := B - b$. Dann gilt $A_0B_0 - B_0A_0 = AB - BA = iC$.
Zugleich ist $||A_0\psi|| = \sqrt{\langle \psi, A_0^2\psi\rangle} \overset{\langle A_0\rangle_\psi = 0}{=} \langle \Delta A_0\rangle_\psi$ und analog $||B_0\psi|| = \langle \Delta B_0\rangle_\psi$. Damit

$$2i\Im\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle = \langle A_0\psi, B_0\psi\rangle - \langle B_0\psi, A_0\psi\rangle = \langle \psi, (A_0B_0 - B_0A_0)\psi\rangle = -i\langle \psi, C\psi\rangle.$$

Also $(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi = ||A_0\psi||||B_0\psi|| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} |\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle| \geq |\Im\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle| \geq \frac{1}{2}|\langle \psi, C\psi\rangle| \geq \frac{1}{2}\langle C\rangle_\psi$.
Der Spezialfall $A = X,\ B = P$ folgt aus der kanonischen Vertauschungsrelation nach Heisenberg.

A Übungsaufgaben

A.1 Aufgaben zu Topologien, Metriken und Normen

Aufgabe 1

Seien X eine nicht leerer Menge und $\delta : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für $x, y \in X$.

Zeigen Sie, dass δ eine Metrik definiert, und beschreiben Sie die von δ induzierte Topologie.

Aufgabe 2

Seien p eine Primzahl und $\delta : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$\delta_p(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ p^{-k} & \text{falls } x \neq y, \text{ wobei } k \in \mathbb{N}_0 \text{ maximal mit } p^k \mid (x-y) \end{cases}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie, dass δ_p eine Metrik definiert, und beschreiben Sie die von δ_p induzierte Topologie.

Aufgabe 3

Seien M eine nicht leere Menge, X die Menge aller M-wertigen Folgen und $\delta : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ \frac{1}{n} & \text{falls } x \neq y, \text{ wobei } n \in \mathbb{N} \text{ minimal mit } x_n \neq y_n \end{cases}$$

für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

Zeigen Sie, dass δ eine Metrik definiert, und beschreiben Sie die von δ induzierte Topologie.

Aufgabe 4

Sei (X, δ) ein semimetrischer Raum. Für $x, y \in X$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow \delta(x,y) = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

(b) $\overline{\delta}(\overline{x}, \overline{y}) := \delta(x,y)$ für $x \in \overline{x} \in X/_\sim,\ y \in \overline{y} \in X/_\sim$ definiert eine Metrik auf $X/_\sim$.

Aufgabe 5

Seien $X \neq \emptyset$ und δ_1, δ_2 zwei Metriken auf X. Dann definieren wir

$$\delta_1 \ll \delta_2 :\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : \delta_2(x,y) < \delta \Rightarrow \delta_1(x,y) < \epsilon.$$

Wir nennen δ_1, δ_2 *gleichmäßig äquivalent*, falls $\delta_1 \ll \delta_2$ und $\delta_2 \ll \delta_1$.

Zeigen Sie:

(a) $\delta_1 \ll \delta_2 \Rightarrow \mathbb{O}(\delta_1) \subseteq \mathbb{O}(\delta_2)$.
Gleichmäßig äquivalente Metriken erzeugen also die gleiche Topologie.

(b) Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: Es gibt Metriken, die die gleiche Topologie erzeugen, aber nicht gleichmäßig äquivalent sind.

(c) Ist d_1 eine Metrik auf X, dann wird durch $d_2(x,y) := \min\{1, d_1(x,y)\}$ für $x, y \in X$ eine zu d_1 gleichmäßig äquivalente Metrik auf X definiert.

Aufgabe 6

Sei X ein reeller Vektorraum, versehen mit einer Metrik $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$.

d heißt *translationsinvariant*, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X : d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

d heißt *homogen*, falls

$$\forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R} : d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y).$$

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine Norm auf X gibt, für welche d die zugehörige Metrik ist, wenn d translationsinvatiant und homogen ist.

(b) Überprüfen Sie, ob die Metriken aus den Aufgaben (1.1) und (1.3) einer Norm zugehörig sind (wobei X als reeller Vektorraum angenommen wird).

Aufgabe 7

Seien X ein reeller Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung mit $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R} : p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Zeigen Sie, dass p genau dann eine Norm auf X ist, wenn $M := \{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$ konvex ist.

Aufgabe 8

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Menge $\mathbb{O}_1 := \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.
(b) Die Menge $\mathbb{O}_2 := \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

Ist $\mathbb{O}_i$ eine Topologie ($i = 1, 2$), dann bestimmen Sie die abgeschlossenen Mengen von $(\mathbb{R}, \mathbb{O}_i)$ und den Abschluss, das Innere und den Rand der Mengen $[3, 7)$, $\{7, 24, 47, 85\}$ und $\{3, 6, 9, 12, ...\}$.

Aufgabe 9

(a) Zeigen Sie, dass $||x|| := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^n x_j\right|$ eine Norm auf ℓ_1 definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\bigcup\limits_{1 \leq p < \infty} \ell_p \subsetneq \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \to 0$.

Aufgabe 10

Seien X eine nicht leere Menge und zu jedem $x \in X$ gebe es eine Menge $\mathbb{U}_x \subseteq \wp(X)$ mit (U0)-(U3).

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{O}(\mathbb{U}) := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O : O \in \mathbb{U}_x\}$ eine Topologie auf X definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{U}(\mathbb{O}(\mathbb{U})) = \mathbb{U}$ für jede Familie $\mathbb{U}$ von Umgebungssystemen mit (U0)-(U4).

$\mathbb{O}(\mathbb{U})$ besitzt also nur Umgebungen, wie sie in $\mathbb{U}$ bereits vorgegeben sind.

Aufgabe 11

Seien X eine nicht leere Menge und $\mathfrak{F}(X)$ die Menge aller Abbildungen $f : X \to \mathbb{K}$.

Für $B \subseteq X$ nicht leer, $f \in \mathfrak{F}(X)$ und $\epsilon > 0$ setzen wir

$$U_f^B(\epsilon) := \left\{ g \in \mathfrak{F}(X) \;\middle|\; \sup_{x \in B} |f(x) - g(x)| < \epsilon \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $B \subseteq X$ nicht leer definiert $d_B : \mathfrak{F}^2(X) \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$d_B(f, g) := \min\left\{1, \sup_{x \in B} |f(x) - g(x)|\right\} \quad (f, g \in \mathfrak{F}(X))$$

eine Semimetrik auf $\mathfrak{F}(X)$.

Für alle $\epsilon \in (0, 1)$ und $f, g \in \mathfrak{F}(X)$ gilt $g \in U_f^B(\epsilon) \Leftrightarrow d_B(f, g) < \epsilon$.

(b) Ist $\mathbb{B} \subseteq \wp(X)$ mit $\bigcup_{B\in\mathbb{B}} B = X$, so wird durch

$$\mathbb{U}_f^{\mathbb{B}} := \left\{ \bigcap_{B\in\mathbb{B}_0} U_f^B(\epsilon) \;\middle|\; \mathbb{B} \supseteq \mathbb{B}_0 \text{ endlich}, \epsilon > 0 \right\}$$

eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(X)$ definiert.

Der von $\mathbb{U}_f^{\mathbb{B}}$ erzeugte Filter $\mathbb{V}_f^{\mathbb{B}} := [\mathbb{U}_f^{\mathbb{B}}]$ ist dann ein Umgebungssystem für f.

(c) Nach Aufgabe 8 besteht die zugehörige Topologie $\mathbb{O}(\mathbb{B}) := \mathbb{O}(\mathbb{V}^{\mathbb{B}})$ ausschließlich aus Umgebungen wie in $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$ vorgegeben.

Speziell für $\mathbb{B}_p := \{\{x\} \mid x \in X\}$ heißt $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$ die *Topologie der punktweisen Konvergenz*.

Zeigen Sie die Äquivalenz $f_n \to f$ in $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p) \Leftrightarrow \forall x \in X : f_n(x) \to f(x)$.

(d) Seien X überabzählbar und $A := \{\chi_{T^c} \mid X \supseteq T \text{ endlich}\}$. Dann ist 0 Häufungspunkt von A, aber es gibt keine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die in $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$ gegen 0 konvergiert.

Insbesondere ist $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$ nicht metrisierbar.

(e) Ist $\mathbb{B}$ abzählbar, etwa $\mathbb{B} = \{B_n \mid n \in I\}$, dann wird auf $\mathfrak{F}(X)$ durch

$$d_{\mathbb{B}}(f,g) := \sum_{n\in I} \frac{1}{2^n} d_{B_n}(f,g) \;\; (f,g \in \mathfrak{F}(X))$$

eine Metrik definiert, die die Topologie $\mathbb{O}(\mathbb{B})$ erzeugt.

Insbesondere ist $\mathbb{O}(\mathbb{B})$ metrisierbar.

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum $(X, \mathbb{O})$ äquivalent sind:

(i) X ist Hausdorffraum.

(ii) Jeder konvergente Filter auf X besitzt einen (eindeutigen) Grenzwert.

(iii) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt all seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich der Menge $\{x\}$.

Aufgabe 13

(1) Zeigen Sie, dass ein Filter mit abzählbarer Basis stets eine Basis $\mathbb{B} := \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt mit $m > n \Rightarrow B_m \subseteq B_n$.

(2) Seien $(X_1, \mathbb{O}_1)$ und $(X_2, \mathbb{O}_2)$ topologische Räume, $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung und $x \in X_1$ besitzte eine abzählbare Umgebungsbasis.

Zeigen Sie: f ist in x stetig $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_1^{\mathbb{N}} : (x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x))$.

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass sich auf jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum eine Norm definieren lässt.

Aufgabe 15

Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir für reelle $(n \times n)$-Matrizen $||A||_p := \sup_{||x||_p=1} \{||Ax||_p \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

(1) Bestimmen Sie $||A||_1$ und $||A||_\infty$.

(2) Zeigen Sie, dass $||A||_2^2$ gerade das das Maximum aller Eigenwerte von A^TA ist.

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass ℓ_2 überabzählbar viele linear unabhängige Elemente besitzt.

A.2 Aufgaben zu linearen Operatoren

Aufgabe 17

Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$. Zu jedem Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ definieren wir

$$||p|| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

(1) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ ein normierter Raum ist. Ist $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ ein Banachraum?

(2) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ stetig sind, und ermitteln sie deren Norm.

$$T(p) = \int_0^1 p(t)\ \mathrm{d}t; \qquad T(p) = p'(0); \qquad T(p) = p'(1).$$

(3) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ stetig sind, und ermitteln sie deren Norm.

$$T(p)(t) = \int_0^t p(s)\ \mathrm{d}s; \qquad T(p) = p'; \qquad T(p)(t) = p(t+1).$$

Aufgabe 18

Seien E_0 ein Unterraum eines normierten Vektorraumes E und F ein weiterer normierter Raum.

Zeigen Sie:

(1) Für $T \in L(E,F)$ gilt $||T_{|E_0}|| \leq ||T||$.

(2) Liegt E_0 dicht in E, so gilt für $T \in L(E,F)$: $||T_{|E_0}|| = ||T||$.

Aufgabe 19

Seien $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung

$$T: \begin{array}{ccc} \ell_q & \to & (\ell_p)' \\ x & \mapsto & (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \end{array} \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q,\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$$

ist ein isomerischer Isomorphismus.

(2) Die selbe Abbildungsvorschrift vermittelt einen isometrischen Isomorphismus zwischen ℓ_1 und $(c_0)'$, dem Dualraum des Nullfolgenraumes.

Aufgabe 20

Weisen Sie die Existenz einer linearen Abbildung $\mathrm{Lim} : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (Banach-Limes) mit den folgenden Eigenschaften nach:

(1) $\mathrm{Lim}(Lx) = \mathrm{Lim}(x)$ für alle $x \in \ell_\infty$, wobei L der *Linksshift-Operator* ist, d.h. $L : \ell_\infty \to \ell_\infty$ mit $L(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$.

(2) Für $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0$ ist auch $\mathrm{Lim}(x) \geq 0$.

(3) Für $e := (1,1,1,...)$ gilt $\mathrm{Lim}(e) = 1$.

Aufgabe 21

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, M ein Teilraum von E und $f \in M'$.

Weiter sei E' *strikt konvex*, d.h. $\forall F_1, F_2 \in E',\ ||F_1|| = 1 = ||F_2|| : ||F_1 + F_2|| = 2 \Rightarrow F_1 = F_2$.

Dann lässt sich jedes $f \in M'$ eindeutig zu einem $F \in E'$ mit $||f|| = ||F||$ fortsetzen.

Aufgabe 22

Sei $T : E \to F$ ein Isomorphismus normierter Vektorräume.

Zeigen Sie, dass E genau dann reflexiv ist, wenn F reflexiv ist.

A.3 Aufgaben zu Hilberträumen

Aufgabe 23

(1) Zeigen Sie, dass in einem Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die *Polarisierungsformeln*

$$
\begin{aligned}
4\langle x, y\rangle &= ||x+y||^2 - ||x-y||^2 \ (\mathbb{K}=\mathbb{R},\ x,y\in H) \\
4\langle x, y\rangle &= \sum_{i=0}^{3} i^n ||x+i^n y||^2 \ (\mathbb{K}=\mathbb{C},\ x,y\in H)
\end{aligned}
$$

gelten.

(2) Ist $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$, der die Parallelogrammgleichung erfüllt, so wird durch die Zweite Polarisierungsformel ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert, dessen indutierte Norm gerade $||\cdot||$ ist.

Aufgabe 24

Seien F eine nicht leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge des Hilbertraumes $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $x_0 \in H$.

Zeigen Sie die Äquivalenz

$$||x_0 - x|| = d(x_0, F) \Leftrightarrow \forall y \in F : \Re\langle x_0 - x, y - x\rangle \leq 0.$$

Aufgabe 25

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein separabler Hilbertraum, d.h. es gibt eine abzählbare Teilmenge $D = \{d_n \in H \mid n \in \mathbb{N}\}$, die dicht in H ist.

Zeigen Sie, dass alle Orthonormalbasen von H abzählbar sind.

A.4 Aufgaben zu den Hauptsätzen der Funktionalanalysis

Aufgabe 26

Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, die in allen rationalen Zahlen stetig und in allen irrationalen Zahlen unstetig ist.

Zeigen Sie, dass es umgekehrt Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, die in allen irrationalen Stellen stetig und in allen rationalen Stellen unstetig sind.

Aufgabe 27

Bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathfrak{C}([0,1])$ der Integralgleichung

$$x(s) = \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int_0^1 stx(t)\ \mathrm{d}t \qquad (s \in [0,1])$$

Aufgabe 28

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $x \in E$.

Zeigen Sie:

(1) Die *Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe*

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} ||x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i||$$

besitzt für gegebene $x_1, \ldots, x_n \in E$ immer eine Lösung $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$.

$y_x := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* x_i$ heißt dann die *Bestapproximation* des Punktes x in $F := \mathrm{span}(x_1, \ldots, x_n)$.

(2) Die Menge der Bestapproximationen ist konvex.

(3) Ist E strikt konvex, dann ist α^* eindeutig.

Aufgabe 29

Gegeben sei das Intervall $[0,1]$. Dieses werde an den Punkten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ geteilt und das offene Intervall $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ herausgenommen. Es entsteht die Menge $T_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$. Diese werde an den Punkten $\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9}$ und $\frac{8}{9}$ geteilt und die „mittleren Drittel" herausgenommen; es entsteht $T_2 := [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$.

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man eine absteigende Folge von Mengen $T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \ldots$, wobei T_m aus T_{m-1} durch Wegnahme der „mittleren Drittel" entsteht. Die Menge $T := \bigcap_{m=1}^{\infty} T_m$ heißt dann das *Cantorsche Diskontinuum*.

Wir versehen T mit der Spurtopologie von $[0,1]$. Außerdem setzen wir $X' := \{0,2\}$ und versehen X' mit der diskreten Topologie.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : T \to X := \prod_{i=1}^{\infty} X'$ mit $f(x) := (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus ist, wobei x_i die *triadischen Darstellung* x ist, d.h. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ mit $\forall i \in \mathbb{N} : x_i \in \{0,1,2\}$.

Aufgabe 30

Zeigen Sie, dass im Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit nicht auf die Vollständigkeit von $(E, ||\cdot||)$ verzichtet werden kann.

Aufgabe 31

Finden Sie eine lineare, Graphen-abgeschlossene Abbildung zwischen normierten Räumen, die nicht stetig ist.

Aufgabe 32

Seien E_1, E_2, E_3 Banachräume, $T : E_1 \to E_2$ linear, $S : E_2 \to E_3$ linear, injektiv und stetig und $ST : E_1 \to E_3$ stetig.

Zeigen Sie, dass dann auch T stetig ist.

Aufgabe 33

Seien E_1, E_2 normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, D ein Unterraum von E_1 und $T : D \to E_2$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie:

(1) Durch $||x||_T := ||x||_{E_1} + ||Tx||_{E_2}$ für $x \in D$ wird D ein normierter Raum D_T.

(2) Sind E_1, E_2 vollständig, T Graphen-abgeschlossen und D abgeschlossen, so ist D_T ein Banachraum und $T : D \to E_2$ stetig.

Aufgabe 34

(1) Sei $p \in (1,\infty)$. Zeigen Sie, dass für $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p^{\mathbb{N}}$ und $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (a) $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert schwach* gegen x, d.h. $\forall T \in (\ell_p)' : \lim\limits_{n\to\infty} Tx^{(n)} = Tx$.

  (b) $\forall k \in \mathbb{N} : x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x^{(n)}||_p < \infty$.

(2) Für $p = 1$ gilt die Äquivalenz nicht.

Aufgabe 35

Sei E ein reflexiver, normierter Raum.

Zeigen Sie, dass eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$ genau dann schwach-$*$-konvergent gegen $T \in E'$ ist, wenn sie schwach gegen T konvergiert.

Dabei heißt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach-$*$-konvergent* gegen T, wenn $\forall x \in E : \lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$.

Aufgabe 36

Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E heißt *schwache Cauchyfolge*, wenn für alle $x' \in E'$ die skalare Folge $(x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(1) Zeigen Sie, dass jede schwache Cauchy-Folge beschränkt ist.

(2) Zeigen Sie, dass in jedem reflexiven Banachraum jede schwache Cauchyfolge schwach konvergiert.

(3) Sei $E = c_0$. Zeigen Sie, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n} e^{(i)}$ eine schwache Cauchyfolge in E ist, die nicht schwach konvergiert.

A.5 Aufgaben zur Spektraltheorie

Aufgabe 37

Seien E ein Banachraum und T, S abgeschlossene, lineare Operatoren in E mit $D(T) = D(S)$ und $\overline{D(T)} = E$.

Zeigen Sie, dass für alle $\lambda, \mu \in \rho(T)$ und für alle $\eta \in \rho(T) \cap \rho(S)$ gilt:

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_\mu(S) &= (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T) \\ R_\eta(T) - R_\eta(S) &= R_\eta(T)(S - T) R_\eta(S) \end{aligned}$$

Aufgabe 38

Seien

$$E := \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1]) := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

und $T \in L(E)$ durch $Tf(t) := tf(t)$ gegeben.

Bestimmen Sie die Resolventenmenge $\rho(T)$, das Punktspektrum $\sigma_p(T)$, das kontinuierliche Spektrum $\sigma_c(T)$ und das Restspektrum $\sigma_r(T)$.

Aufgabe 39

Gegeben sei der Kern

$$k : \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (s,t) & \mapsto & \begin{cases} (1-s)t, & t \le s \\ (1-t)s, & s \le t \end{cases} \end{array}$$

des *Fredholm-Operators*

$$T_k : \begin{array}{ccc} \mathfrak{C}([0,1]) & \to & \mathfrak{C}([0,1]) \\ x(s) & \mapsto & \int_0^1 k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad s \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von T_k gerade $\lambda_n := (n\pi)^{-2}$, $n \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen Eigenfunktionen $x_n(s) := \sin(n\pi s)$, $s \in [0,1]$ sind und dass jeder geometrische Eigenraum $E_n := \mathrm{Kern}(T_k - \lambda_n)$ eindimensional ist.

Aufgabe 40

Bezeichne $S : \ell_2 \to \ell^2$ den Rechtsshift-Operator.

Bestimmen Sie $||S||, S^*, SS^*, S^*S, ||S^*||, \mathrm{Kern}(S), \mathrm{Bild}(S), \mathrm{Kern}(S^*)$ und $\mathrm{Bild}(S^*)$.

Aufgabe 41

Sei E ein normierter Raum. Zu $U \subseteq E'$ heißt $U_\perp := \{x \in E \mid \forall f \in U : f(x) = 0\}$ der *Annihilator* von U. Zeigen Sie:

(1) Sind E, F Banachräume und $T \in L(E,F)$, dann gilt $\overline{\mathrm{Bild}(T)} = (\mathrm{Kern}(T'))_\perp$.

(2) Ist $\mathrm{Bild}(T)$ zusätzlich abgeschlossen, so ist die Operatorgleichung $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn für $f \in F'$ aus $T'f = 0$ auf E folgt, dass $f(y) = 0$ sein muss.

Aufgabe 42

Seien $E = \mathfrak{C}([0,1])$, $\varphi \in E$ und $T \in L(E)$ der durch $(Tf)(t) := \varphi(t)f(t)$ definierte Multiplikationsoperator.

Bestimmen Sie $\sigma_p(T)$ und zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von T unendliche Vielfachheit haben, d.h. dass für alle $\lambda \in \sigma_p(T)$ gilt $\dim \operatorname{Kern}(T - \lambda) = \infty$.

Aufgabe 43

Seien E ein Hilbertraum und $T \in L(E, E)$. Zeigen Sie:

(1) $\rho(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \rho(T)\}$.
(2) $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.
(3) $\sigma_c(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_c(T)\}$.
(4) $\sigma_r(T) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(T^*)\} \backslash \sigma_p(T)$.

Aufgabe 44

Seien E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E, E)$. Zeigen Sie:

(1) Gilt $\forall x \in E : \langle Tx, x \rangle = 0$, dann ist $T = 0$.
(2) $\forall x \in E : ||T^*x|| = ||Tx|| \Leftrightarrow T$ ist normal (d.h. $TT^* = T^*T$).
(3) $\forall x \in E, n \in \mathbb{N} : ||(T^*)^n x|| = ||T^n x|| \Leftrightarrow T$ ist normal.

Gilt (1) auch, falls E ein $\mathbb{R}$-Hilbertraum ist?

Aufgabe 45

Seien E ein $\mathbb{C}$-Banachraum, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ und $S, T \in L(E, E)$. Zeigen Sie:

(1) Ist $(\lambda - ST)$ invertierbar, dann ist $\frac{1}{\lambda}(1 + T(\lambda - ST)^{-1}S)$ das Inverse von $\lambda - TS$.

(2) Es gilt $\sigma(ST) \backslash \{0\} = \sigma(TS) \backslash \{0\}$.

Aufgabe 46

Sei S der Rechtsshift-Operator in $\ell_2(\mathbb{Z})$. Bestimmen Sie $\rho(S), \sigma_p(S), \sigma_c(S)$ und $\sigma_r(S)$.

Aufgabe 47

Seien $E \neq \{0\}$ ein komplexer Banachraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie:

(1) Jeder Randpunkt λ von $\sigma(T)$ ist ein approximativer Eigenwert.

(2) Ist $||T|| \in \sigma(T)$, so gilt $||\mathrm{id}_E + T|| = 1 + ||T||$.

Aufgabe 48

Seien E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie:

(1) Falls $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in E$, dann ist $T + \mathrm{id}_E$ invertierbar.

(2) $T^*T + \mathrm{id}_E$ ist invertierbar für alle $T \in L(E)$.

(3) $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in E \Leftrightarrow T^* = T$ und $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$.

Aufgabe 49

Seien E ein Hilbertraum, $T \in L(E)$ und f ein Polynom. Zeigen Sie:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - T)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Dabei sei Γ ein positiv orientierter Kreis um 0 mit Radius $r > r(T)$.

Aufgabe 50

Die Volterrasche Integralgleichung ist definiert durch

$$f(s) := g(s) + \int_0^s G(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t,$$

wobei $G : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist.

(1) Zeigen Sie, dass für $K \in \mathfrak{C}([0,1])$ mit

$$Kf(s) := \int_0^s G(s,t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $||K^n|| \leq \frac{||G||_\infty^n}{n!}$ und zeigen Sie damit, dass die Volterrasche Integralgleichung für jedes $g \in \mathfrak{C}([0,1])$ genau eine Lösung $f \in \mathfrak{C}([0,1])$ besitzt.

(2) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(K)$ von K.

Aufgabe 51

Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und P_1, P_2 orthogonale Projektionen auf abgeschlossene Unterräume M_1 bzw. M_2. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) $M_1 \subseteq M_2$.
(2) $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.
(3) $\forall x \in H : ||P_1x|| \leq ||P_2x||$.
(4) $\forall x \in H : P_1 \leq P_2$, d.h. $\langle P_1x, x\rangle \leq \langle P_2x, x\rangle$.

Aufgabe 52

Seien $X = [0,1]$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1])$ versehen und $H = \mathcal{L}^2([0,1])$. Für $f \in H,\ A \in \mathcal{B}$ setze $(P_Af)(t) = \chi_A(t)f(t)$.

Zeigen Sie, dass $E(A) := \begin{cases} P_{A/2}, & \frac{1}{3} \notin A \\ P_{A/2} + P_{[1/2,1]}, & \frac{1}{3} \in A \end{cases}$ ein projektorwert. Maß definiert, wobei $\frac{A}{2} := \{\frac{a}{2} \mid a \in A\}$.

Aufgabe 53

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, H ein Hilbertraum und $E : \mathcal{A} \to L(H)$ ein projektorwertiges Maß. Zeigen Sie:

(1) $E(\emptyset) = 0$.

(2) $\forall A, B \in \mathcal{A} : E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B)$.

(3) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subseteq B \Rightarrow E(B \backslash A) = E(B) - E(A)$.

(4) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subseteq A_{n+1}$. Dann $E(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} E(A_n)$.
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \supseteq A_{n+1}$. Dann $E(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} E(A_n)$.

(5) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann $\mathrm{Bild}(E(A)) \perp \mathrm{Bild}(E(B))$.

(6) $\forall A, B \in \mathcal{A} : E(A \cap B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

Aufgabe 54

Seien E ein Bananachraum $x \in E$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

(1) Aus $x_n \xrightarrow{\text{s}} x$ folgt $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$. Die Umkehrung ist i.A. falsch.

(2) Falls $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$, so ist $(||x_n||_{n\in\mathbb{N}})$ beschränkt und $||x|| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} ||x_n||$.

(3) Sind E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und P, P_n Projektionen $(n = 1, 2, ...)$ mit $P_n \xrightarrow{\text{w}} P$, dann $P_n \xrightarrow{\text{s}} P$.

Literaturverzeichnis

[01] Hoffmann, D.: *Funktionalanalysis*. Vorlesung Wintersemester 2007/2008, Universität Konstanz.
Online: http://www.math.uni-konstanz.de/~hoffmann/FA/

[02] Denk, R.: *Funktionalanalysis*. Vorlesung Wintersemester 2007/2008, Universität Konstanz.
Online: http://www.math.uni-konstanz.de/~denk/vorlesungen/ws0708/fa_ws0708.pdf

[03] Denk, R.: *Funktionalanalysis II*. Vorlesung Wintersemester 2004/2005, Universität Konstanz.
Online: http://www.math.uni-konstanz.de/~denk/skripten/rds08.pdf

[04] Heuser, H.: *Funktionalanalysis*. Teubner, 4. Auflage, Wiesbaden 2006

[05] Rudin, W.: *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York 1973

[06] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York 1986

[07] Timmann, S.: *Repetitorium der Topologie und Funktionalanalysis*. Binomi Verlag, 1. Auflage, 2004

[08] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. Springer, 5. Auflage, Berlin 2005

[09] Leis, R.: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, Universität Bonn, Herbst 1997
Online: http://euler.iam.uni-bonn.de/~leis/web/pub/Funktionalanalysis.pdf

[10] Scherer, K.: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, Wintersemester 1998/1999, Universität Bonn
Online: http://www.iam.uni-bonn.de/~scherer/FAP.pdf

[11] Ulbrich, M.: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, Universität Hamburg, Februar 2005
Online: http://www.math.uni-hamburg.de/home/ulbrich/fa/skript/skriptum.pdf

[12] Zehnder, E.: *Funktionalanalysis I*. Vorlesungsskript, Wintersemester 2001/2002, Universität Zürich
Online: http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/ws0506/math/fa/fa_I.pdf

[13] Racke, R.: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, Sommersemester 2008, Universität Konstanz
Online: http://www.math.uni-konstanz.de/~racke/skripten/fa08.pdf

[14] Racke, R.: *Ausgewählte Kapitel der Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, Wintersemester 2005/2006, Universität Konstanz
Online: http://www.math.uni-konstanz.de/~racke/skripten/akdf05.pdf