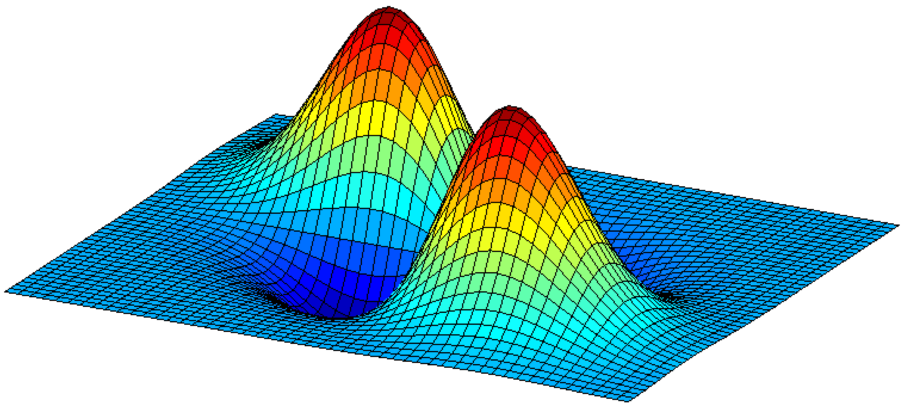
Skriptum zur Vorlesung

Mathematische Logik

Private Mitschrift



gelesen von

Prof. Dr. Alexander Prestel

Martin Gubisch

Konstanz, Wintersemester 2007/2008

Inhaltsverzeichnis

1. Analyse mathematischer Beweise

Bildet man die „Menge“ $y = \{x \mid E(x)\}$ mit E irgendeine Eigenschaft, dann erhält man mit $E(x) : x \notin x$ den Fall $x \in y \Leftrightarrow x \notin x$, also speziell $y \in y \Leftrightarrow y \notin y$ – die sogenannte Russelsche Antinomie. Es stellt sich somit die Frage, ob y überhaupt eine „richtige“ Menge ist oder allgemeiner, welche Eigenschaften eine Menge definieren und welche nicht, so dass sich keine „Widersprüche“ ergeben.

Hilberts Lösungsansatz: Wir brauchen ...

1. ... die Angabe einer formalen Sprache, die es erlaubt, alles in der Mathematik Übliche zu beschreiben. Universalmittel: die Mengenlehre,
2. ... die Angabe eines vollständigen Systems allgemeingültiger, logischer Schlüsse;
3. ... die Angabe eines vollständigen Systems mathematischer Axiome,
4. ... den Nachweis der Widerspruchsfreiheit des in (1)-(3) angegebenen, formalen Systems.

„Vollständig“ heißt dabei, dass für eine beliebige Aussage α entweder α selbst oder das Gegenteil $\neg\alpha$ beweisbar ist. (1) und (2) wurden positiv, (3) negativ beantwortet. (4) kann nach Gödel nicht positiv beantwortet werden.

Beispiel 1.1. (eines Beweises)

Gegeben seien die Körperaxiome für $\mathbb{R}$ und die folgenden Anordnungsaxiome:

1. $\leq$ ist eine partielle Ordnung. (A1)
2. Für alle x, y gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. (A2)
3. Für $x \leq y$ haben wir $x + z \leq y + z$ für jedes z. (A3)
4. Sind $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so auch $0 \leq xy$. (A4)

Wir wollen zeigen: $0 \leq xx$ *für jedes* x.

Aus (A2) erhalten wir $0 \leq x$ *oder* $x \leq 0$. *Ist* $0 \leq x$, *so ergibt (A4):* $0 \leq xx$. *Ist aber* $x \leq 0$, *so folgt mit (A3):* $0 \leq -x$. *Nun ergibt (A4) wieder* $0 \leq (-x)(-x) = xx$. *Also gilt* $0 \leq xx$ *für alle* x.

Es treten bei dieser Argumentation die folgenden Probleme in Hinblick auf Hilberts Programm auf:

1. Überflüssige Wörter wie „gilt“, „haben wir“, „wieder“, „aber“, „nun“ ... kann man weglassen.
2. Gleichbedeutende Formulierungen wie „für alle“ und „für jedes“ kann man durch das Symbol $\forall$ ersetzen.
3. Stehen Quantoren nicht grundsätzlich vor den zugehörigen Aussagen, so ist nicht immer eindeutig, worauf sie sich beziehen.
4. Man muss festlegen, ob „oder“ ein- oder ausschließlich gemeint ist.
5. Man muss logische Regeln wie die *Kettenschlüsse* $0 \leq (-x)(-x)$ und $(-x)(-x) = xx \Rightarrow 0 \leq xx$ oder die ebenfalls benutzte *Fallunterscheidung* formulieren.

Wir formulieren zunächst die Axiome formal:

1. $\forall xy(x \leq y \vee y \leq x)$. (A2)
2. $\forall xyz(x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z)$. (A3)
3. $\forall xy(0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow 0 \leq xy)$. (A4)

Die zu zeigende Aussage lautet formal dann $\forall x(0 \leq xx)$; etwas formalisiert sieht unser Beweis so aus:

1. $(A1) \rightarrow (0 \leq x \vee x \leq 0)$
2. $0 \leq x \wedge (A3) \rightarrow 0 \leq xx$
3. $0 \leq x \rightarrow 0 \leq xx$
4. $x \leq 0 \wedge (A2) \rightarrow x + (-x) \leq 0 + (-x)$
5. $x + (-x) \leq 0 + (-x) \wedge x + (-x) \doteq 0 \rightarrow 0 \leq 0 + (-x)$
6. $0 \leq 0 + (-x) \wedge 0 + (-x) \doteq (-x) \rightarrow 0 \leq -x$

7. $0 \leq (-x) \wedge (\text{A3}) \to 0 \leq (-x)(-x)$
8. $0 \leq (-x)(-x) \wedge (-x)(-x) \doteq xx \to 0 \leq xx$
9. $x \leq 0 \to 0 \leq xx$
10. $0 \leq x \vee x \leq 0 \to 0 \leq xx$
11. $(1) \to (0 \leq x \vee x \leq 0)$
12. $\forall x(0 \leq xx)$

Wir legen fest: $\vee, \wedge$ binden stärker als $\to, \leftrightarrow$ und $\neg$ bindet stärker als $\wedge, \vee$. Weiter benutzten wir folgende Symbole: die Quantoren $\forall$, $\exists$; die logischen Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\leftrightarrow$; die Konstante 0; die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, die Relationen $\leq$, $\doteq$ sowie die Hilfssymbole), (und die Variablen x, y, z. $\Diamond$

2. Aufbau formaler Sprachen

Wir arbeiten von jetzt an in zwei Sprachen, die wir strikt trennen wollen: Der Objektsprache, deren Eigenschaften wir untersuchen wollen, und der Metasprache, in der wir über die Objektsprache sprechen.

Unsere Objektsprache besteht aus ...

1. ... einem Alphabet. Dieses beinhaltet die logischen Zeichen $\neg, \wedge, \forall, \doteq$; Variablen wie $v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ...$ bzw. $v', v'', v''', ...$; Relationszeichen R_i $(i \in I)$, Funktionszeichen f_j $(j \in J)$, Konstanten c_k $(k \in K)$ und Hilfszeichen), (,.

2. ... Termen, welche wie wie folgt charakterisieren: Alle Variablen v_n $(n \in \mathbb{N})$ und alle Konstanten c_k $(k \in K)$ sind Terme. Sind $t_1, ..., t_{\mu(j)}$ schon Terme, dann ist auch $f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)})$ ein Term. Keine weiteren „Zeichenreihen“ sind Terme.

3. ... Formeln, welche gebildet werden nach den folgenden Regeln: Sind t_1, t_2 Terme, dann ist $t_1 \doteq t_2$ eine Formel. Sind $t_1, ..., t_{\lambda(i)}$ Terme, dann ist $R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)})$ eine Formel. Sind φ und ψ Formeln und ist v eine Variable, dann sind auch $\varphi \wedge \psi$, $\neg\varphi$ und $\forall v \varphi$ Formeln. Keine weiteren Zeichenreihen sind Formeln.

   Formeln des Typs $t_1 \doteq t_2$ und $R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)})$ werden als Primformeln bezeichnet.

Die übrigen im vorherigen Abschnitt benutzten Symbole sind Abkürzungen: $\varphi \vee \psi$ steht für $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\varphi \to \psi$ steht für $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ und $\exists v \varphi$ für $\neg \forall v \neg \varphi$.

Wir schreiben manchmal $t_1 \neq t_2$ für $\neg(t_1 \doteq t_2)$, $t_1 R_i t_2$ für $R_i(t_1, t_2)$, $t_1 f_j t_2$ für $f_j(t_1, t_2)$, $\forall xy$ für $\forall x \forall y$ und $\exists xy$ für $\exists x \exists y$.

Wir führen Funktionen λ und μ ein, die jedem Index $i \in I$ bzw. $j \in J$ die Stellenzahl des Relationszeichen R_i bzw. des Funktionszeichens f_j zuordnen. Beispielsweise entspricht die $+$-Funktion üblicherweise einem zweistelligen Funktionszeichen $f_j = +$, d.h. $\mu(j) = 2$, und die $\leq$-Relation wird normalerweise als einstelliges Relationszeichen R_i gebraucht, d.h. $\lambda(i) = 1$.

Das Tripel $L = (\mu, \lambda, K)$ ist unsere formale Sprache oder auch Syntax; daraus bilden wir L-Formeln und L-Terme. Wir schreiben $\mathrm{Fml}(L)$ für die Menge der L-Formeln und $\mathrm{Tm}(L)$ für die Menge der L-Terme. Für zwei formale Sprachen $L = (\mu, \lambda, K)$ und $L' = (\mu', \lambda', K')$ setzen wir $L \subseteq L'$, falls $I \subseteq I'$, $J \subseteq J'$, $K \subseteq K'$ und $\mu'|_J = \mu$ sowie $\lambda'|_I = \lambda$.

Bemerkung 2.1.

Variablen können innerhalb von Formeln verschiedene Bedeutungen haben. Betrachten wir etwa

$$\exists v_0(0 < v_0 \wedge v_0 < v_1) \wedge \forall v_2(v_2 < 0 \to v_2 < v_0),$$

dann spielt es offenbar keine Rolle, ob wir im ersten Teil der Formel v_0 durch x ersetzen; wir verändern die Formel aber sehr wohl, wenn wir v_0 im zweiten Teil oder v_1 durch eine andere Variable ersetzen.

Allgemein nennen wir bei einer $\forall$-Formel $\forall x \varphi$ die Formel φ den Wirkungsbereich von $\forall x$. Kommt x in φ vor, so heißt x gebundene Variable; die Variablen v in φ, die nicht im Wirkungsbereich eines $\forall$-Quantors $\forall v$ liegen, heißen frei. Im obigen Beispiel sind v_0, v_2 gebunden und v_0, v_1 sind frei. Mit $\mathrm{Fr}(\varphi)$ bezeichnen wir die Menge der freien Variablen der Formel φ. Eine L-Formel φ ist eine Aussage, falls $\mathrm{Fr}(\varphi) = \emptyset$. Die Menge der Aussagen in L wird mit $\mathrm{Aus}(L)$ bezeichnet.

Ist φ eine Formel, dann bezeichen wir mir $\varphi(x/t)$ die Formel, die entsteht, wenn wir jede frei vorkommende Variable x durch den Term t ersetzen: Eine Ersetzung ist eine dreistellige Relation $\mathrm{Fml} \times \mathrm{Var} \times \mathrm{Tm} \to \mathrm{Fml}$, $(\varphi, x, t) \mapsto \varphi(x/t)$.

In $\varphi : \forall x(x \doteq x)$ ist beispielsweise $\varphi(x/0) : \forall x(x \doteq x)$. In $\psi : \forall x(x \doteq y)$ ist $\psi(y/0) : \forall x(x \doteq 0)$ und $\psi(x/0) : \forall x(x \doteq y)$.

Ein Term t heißt frei für x in φ, falls in t keine Variable vorkommt, die durch die Ersetzung von x durch t in den Wirkungsbereich eines Quantors der Formel φ gerät. $\Diamond$

Bemerkung 2.2. (Normalformen)

Wir schreiben

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \qquad \text{und} \qquad \bigvee_{i=1}^{m} \beta_i = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_m.$$

Wir sagen, eine Formel der Gestalt $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij}$ hat konjunktive Normalform und eine Formel der Gestalt $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n_i} \delta_{ij}$ disjunktive Normalform, wenn alle γ_{ij} Primformeln oder negierte Primformeln sind. Eine Formel der Form $Q_1 x_1 ... Q_m x_m \psi$ mit $Q_i = \forall$ oder $Q_i = \exists$ für $i = 1, ..., m$ und ψ quantorenfrei hat pränexe Normalform. $\Diamond$

3. Formale Beweise

Definition 3.1.

Sei $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$. Ein Beweis aus Σ ist eine endliche Folge $\varphi_1, ..., \varphi_n$ von Formeln, so dass für jedes φ_i gilt: $\varphi_i \in \Sigma$ oder φ_i ist ein „logisches Axiom“ oder φ_i wurde durch Anwendung einer „logischen Regel“ aus $\varphi_1, ..., \varphi_{i-1}$ gewonnen. Sei $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$. Wir sagen, α ist aus Σ beweisbar, wenn es einen Beweis $\varphi_1, ..., \varphi_n$ aus Σ gibt mit $\alpha = \varphi_n$. Wir schreiben dann $\Sigma \vdash \alpha$.

Bemerkung 3.2. (Aussagenlokik)

Die aussagenlogische Sprache besteht aus den Zeichen $\neg$ (“nicht”), $\wedge$ (“und”),), (und den Aussagenvariablen $A_0, A_1, ..., A_n, ...$ ($n \in \mathbb{N}$). In diesem Alphabet bilden wir Aussageformen, indem wir definieren: $A_0, ..., A_n, ...$ sind Aussageformen; sind A_i, A_j Aussageformen, dann auch $\neg A_i$ und $A_i \wedge A_j$; keine weiteren Zeichenreihen sind Aussageformen.

Eine Bewertung $B : \{A_0, ..., A_n, ...\} \to \{w, f\}$ ist eine Abbildung, die jeder Aussagenvariablen den Wahrheitswert w („wahr“) oder f („falsch“) zuordnet. Wir definieren dazu iterativ $B(\neg X) = -B(X)$ und $B(X \wedge Y) = B(X) \cap B(Y)$ mit Operationen $- : \{w, f\} \to \{w, f\}$ und $\cap : \{w, f\}^2 \to \{w, f\}$ auf $\{w, f\}$, gegeben durch

$$-\begin{pmatrix} w \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \cap \begin{pmatrix} (w,w) \\ (w,f) \\ (f,w) \\ (f,f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ f \\ f \\ f \end{pmatrix}.$$

Eine aussagenlogische Tautologie ist eine Aussagenform, die bei jeder Bewertung den Wert w liefert. Ein Beispiel einer aussagenlogischen Tautologie – oder kurz: eine Tautologie) – in L ist eine aussagenlogische Tautologie, deren Aussagenvariablen durch L-Formeln ersetzt wurden. $\Diamond$

Beispiel 3.3.

Wir zeigen, dass $(A_0 \wedge A_1) \to A_0$ bzw. $\neg((A_0 \wedge A_1) \wedge \neg A_0)$ eine Tautologie ist.

A_0	A_1	$\neg$	(	(	A_0	$\wedge$	A_1	)	$\wedge$	$\neg$	A_0	)
w	w	w			w	w	w		f	f	w	
w	f	w			w	f	f		f	f	w	
f	w	w			f	f	w		f	w	f	
f	f	w			f	f	f		f	w	f	

Dabei verwenden wir wie üblich die Abkürzungen $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, gegeben durch

X	Y	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	f
f	w	w	f	f
f	f	f	w	w

Sind α, β L-Formeln, dann ist $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ ein Beispiel einer aussagenlogischen Tautologie. $\Diamond$

Definition 3.4.

Seien α, β zwei L-Formeln, x eine Variable und t ein L-Term.

1. Die quantorenlogischen Axiome sind
   a) $\forall x \alpha \rightarrow \alpha(x/t)$, falls t frei für x in α. (A1)
   b) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$, falls $x \notin \mathrm{Fr}(\alpha)$. (A2)
2. Die identitätslogischen Axiome sind
   a) $x \doteq x$. (I1)
   b) $x \doteq y \rightarrow (x \doteq z \rightarrow y \doteq z)$. (I2)
   c) $y \doteq z \rightarrow (R_i(x_1, ..., y, ..., x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(x_1, ..., z, ..., x_{\lambda(i)}))$. (I3)
   d) $y \doteq z \rightarrow (f_j(x_1, ..., y, ..., x_{\mu(j)}) \doteq f_j(x_1, ..., z, ..., x_{\mu(j)}))$. (I4)
3. Die logischen Axiome sind Beispiele von Tautologien, quantoren- und identitätslogische Axiome.
4. Die logischen Regeln sind
   a) Modus Ponens: Unter die beiden Zeilen $\alpha \rightarrow \beta$, α darf β geschrieben werden. (MP)
   b) Generalisierung: Unter die Zeile φ darf $\forall x \varphi$ geschrieben werden ($\forall$)

Beispiel 3.5.

Gilt $\Sigma \vdash (\alpha \wedge \beta)$, dann auch $\Sigma \vdash \alpha$, denn sei $\varphi_1, ..., \varphi_n$ ein Beweis der Formel $\alpha \wedge \beta$, speziell $\varphi_n : (\alpha \wedge \beta)$, dann ist $\varphi_1, ..., \varphi_{n+2}$ mit der Tautologie $\varphi_{n+1} : (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ und der durch Modus Ponens ergänzbaren Zeile α ein Beweis der Formel α. $\Diamond$

Bemerkung 3.6. (Abgeleitete Regeln)

Seien α, β, γ L-Formeln und t_1, t_2, t_3 L-Terme. Dann gelten:

1. Unter $\alpha \wedge \beta$ darf sowohl α als auch β geschrieben werden mit den Tautologien $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ bzw. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$. ($\wedge$-Regeln)
2. Sowohl unter α als auch unter β darf $\alpha \vee \beta$ geschrieben werden mit den Tautologien $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ bzw. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$. ($\vee$-Regeln)
3. Unter $\alpha \leftrightarrow \beta$ dürfen $\alpha \rightarrow \beta$ und $\beta \rightarrow \alpha$ geschrieben werden, denn $(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ und $(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ sind Tautologien. ($\leftrightarrow$-Regel)
4. Unter die Formel $\alpha \rightarrow \beta$ darf mit der Tautologie $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ die Formel $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ geschrieben weden (Kontraposition)
5. Mit (A1) darf $\alpha(x/t)$ unter $\forall x \alpha$ geschrieben werden, falls t frei für x in α ist. (Ersetzungsregel)
6. Mit (A2) darf $\alpha \rightarrow \forall x \beta$ unter $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$ geschrieben werden, falls $x \notin \mathrm{Fr}(\alpha)$.
7. Mit der Tautologie $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ darf unter die Zeilen $\alpha \rightarrow \beta$ und $\beta \rightarrow \gamma$ die Formel $\alpha \rightarrow \gamma$ geschrieben werden. (Kettenschluss)
8. Mit der Tautologie $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta))$ darf unter die Zeilen $\alpha \rightarrow \beta$ und $\beta \rightarrow \alpha$ die Formel $\alpha \leftrightarrow \beta$ geschrieben werden.

9. Unter die beiden Zeilen $\alpha \to \gamma$ und $\beta \to \gamma$ darf die Formel $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$ geschrieben werden, denn $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$ ist eine Tautologie. (Fallunterscheidung)
10. Mit den Tautologien $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ bzw. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \vee \beta))$ dürfen unter die beiden Zeilen α, β die Formeln $\alpha \wedge \beta$ und $\alpha \vee \beta$ erfüllt werden.
11. Mit den identitätslogischen Axiomen darf man $t_2 \doteq t_1$ unter die Zeile $t_1 \doteq t_2$ schreiben und $t_1 \doteq t_3$ unter die beiden Zeilen $t_1 \doteq t_2$ und $t_2 \doteq t_3$. $\lozenge$

Bemerkung 3.7.

Seien R_i ein Relationszeichen mit Stellenzahl $\lambda(i)$, f_j ein Funktionszeichen mit Stellenzahl $\mu(j)$ und $t_1, ..., t_{\lambda(i)}$ bzw. $t_1, ..., t_{\mu(j)}$ sowie t, t' L-Terme. Dann gelten:

1. Unter $t \doteq t'$ darf $R_i(t_1, ..., t, ..., t_{\lambda(i)}) \to R_i(t_1, ..., t', ..., t_{\lambda(i)})$ geschrieben werden.
2. Unter $t \doteq t'$ darf $f_j(t_1, ..., t, ..., t_{\mu(j)}) \doteq f_j(t_1, ..., t', ..., t_{\mu(j)})$ geschrieben werden.

Wir zeigen nur die erste Behauptung. Œ führen wir die Ersetzung von t durch t' im ersten Argument von R_i durch. Gelte $\Sigma \vdash (t \doteq t')$. Wir verlängern einen solchen Beweis um die folgenden Zeilen, wobei $x, y, u_2, ..., u_{\lambda(i)}$ so gewählt seien, dass sie in keinem der Terme $t, t', t_2, ..., t_{\lambda(i)}$ vorkommen.

1. $t \doteq t'$ (Vor.)
2. $x \doteq y \to (R_i(x, u_2, u_3, ...) \to R_i(y, u_2, u_3, ...))$ (I3)
3. $\forall x(x \doteq y \to (R_i(x, u_2, u_3, ...) \to R_i(y, u_2, u_3, ...)))$ ($\forall$)
4. $t \doteq y \to (R_i(t, u_2, u_3, ...) \to R_i(y, u_2, u_3, ...))$ (5)
5. $\forall y(t \doteq y \to (R_i(t, u_2, u_3, ...) \to R_i(y, u_2, u_3, ...)))$ ($\forall$)
6. $t \doteq t' \to (R_i(t, u_2, u_3, ...) \to R_i(t', u_2, u_3, ...))$ (5)
7. $\forall u_2(t \doteq t' \to (R_i(t, u_2, u_3, ...) \to R_i(t', u_2, u_3, ...)))$ ($\forall$)
8. $t \doteq t' \to (R_i(t, t_2, u_3, ...) \to R_i(t', t_2, u_3, ...))$ (5)
9. ... (...)
10. $t \doteq t' \to (R_i(t, t_2, t_3, ...) \to R_i(t', t_2, t_3, ...))$ (5)
11. $R_i(t, t_2, t_3, ...) \to R_i(t', t_2, t_3, ...)$ (MP)

Beispiel 3.8.

Wir formalisieren nun den Beweis von $\forall x(0 \leq xx)$ aus der „Axiomenmenge“ $\Sigma = \{(1'), ..., (5')\}$ mit

1. $\forall xy(x \leq y \vee y \leq x)$ (O1)
2. $\forall xyz((x \leq y) \to (x + z \leq y + z))$ (O2)
3. $\forall xy((0 \leq x \wedge 0 \leq y) \to 0 \leq xy)$ (O3)
4. $\forall xy(x + (-x) \doteq 0 \wedge 0 + y \doteq y)$ (O4)
5. $\forall x((-x)(-x) \doteq xx)$ (O5)

Die dabei benutzte Sprache L hat die Indexmengen $I = \{0\}$ mit $\lambda(0) = 2$, $J = \{0, 1, 2\}$ mit $\mu(0) = 1$ und $\mu(1) = \mu(2) = 2$ und $K = \{0\}$. Also ist R_0 das einzige, zweistellige Relationszeichen, für das wir statt $R_0(x, y)$ schreiben $x \leq y$; unsere Funktionszeichen sind f_0 (einstellig) mit $(-x) = f_0(x)$ und f_1, f_2 (zweistellig) mit $x + y = f_1(x, y)$ und $xy = f_2(x, y)$. Für die (einzige) Konstante c_0 schreiben wir 0. Unser formale Beweis ist dann:

1. $\forall xy(x \leq y \vee y \leq x)$ (O1)
2. $\forall y(x \leq y \vee y \leq x)$ (3.6.5) auf (1.)
3. $x \leq 0 \vee 0 \leq x$ (3.6.5) auf (2.)
4. $\forall x < ((0 \leq x \wedge 0 \leq y) \to (0 \leq xy))$ (O3)
5. $\forall y((0 \leq x \wedge 0 \leq y) \to (0 \leq xy))$ (3.6.5) auf (4.)

6. $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \to (0 \leq xx)$ — (3.6.5) auf (5.)
7. $0 \leq x \to (0 \leq x \wedge 0 \leq x)$ — (Tau.)
8. $0 \leq x \to 0 \leq xx$ — (3.6.7) auf (6.), (7.)
9. $\forall xyz(x \leq y \to x + z \leq y + z)$ — (O2)
10. $\forall yz(x \leq y \to x + z \leq y + z)$ — (3.6.5) auf (9.)
11. $\forall z(x \leq 0 \to x + z \leq 0 + z)$ — (3.6.5) auf (10.)
12. $x \leq 0 \to x + (-x) \leq 0 + (-x))$ — (3.6.5) auf (9.)
13. $\forall xy(x + (-x) \doteq 0 \wedge 0 + y \doteq y)$ — (O4)
14. $\forall y(x + (-x) \doteq 0 \wedge 0 + y \doteq y)$ — (3.6.5) auf (13.)
15. $x + (-x) \doteq 0 \wedge 0 + (-x) \doteq (-x)$ — (3.6.5) auf (14.)
16. $x + (-x) \doteq 0$ — (3.6.1) auf (15.)
17. $x + (-x) \leq 0 + (-x) \to 0 \leq 0 + (-x)$ — (3.7.1) auf (16.)
18. $x \leq 0 \to 0 \leq 0 + (-x)$ — (3.6.7) auf (12.), (17.)
19. $0 + (-x) \doteq (-x)$ — (3.6.1) auf (15.)
20. $(0 \leq 0 + (-x)) \to (0 \leq (-x))$ — (3.7.1) auf (19.)
21. $x \leq 0 \to 0 \leq (-x)$ — (3.6.7) auf (18.), (20.)
22. $\forall x(0 \leq x \to 0 \leq xx)$ — ($\forall$) auf (8.)
23. $0 \leq (-x) \to 0 \leq (-x)(-x)$ — (3.6.5) auf (22.)
24. $\forall x((-x)(-x) \doteq xx)$ — (O5)
25. $(-x)(-x) \doteq xx$ — (3.6.5) auf (24.)
26. $0 \leq (-x)(-x) \to 0 \leq xx$ — (3.7.1) auf (25.)
27. $0 \leq (-x) \to 0 \leq xx$ — (3.6.7) auf (23.), (24.)
28. $x \leq 0 \to 0 \leq xx$ — (3.6.7) auf (21.), (27.)
29. $(x \leq 0 \vee 0 \leq x) \to 0 \leq xx$ — (3.6.9) auf (8.), (28.)
30. $0 \leq xx$ — (MP) auf (3.), (24.)
31. $\forall x(0 \leq xx)$ — ($\forall$) auf (30.)

Dieser Beweis genügt nun den formalen Anforderungen. $\diamondsuit$

Lemma 3.9.

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$, $\Sigma \subseteq \mathrm{Fml}(L)$ und $x \in \mathrm{Vbl}$. Dann gelten

1. $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \forall x\varphi$.
2. $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\forall x\psi\} \vdash \varphi$.

Beweis.

Beachte: $\varphi(x/x)$ und φ sind identisch; außerdem ist x immer frei für x in φ.

1. $\Rightarrow$: Ist $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi$ ein Beweis aus Σ, dann mit ($\forall$) auch $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi, \forall x\varphi$.

   $\Leftarrow$: Ist $\varphi_1, ..., \varphi_n, \forall x\varphi$ ein Beweis aus Σ, dann mit (3.6.5) auch $\varphi_1, ..., \varphi_n, \forall x\varphi, \varphi$.

2. $\Rightarrow$: Ist $..., \psi, ..., \varphi$ ein Beweis aus $\Sigma \cup \{\psi\}$, dann ist mit (3.6.5) $..., \forall x\psi, \psi, ..., \varphi$ ein Beweis aus $\Sigma \cup \{\forall x\psi\}$.

   $\Leftarrow$: Ist $..., \forall x\psi, ..., \varphi$ ein Beweis aus $\Sigma \cup \{\forall x\psi\}$, so ist mit ($\forall$) $..., \psi, \forall x\psi, ..., \varphi$ einer aus $\Sigma \cup \{\psi\}$. $\square$

Satz 3.10. (Deduktionstheorem)

Seien $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$, $\varphi \in \mathrm{Aus}(L)$ und $\Sigma \subseteq \mathrm{Fml}(L)$. Dann gilt: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longrightarrow \Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$.

Beweis.

Wir zeigen per Induktion über n: Ist $\varphi_1, ..., \varphi_n$ ein Beweis aus $\Sigma \cup \{\varphi\}$, dann kann $\varphi \to \varphi_1, ..., \varphi \to \varphi_n$ zu einem Beweis aus Σ ergänzt werden.

1. Induktionsanfang $n = 1$: Sei φ_1 ein Beweis aus $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Zu zeigen: $\varphi \to \varphi_1$ ist zu einem Beweis aus Σ ergänzbar.
   a) Ist φ_1 ein logisches Axiom oder $\varphi_1 \in \Sigma$, dann ist $\varphi_1, \varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_1), \varphi \to \varphi_1$ ein Beweis aus Σ.
   b) Ist $\varphi_1 = \varphi$, dann ist $\varphi \to \varphi_1$ ein Beweis aus Σ.
2. Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$ ein Beweis aus $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Beweis für $\varphi \to \varphi_1, ..., \varphi \to \varphi_n$ aus Σ.
   a) Ist φ_{n+1} ein logisches Axiom oder $\varphi_{n+1} \in \Sigma$, dann ergänze wie im Fall $n = 1$.
   b) Ist $\varphi_{n+1} = \varphi$, dann ist $\varphi \to \varphi_{n+1}$ ein Beweis aus Σ.
   c) Ist φ_{n+1} durch Modus Ponens entstanden, dann gibt es $i, j < n$ mit $\varphi_j : \varphi_i \to \varphi_{n+1}$. Dann ist ein Beweis aus Σ gegeben durch
      1. ...
      2. $\varphi \to \varphi_i$
      3. ...
      4. $\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_{n+1})$
      5. $(\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_{n+1})) \to ((\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \varphi_{n+1}))$
      6. $(\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \varphi_{n+1})$
      7. $\varphi \to \varphi_{n+1}$
   d) Ist φ_{n+1} durch $(\forall)$, angewandt auf φ_i $(i < n)$, gewonnen, d.h. $\varphi_{n+1} : \forall x \varphi$, dann ist ein Beweis aus Σ gegeben durch
      1. ...
      2. $\varphi \to \varphi_i$
      3. ...
      4. $\varphi \to \varphi_n$
      5. $\forall x(\varphi \to \varphi_i)$
      6. $\varphi \to \forall x \varphi$ $\square$

4. Vollständigkeit der Logik erster Stufe

Definition 4.1.

Seien L eine formale Sprache und $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$. Σ heißt widerspruchsvoll, falls es ein $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ gibt mit $\Sigma \vdash \alpha$ und $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Andernfalls heißt Σ widerspruchsfrei.

Bemerkung 4.2.

Σ ist genau dann widerspruchsvoll, wenn es ein $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ gibt mit $\Sigma \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha)$. $\Diamond$

Lemma 4.3.

Σ ist widerspruchsvoll $\Longleftrightarrow \Sigma \vdash \beta$ für alle $\beta \in \mathrm{Fml}(L)$.

Beweis.

1. Die Implikation $\Leftarrow$ ist trivial.
2. Zu $\Rightarrow$: Es gibt $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ mit $...\alpha$ und $...\neg\alpha$ Beweise aus Σ und $\beta \in \mathrm{Fml}(L)$. Dann ist auch
   1. α (nach Vor.)
   2. $\neg\alpha$ (nach Vor.)
   3. $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ ($\wedge$-Regel)
   4. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$ (Tautologie)
   5. β (Modus Ponens)

   ein Beweis aus Σ, d.h. es gilt $\Sigma \vdash \beta$ für alle Formeln $\beta \in \mathrm{Fml}(L)$. □

Lemma 4.4.

Seien $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ und $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$. Dann gilt $\Sigma \nvdash \alpha \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ist widerspruchsfrei.

Beweis.

1. Zu $\Rightarrow$: Ist $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ widerspruchsvoll, dann gilt $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$, also sind folgende Zeilen ein Beweis aus Σ:
   1. $\neg\alpha \to \alpha$ (Deduktionstheorem)
   2. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ (Tautologie)
   3. α (Modus Ponens)
2. Zu $\Leftarrow$: Aus $\Sigma \vdash \alpha$ folgen $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$ und $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \to \neg\alpha$, d.h. $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ist widerspruchsvoll. □

Lemma 4.5.

Seien $L^{(1)} \subseteq L^{(2)}$ mit $I^{(1)} = I^{(2)}$, $J^{(1)} = J^{(2)}$ und $K^{(1)}\dot{\cup}\{0\} = K^{(2)}$. Weiter sei $\varphi_1, ..., \varphi_n$ ein Beweis in $L^{(2)}$ aus der Menge $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ $(m \leq n)$.

Kommt die Variable y in keinem der φ_i vor, dann ist $\varphi_1(c_0/y), ..., \varphi_m(c_0/y)$ ein Beweis in $L^{(1)}$ aus $\{\varphi_1(c_0/y), ..., \varphi_m(c_0/y)\}$.

Beweis.

Wir führen eine Induktion über n.

1. Induktionsanfang: $n = 1$, dann Œ $m = 0$. Dann ist φ_1 ein logisches Axiom. Es können folgende Fälle auftreten:
   a) Ist φ_1 eine Tautologie, dann ist auch $\varphi_1(c_0/y)$ eine Tautologie.
   b) Ist φ_1 ein identitätslogisches Axiom, dann ist $\varphi_1(c_0/y) = \varphi_1$.
   c) Ist $\varphi_1 : \forall x\psi \to \psi(x/t)$ mit t frei für x in ψ, dann
   $$\varphi_1(c_0/y) = \forall x\psi(c_0/y) \to \psi(x/t)(c_0/y) = \forall x\psi(c_0/y) \to \forall x\psi(c_0/y)(x/t).$$
   t ist dabei auch frei für x in $\psi(c_0/y)$.
   d) Der Fall $\varphi_1 : (\forall x(\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \forall x\beta)$ mit $x \notin \mathrm{Fr}(\alpha)$ wird analog behandelt.
2. Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Sei $\varphi_1(c_0/y), ..., \varphi_{n-1}(c_0/y)$ ein Beweis aus $\{\varphi_1(c_0/y), ..., \varphi_m(c_0/y)\}$, Œ $m < n$. Dann gelten:

a) Ist φ_n logisches Axiom, dann ist $\varphi_n(c_0/y)$ logisches Axiom wie eben.

b) Haben wir φ_n durch Modus Ponens erhalten, dann gibt es $i, j < n$ mit $\varphi_j : \varphi_i \to \varphi_n$, also $\varphi_j(c_0/y) : \varphi_i(c_0/y) \to \varphi_n(c_0/y)$, also erhalten wir $\varphi_n(c_0/y)$ durch Modus Ponens.

c) Haben wir φ_n durch die $(\forall)$-Regel erhalten, dann gibt es ein $i < n$ mit $\varphi_n : \forall x \varphi_i$. Dann ist auch $\varphi_n(c_0/y) : \forall x \varphi_i(c_0/y)$, also erhalten wir $\varphi_n(c_0/y)$ durch die $(\forall)$-Regel. □

Satz 4.6.

Seien $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ und Σ widerspruchsfrei. Dann gibt es eine Sprache $L' \supseteq L$ mit $I' = I$, $J' = J$ und widerspruchsfreies $\Sigma' \subseteq \mathrm{Aus}(L')$ mit $\Sigma \subseteq \Sigma'$ derart, dass zu jeder L'-Aussage $\exists x \varphi$ ein $k \in K' \backslash K$ existiert mit $(\exists x \varphi \to \varphi(x/c_k)) \in \Sigma'$.

Beweis.

Betrachte die Sprach- Konstanten- und Axiomsystemerweiterung

$$\begin{aligned} L = L_0 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq \cdots &\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = L', \\ K = K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_n \subseteq \cdots &\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = K', \\ \Sigma = \Sigma_0 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma_n \subseteq \cdots &\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n = \Sigma' \subseteq \mathrm{Aus}(L'), \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Fml}(L') = \bigcup\{\mathrm{Fml}(L_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathrm{Aus}(L') = \bigcup\{\mathrm{Aus}(L_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt: Mit Σ_n widerspruchsfrei für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch Σ' widerspruchsfrei. Setze

$$\Sigma_n = \Sigma_{n-1} \cup \{\exists x \varphi \to \varphi(x/c_k) \mid k \in M_n \text{ passend, } \exists x \varphi \in \mathrm{Aus}(L_{n-1})\}.$$

Dabei ist $M_n = K_n \backslash K_{n-1}$ gleichmächtig wie $\{\exists x \varphi \mid \exists x \varphi \in \mathrm{Aus}(L_{n-1})\}$. Angenommen, $\Sigma_n \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha)$. Dann $\Sigma_{n-1} \cup \{\exists x_1 \varphi_1 \to \varphi_1(x_1/c_{k_1}), ..., \exists x_m \varphi_m \to \varphi_m(x_m/c_{k_m})\} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha)$. Nach Induktionsannahme ist Σ_{n-1} widerspruchsfrei. Œ sei m so groß, dass alle Konstanten, in dem Beweis von $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ vorkommen, schon unter den $c_{k_1}, ..., c_{k_m}$ vorkommen. Dann gilt $\Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash (\sigma_1 \to (\alpha \wedge \neg\alpha))$ nach dem Deduktionstheorem, wobei wir setzen $\sigma_i : \exists x_i \varphi_i \to \varphi_i(x_i/c_{k_i})$ $(1 \le i \le m)$. Wir erhalen dann mit der Tautologie $(\beta \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \to \neg\beta$ mit einem y, das nicht in dem Beweis von $\neg\varphi_i(x_1/c_{k_1})$ aus $\Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\}$ vorgekommen ist:

$$\begin{aligned} & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \neg\sigma_1 \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash (\exists x_1 \varphi_i \wedge \neg\varphi_1(x_1/c_{k_1})) \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \exists x_1 \varphi_1 \text{ und } \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \neg\varphi_1(x_1/c_{k_1}) \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \exists x_1 \varphi_1 \text{ und } \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash ((\neg\varphi_1(x_1/c_{k_1}))(c_{k_1}/y)) \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \exists x_1 \varphi_1 \text{ und } \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash (\neg\varphi_1(x_1/y)) \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \forall y \neg\varphi_1(x_1/y) \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \neg\varphi_1(x_1/y)(y/x_1) \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \neg\varphi_1(x_1/x_1) \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \neg\varphi_1 \\ \Longrightarrow\ & \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash \forall x_1 \neg\varphi_1. \end{aligned}$$

Setze $\beta : \exists x_1 \varphi_1$, dann $\Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\} \vdash (\beta \wedge \neg\beta)$, d.h. $\Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_2, ..., \sigma_m\}$ ist widerspruchsvoll. Nach m Schritten erhalten wir dann, dass bereits Σ_{n-1} widerspruchsvoll ist, ein Widerspruch. □

Bemerkung 4.7.

Wir haben bisher erreicht:

$$\underbrace{\Sigma}_{\text{wfr.}} = \Sigma_0 \subseteq ... \subseteq \underbrace{\Sigma_{n-1}}_{\text{wfr.}} \underbrace{\subseteq}_{\overset{\text{gez.}}{\Longrightarrow}} \underbrace{\Sigma_n}_{\text{wfr.}} \subseteq ... \subseteq \Sigma' = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}_{\ni \exists x\varphi \to \varphi(x/t) \in L'} \Sigma_n \text{ widerspruchsfrei} \qquad \Diamond$$

Satz 4.8.

Zu $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ widerspruchsfrei gibt es ein maximales, widerspruchsfreies $\Sigma^* \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ mit $\Sigma \subseteq \Sigma^*$.

Beweis.

Sei $\mathcal{M} = \{\Sigma^\# \subseteq \mathrm{Aus}(L) \mid \Sigma \subseteq \Sigma^\# \text{ widerspruchsfrei}\}$. Dann ist $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{M}$. Sei $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ eine Kette, d.h. $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{M}' \Rightarrow \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ oder $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$. Dann $\Sigma' = \bigcup \Sigma^\# \in \mathcal{M}$, also widerspruchsfrei, denn gäbe es $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ mit $\Sigma' \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha)$, dann gäbe es einen Beweis $\sigma_1, ..., \sigma_n, (\alpha \wedge \neg\alpha)$ in Σ'. Gelte Œ $\sigma_1 \in \Sigma_1, ..., \sigma_n \in \Sigma_n$, dann $\sigma_1, ..., \sigma_n \in \Sigma_n$, da $\mathcal{M}'$ Kette, im Widerspruch zu Σ_n widerspruchsfrei. □

Satz 4.9.

Ist $\mathrm{Fml}(L')$ abzählbar, so lässt sich dieses Σ^* effektiv gewinnen.

Beweis.

Seien $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung aller Aussagen von L' und $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L')$ widerspruchsfrei (insbesondere Σ abzählbar). Setze $\Sigma_0 = \Sigma$ und $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$, falls $\Sigma_n \cup \{\varphi_n\}$ widerspruchsvoll ist, und $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\varphi_n\}$ sonst. Dann ist $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ widerspruchsfrei. Sei $\varphi \in \mathrm{Aus}(L)$ mit $\Sigma^* \cup \{\varphi\}$ widerspruchsfrei, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi = \varphi_n$, also $\Sigma_n \cup \{\varphi_n\}$ widerspruchsfrei, d.h. $\Sigma_n \cup \{\varphi_n\} = \Sigma_{n+1} \subseteq \Sigma^*$, also $\varphi \in \Sigma^*$. □

Satz 4.10.

Σ^* ist deduktiv abgeschlossen, d.h. es gilt $\Sigma^* \vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma^*$.

Beweis.

Die Richtung $\Leftarrow$ ist trivial. Zu $\Rightarrow$: $\Sigma^* \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsfrei, denn angenommen, $\Sigma^* \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, dann $\Sigma^* \vdash (\varphi \to \neg\varphi)$ nach Deduktionstheorem; mit der Tautologie $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ und Modus Ponens folgt dann $\Sigma^* \vdash \neg\varphi$ im Widerspruch zu Σ^* widerspruchsfrei. Also mit Maximalität $\Sigma^* \cup \{\varphi\} = \Sigma^*$, d.h. $\varphi \in \Sigma^*$. □

Bemerkung 4.11.

Bezeichne CT die Menge der konstanten (d.h. variablenfreien) Terme in L'. Dann definiert

$$t' \sim t'' \Longleftrightarrow \Sigma^* \vdash t' \doteq t''$$

eine Äquivalenzrelation auf CT:

1. Es gilt $t \sim t$, da $\Sigma^* \vdash t \doteq t$.
2. Ist $t' \sim t''$, dann $\Sigma^* \vdash t' \doteq t''$. Dann auch $\Sigma^* \vdash t'' \doteq t'$, also $t'' \sim t'$.
3. Sind $t \sim t'$ und $t' \sim t''$, dann $\Sigma^* \vdash t \doteq t'$ und $\Sigma^* \vdash t' \doteq t''$, also auch $\Sigma^* \vdash t \doteq t''$, d.h. $t \sim t''$.

Wir setzen $[t] = \{t' \mid t \sim t'\}$ und $A = \{[t] \mid t \in \mathrm{CT}\}$. ◊

Definition 4.12.

1. Zu $R_i(v_1, ..., v_{\lambda(i)})$ definieren wir auf $A^{\lambda(i)}$ eine Relation $\mathcal{R}_i$ durch
$$\mathcal{R}_i([t_1], ..., [t_{\lambda(i)}]) \Longleftrightarrow \Sigma^* \vdash R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)}).$$
2. Zu $f_j(t_1, ..., t_{\mu(i)})$ definieren wir eine Funktion $\mathcal{F}_j : A^{\mu(j)} \to A$ durch
$$\mathcal{F}_j([t_1], ..., [t_{\mu(j)}]) = [f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)})].$$

Bemerkung 4.13.

1. $\mathcal{R}_i$ ist unabhändig vom Vertreter: Seien $t_1 \sim t'_1, ..., t_{\lambda(i)} \sim t'_{\lambda(i)}$. Ein Beweis für $R_1(t_1, ..., t_{\lambda(i)})$ lässt sich dann zu einem Beweis für $R_1(t_1, ..., t_{\lambda(i)})$ ergänzen via

$$\ldots \qquad R_1(t_1, ..., t_{\lambda(i)}) \qquad t_1 \doteq t'_1 \qquad R_i(t'_1, t_2, ..., t_{\lambda(i)}) \qquad t_2 \doteq t'_2 \qquad \ldots$$

2. Entsprechend ist auch $\mathcal{F}_j$ vertreterunabhängig: Seien $t_1 \sim t'_1, ..., t_{\mu(j)} \sim t'_{\mu(j)}$. Wir zeigen, dass dann $\Sigma^* \vdash f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)}) \doteq f_j(t'_1, ..., t'_{\mu(j)})$ erfüllt ist.

$$\ldots \quad f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)} \doteq f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)} \quad t_1 \doteq t'_1 \quad f_j(t_1, t_2, ..., t_{\mu(j)}) \doteq f_j(t'_1, t_2 ..., t_{\mu(j)}) \quad t_2 \doteq t'_2 \quad \ldots \quad \Diamond$$

Lemma 4.14.

$\Sigma^* \subseteq \text{Aus}(L')$ sei maximal widerspruchsfrei und es gelte $\exists x\varphi \to \varphi(x/c) \in \Sigma^*$. Dann gelten für alle Aussagen $\alpha, \beta, \forall x\varphi \in \text{Aus}(L')$ und alle konstanten Terme $t \in \text{CT}$:

1. $\neg\alpha \in \Sigma^* \iff \alpha \notin \Sigma^*$.
2. $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^* \iff \alpha \in \Sigma^*$ und $\beta \in \Sigma^*$.
3. $\forall x\varphi \in \Sigma^* \iff \varphi(x/t) \in \Sigma^*$.

Beweis.

1.$\Rightarrow$ Klar, da Σ^* widerspruchsfrei ist.

$\Leftarrow$ Wegen $\alpha \notin \Sigma^*$ gilt $\Sigma^* \nvdash \alpha$, d.h. $\Sigma^* \cup \{\neg\alpha\}$ ist widerspruchsfrei. Maximalität $\Rightarrow \neg\alpha \in \Sigma^*$.

2.$\Rightarrow$ Wegen $\alpha \wedge \beta \in \Sigma^*$ gilt $\Sigma^* \vdash (\alpha \wedge \beta)$, d.h. $\Sigma^* \vdash \alpha$ und $\Sigma^* \vdash \beta$ und damit $\alpha \in \Sigma^*$ und $\beta \in \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ Aus $\alpha \in \Sigma^*$ und $\beta \in \Sigma^*$ folgen $\Sigma^* \vdash \alpha$ und $\Sigma^* \vdash \beta$, d.h. $\Sigma^* \vdash (\alpha \wedge \beta)$ und somit $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^*$.

3.$\Rightarrow$ Es gilt $\forall x\varphi \in \Sigma^*$, d.h. $\Sigma^* \vdash \forall x\varphi$ und somit $\Sigma^* \vdash \varphi(x/t)$ für alle $t \in \text{CT}$, also $\varphi(x/t) \in \Sigma^*$ für alle $t \in \text{CT}$.

$\Leftarrow$ Wegen $\forall x\varphi \notin \Sigma^*$ ist nach (1) $\neg\forall x\varphi \in \Sigma^*$. Es gilt $\exists x\neg\varphi \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
& \Sigma^* \vdash \neg\forall x\varphi && (\text{da } \neg\forall x\varphi \in \Sigma^*) \\
& \Sigma^* \vdash (\neg\neg\varphi \to \varphi) && (\text{Tautologie}) \\
\Longrightarrow \quad & \Sigma^* \cup \{\neg\neg\varphi\} \to \varphi && \\
\Longrightarrow \quad & \Sigma^* \cup \{\forall x\neg\neg\varphi\} \vdash \forall x\varphi && \\
\Longrightarrow \quad & \Sigma^* \vdash (\forall x\neg\neg\varphi \to \forall x\varphi) && (\text{Deduktionstheorem}) \\
\Longrightarrow \quad & \Sigma^* \vdash (\neg\forall x\varphi \to \neg\forall x\neg\neg\varphi) && (\text{Kontraposition}) \\
\Longrightarrow \quad & \Sigma^* \vdash (\neg\forall x\varphi \to \exists x\neg\varphi) && \\
\Longrightarrow \quad & \Sigma^* \vdash \exists x\neg\varphi && (\text{Modus Ponens})
\end{aligned}$$

Also $\Sigma^* \vdash \neg\varphi(x/c)$ für ein gewisses $c \in \text{CT}$, d.h. $\varphi(x/c) \notin \Sigma^*$ nach (1). $\square$

5. Semantik erster Stufe

Definition 5.1.

Seien $L = (\lambda, \mu, K)$ eine formale Sprache mit Relationszeichen R_i $(i \in I)$, Funktionszeichen f_j $(j \in J)$, Konstanten c_k $(k \in K)$ und $A \neq \emptyset$.

$$\mathcal{A} = \langle A; (R_i^{\mathcal{A}})_{i \in I}; (f_j^{\mathcal{A}})_{j \in J}; (c_k^{\mathcal{A}})_{k \in K} \rangle$$

heißt dann eine mathematische L-Struktur, wobei $R_i^{\mathcal{A}}$ eine $\lambda(i)$-stellige Relation auf A ist, $f_j^{\mathcal{A}}$ eine $\mu(j)$-stellige Funktion $A^{\mu(j)} \to A$ und $c_k^{\mathcal{A}} \in A$ für alle $i \in I, j \in J, k \in K$.

Beispiel 5.2.

Der geordnete Körper der reellen Zahlen $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}; \leq^{\mathbb{R}}; +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}; 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}} \rangle$ mit $L = (\leq; +, \cdot, -; 0, 1)$. ◊

Definition 5.3.

Eine Belegung in $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $h : \mathrm{Vbl} \to A$.

Wir definieren rekursiv über den Termaufbau den Wert $t^{\mathcal{A}}[h]$ eines Terms t bei der Belegung h in $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{A}}[h] &= h(v) \\ c_k^{\mathcal{A}}[h] &= c_k^{\mathcal{A}} \\ f_j^{\mathcal{A}}(t_1, ..., t_{\mu(j)})[h] &= f_j^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h], ..., t_{\mu(j)}^{\mathcal{A}}[h]). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.4.

1. Wir setzen
$$h\binom{x}{a}(v) = \begin{cases} h(v) & \text{für } v \neq x, \\ a & \text{für } v = x \end{cases}$$
wobei $a \in A$ und $x \in \mathrm{Vbl}$. Dann ist $h\binom{x}{a} : \mathrm{Vbl} \to A$ wieder eine Belegung.
2. Gilt eine Formel φ bei einer Belegung h in $\mathcal{A}$, dann setzen wir $\mathcal{A} \models \varphi[h]$.
3. Gilt $\varphi[h]$ nicht in $\mathcal{A}$, so setzen wir $\mathcal{A} \not\models \varphi[h]$. ◊

Definition 5.5.

Wir definieren rekursiv die Gültigkeit einer Formel φ bei einer Belegung h in $\mathcal{A}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (t_1 \doteq t_2)[h] &\iff t_1^{\mathcal{A}}[h] = t_2^{\mathcal{A}}[h] \\ \mathcal{A} \models (R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)}))[h] &\iff R_i^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h], ..., t_{\lambda(i)}^{\mathcal{A}}[h]) \\ \mathcal{A} \models (\neg\varphi)[h] &\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[h] \\ \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[h] &\iff \mathcal{A} \models \varphi[h] \text{ und } \mathcal{A} \models \psi[h] \\ \mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[h] &\iff \mathcal{A} \models \varphi[h\tbinom{x}{a}] \text{ für alle } a \in A. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.6.

Wir setzen $\mathcal{A} \models \varphi$, falls für alle Belegungen h gilt $\mathcal{A} \models \varphi[h]$.

Für unsere Abkürzungen $\vee, \to, \leftrightarrow, \exists$ gelten damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\alpha \vee \beta)[h] &\iff \mathcal{A} \models \alpha[h] \text{ oder } \mathcal{A} \models \beta[h] \\ \mathcal{A} \models (\alpha \to \beta)[h] &\iff \mathcal{A} \models \alpha[h] \Rightarrow \mathcal{A} \models \beta[h] \\ \mathcal{A} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[h] &\iff \mathcal{A} \models \alpha[h] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta[h] \\ \mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[h] &\iff \mathcal{A} \models \varphi[h\tbinom{x}{a}] \text{ für ein } a \in A. \end{aligned}$$ ◊

Beispiel 5.7.

Sei h eine Belegung in $\mathcal{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} \models \exists v_0 (v_1 < v_0 \wedge v_0 < v_2)[h] \\ \iff & \mathcal{R} \models (v_1 < v_0 \wedge v_0 < v_2)[h\tbinom{v_0}{a}] \text{ für ein } a \in \mathbb{R} \\ \iff & \mathcal{R} \models (v_1 < v_0)[h\tbinom{v_0}{a}] \text{ und } \mathcal{R} \models (v_0 < v_2)[h\tbinom{v_0}{a}] \text{ für ein } a \in \mathbb{R} \\ \iff & v_1[h\tbinom{v_0}{a}] <^{\mathbb{R}} v_0[h\tbinom{v_0}{a}] \text{ und } v_0[h\tbinom{v_0}{a}] <^{\mathbb{R}} v_1[h\tbinom{v_0}{a}] \text{ für ein } a \in \mathbb{R} \\ \iff & h(v_1) <^{\mathbb{R}} a \text{ und } a <^{\mathbb{R}} h(v_2) \text{ für ein } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$ ◊

Lemma 5.8.

Seien $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und h, h' Belegungen in $\mathcal{A}$.

1. Stimmen h' und h'' auf den Variablen von t überein, dann gilt $t^{\mathcal{A}}[h'] = t^{\mathcal{A}}[h'']$.
2. Stimmen h' und h'' auf den freien Variablen von φ überein, dann gilt $\mathcal{A} \models \varphi[h'] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[h'']$.

Beweis.

1. Wir schließen induktiv über den Termaufbau:

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{A}}[h'] &= h'(v) \\ &= h''(v) \\ &= v^{\mathcal{A}}[h''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_k^{\mathcal{A}}[h'] &= c_k^{\mathcal{A}} \\ &= c_k^{\mathcal{A}}[h''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)})^{\mathcal{A}}[h'] &= f_j^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h'], ..., t_{\mu(j)}^{\mathcal{A}}[h']) \\ &= f_j^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h''], ..., t_{\mu(j)}^{\mathcal{A}}[h'']) \\ &= f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)})^{\mathcal{A}}[h''] \end{aligned}$$

2. Wir schließen unter Benutzung von (1) induktiv über den Formelaufbau:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (t_1 \doteq t_2)[h'] &\iff t_1^{\mathcal{A}}[h'] = t_2\mathcal{A}[h'] \\ &\iff t_a^{\mathcal{A}}[h''] = t_2^{\mathcal{A}}[h''] \\ &\iff \mathcal{A} \models (t_1 \doteq t_2)[h''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)}) &\iff R_i^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h'], ..., t_{\lambda(i)}^{\mathcal{A}}[h']) \\ &\iff R_i^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h''], ..., t_{\lambda(i)}^{\mathcal{A}}[h'']) \\ &\iff \mathcal{A} \models R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)})[h''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\neg\varphi)[h'] &\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[h'] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[h''] \\ &\iff \mathcal{A} \models (\neg\varphi)[h''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[h'] &\iff \mathcal{A} \models \varphi[h'] \text{ und } \mathcal{A} \models \psi[h'] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[h''] \text{ und } \mathcal{A} \models \psi[h''] \\ &\iff \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[h''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[h'] &\iff \mathcal{A} \models \varphi[h'(\tbinom{x}{a})] \text{ für alle } a \in A \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[h''(\tbinom{x}{a})] \text{ für alle } a \in A \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[h''] \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.9.

1. Sei $\alpha \in \text{Aus}(L)$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \alpha[h'] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha[h'']$, also $\mathcal{A} \models \alpha[h]$ für beliebige Belegung h.
2. Seien $\alpha \in \text{Aus}(L)$ und h eine Belegung. Gilt $\mathcal{A} \models \alpha[h]$, dann schreiben wir $\mathcal{A} \models \alpha$. ◊

Satz 5.10.

Sei $\Sigma \subseteq \Sigma^* \subseteq \text{Aus}(L)$ (Σ^* maximal widerspruchsfrei) und $\mathcal{A} = \langle {}^{\text{CT}}/_{\sim}, (\mathcal{R}_i)_{i \in I}, (\mathcal{F}_j)_{j \in J}, (c_k^{\sim})_{k \in K} \rangle$.

Seien $\alpha \in \text{Aus}(L)$ und h eine Belegung in $\mathcal{A}$. Dann gilt $\alpha \in \Sigma^* \iff \mathcal{A} \models \alpha[h]$.

Beweis.

Wir schließen induktiv über den Formelaufbau: Gelte die Behauptung für α, β.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models (t_1 \doteq t_2)[h] &\iff t_1^{\mathcal{A}}[h] = t_2^{\mathcal{A}}[h] \\
&\iff t_1^{\sim} = t_2^{\sim} \\
&\iff t_1 \doteq t_2 \in \Sigma^* \\[1ex]
\mathcal{A} \models R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)})[h] &\iff R_i^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h], ..., t_{\lambda(i)}^{\mathcal{A}}[h]) \\
&\iff \mathcal{R}_i(t_1^{\sim}, ..., t_{\lambda(i)}^{\sim}) \\
&\iff R_i(t_1, ..., t_{\lambda(i)}) \in \Sigma^* \\[1ex]
\mathcal{A} \models (\neg\alpha)[h] &\iff \mathcal{A} \not\models \alpha[h] \\
&\iff \alpha \notin \Sigma^* \\
&\iff (\neg\alpha) \in \Sigma^* \\[1ex]
\mathcal{A} \models (\alpha \wedge \beta)[h] &\iff \mathcal{A} \models \alpha[h] \text{ und } \mathcal{A} \models \beta[h] \\
&\iff \alpha \in \Sigma^* \text{ und } \beta \in \Sigma^* \\
&\iff (\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^* \\[1ex]
\mathcal{A} \models (\forall x \alpha)[h] &\iff \mathcal{A} \models \alpha[h(\tbinom{x}{a})] \text{ für alle } a \in A \\
&\iff \mathcal{A} \models \alpha[h(\tbinom{x}{t})] \text{ für alle } t \in \text{CT} \\
&\overset{\text{Üb.}}{\iff} \mathcal{A} \models \alpha(x/t)[h] \text{ für alle } t \in \text{CT} \\
&\iff \alpha(x/t) \in \Sigma^* \text{ für alle } t \in \text{CT} \\
&\iff \forall x \alpha \in \Sigma^*
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.11.

Nach Definition ist $\mathcal{R}_i = R_i^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{F}_j = f_j^{\mathcal{A}}$ und $c_k^{\sim} = c_k^{\mathcal{A}}$. Damit folgt, dass für alle $t \in \text{CT}$ und alle Belegungen h in $\mathcal{A}$ gilt $t^{\mathcal{A}}[h] = t^{\sim}$, denn

$$f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)})^{\mathcal{A}}[h] = f_j^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[h], ..., t_{\mu(j)}^{\mathcal{A}}[h]) = \mathcal{F}_j(t_1^{\sim}, ..., t_{\mu(j)}^{\sim}) = (f_j(t_1, ..., t_{\mu(j)}))^{\sim}.$$

◊

Definition 5.12.

Sei $\Sigma \subseteq \text{Aus}(L)$. Dann heißt $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ ($\mathcal{A} \models \Sigma$), falls $\mathcal{A} \models \sigma$ für alle $\sigma \in \Sigma$.

Bemerkung 5.13.

Gilt $\Sigma \nvdash \alpha$, dann ist $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ widerspruchsfrei, d.h. es gibt ein $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \beta$ für alle $\beta \in \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ, in dem α nicht gilt. ◊

Satz 5.14. (Gödelscher Vollständigkeitssatz)

Seien $\Sigma \subseteq \text{Aus}(L)$ und $\alpha \in \text{Aus}(L)$ mit $\Sigma \nvdash \alpha$. Dann gibt es eine L-Struktur $\mathcal{A}$, die Modell von Σ ist und in der α nicht gilt.

Bemerkung 5.15.

Gilt α in jedem Modell $\mathcal{A}$ von Σ, dann ist α aus Σ beweisbar: $\Sigma \models \alpha \Longrightarrow \Sigma \vdash \alpha$. ◊

Satz 5.16. (Korrektheitssatz)

Seien $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ und $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ mit $\Sigma \vdash \alpha$. Dann gilt α in jedem Modell von Σ.

Beweis.

Seien $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ und $\varphi_1, ..., \varphi_n$ ein Beweis aus Σ. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \varphi_n$ per Induktion über n.

Zum Induktionsanfang $n = 1$:

1. Liegt φ_1 in Σ, dann nach Vor. $\mathcal{A} \models \varphi_1$.
2. Ist φ_1 Beispiel einer aussagenlogischen Tautologie $\alpha(A_1, ..., A_m)$, d.h. $\varphi_1 : \alpha(\psi_1, ..., \psi_m)$ mit L-Formeln $\psi_1, ..., \psi_m$, so ist $\alpha(\mathcal{A} \models \psi_1[h], ..., \mathcal{A} \models \psi_m[h])$ wahr für beliebige Belegung h, d.h. $\mathcal{A} \models \alpha(\psi_1, ..., \psi_m)[h]$ und damit $\mathcal{A} \models \varphi_1$.
3. Analog zeigt man $\mathcal{A} \models \varphi_1$ für φ_1 identitätslogisches Axiom.
4. Ist φ_1 von der Gestalt $(\forall x(\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \forall x \beta)$ mit $x \notin \mathrm{Fr}(\alpha)$, dann ist zu zeigen, dass für alle Belegungen h in $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{A} \models (\alpha \to \beta)[h(\frac{x}{a})]$ für alle $a \in A$ folgt, dass $(\mathcal{A} \models \alpha[h] \Rightarrow \mathcal{A} \models \beta[h(\frac{x}{a})]$ für alle $a \in A)$. Seien also $a \in A$ und $\mathcal{A} \models \alpha[h]$. Dann $\mathcal{A} \models \alpha[h(\frac{x}{a})]$, da $x \notin \mathrm{Fr}(\alpha)$ und damit nach Vor. $\mathcal{A} \models \beta[h(\frac{x}{a})]$.
5. Gilt $\varphi_1 : \forall x \alpha \to \alpha(x/t)$ mit t frei für x in α, dann gilt $\mathcal{A} \models \alpha[h(\frac{x}{a})]$ mit $a = t^{\mathcal{A}}[h]$, also $\mathcal{A} \models \alpha[h(\frac{x}{a})]$ für alle $a \in A$.

Zum Induktionsschritt $1, ..., n-1 \to n$:

1. Gilt $\varphi_n \in \Sigma$, dann $\mathcal{A} \models \varphi_n$ nach Vor.
2. Ist φ_n ein logisches Axiom, dann $\mathcal{A} \models \varphi_n$ analog wie für φ_1.
3. Ist φ_n durch Modus Ponens entstanden, dann gibt es $i, j < n$ mit $\varphi_j : (\varphi_i \to \varphi_n)$. Nach Induktionsannahme gilt dann für jede Belegung h, dass $\mathcal{A} \models (\varphi_i \to \varphi_n)[h]$ und $\mathcal{A} \models \varphi_i[h]$, also auch $\mathcal{A} \models \varphi_n$.
4. Ist φ_n durch die $(\forall)$-Regel entstanden, dann gibt es $i < n$ mit $\varphi_n : \forall x \varphi_i$ und es gilt $\mathcal{A} \models \varphi_i[h]$ für alle Belegungen h in $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi_i[h(\frac{x}{a})]$ für alle $a \in A \Rightarrow \mathcal{A} \models \forall x \varphi_i[h]$. □

Bemerkung 5.17.

Es gelten also:

1. $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \models \varphi$.
2. $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ ist widerspruchsfrei $\Longleftrightarrow$ Σ besitzt ein Modell. ◊

Satz 5.18. (Endlichkeitssatz)

$\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ besitzt ein Modell $\Longleftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von Σ besitzt ein Modell.

Beweis.

“$\Rightarrow$” ist trivial. Zur “$\Leftarrow$”: Hätte Σ kein Modell, dann wäre Σ widerspruchsvoll, d.h. es gäbe $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ mit $\Sigma \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha)$. Dann gäbe es $\sigma_1, ..., \sigma_m \in \Sigma$ mit $\Sigma' = \{\sigma_1, ..., \sigma_m\} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha)$, also $\mathcal{A} \models \Sigma'$ und damit $\mathcal{A} \models (\alpha \wedge \neg\alpha)$, ein Widerspruch. □

6. Axiomatisierung einiger mathematischer Theorien

Definition 6.1.

$\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ heißt vollständig, falls für alle $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ gilt $\Sigma \vdash \alpha$ oder $\Sigma \vdash \neg\alpha$.

Beispiel 6.2.

1. Σ^* ist vollständig, denn $\Sigma^* \nvdash \alpha \Rightarrow \Sigma^* \vdash \neg\alpha$.
2. Seien $L = (\cdot, 1)$ und Σ die Menge der Gruppenaxiome. Σ ist nicht vollständig, denn für die Aussage $\alpha : \forall xy(x \cdot y \doteq y \cdot x)$ gilt $\Sigma \nvdash \alpha$, da $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ nicht kommutativ, und $\Sigma \nvdash \neg\alpha$, da $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ kommutativ.
3. Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Dann ist $\Sigma = \{\alpha \in \mathrm{Aus}(L) \mid \mathcal{A} \models \alpha\}$ vollständig, denn $\mathcal{A} \models \alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha$ und $\mathcal{A} \not\models \alpha \Rightarrow \mathcal{A} \models \neg\alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \neg\alpha$. ◊

Bemerkung 6.3.

Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Wir setzen $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \mathrm{Aus}(L) \mid \mathcal{A} \models \alpha\}$. ◊

Definition 6.4.

$\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ heißt deduktiv abgeschlossen, falls für alle $\alpha \in \mathrm{Aus}(L)$ gilt $\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in \Sigma$.

$T \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ heißt eine L-Theorie, falls T widerspruchsfrei und deduktiv abgeschlossen ist.

$\mathrm{Ded}(\Sigma) = \{\alpha \in \mathrm{Aus}(L) \mid \Sigma \vdash \alpha\}$ heißt der deduktive Abschluss von Σ.

Bemerkung 6.5.

$\mathrm{Ded}(\Sigma)$ ist deduktiv abgeschlossen. ◊

Satz 6.6.

Sind $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ vollständig und $\mathcal{A} \models \Sigma$, dann ist $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ded}(\Sigma)$.

Beweis.

Klar ist: $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Ded}(\Sigma)$. Umgekehrt gilt $\alpha \notin \mathrm{Ded}(\Sigma) \Rightarrow \Sigma \nvdash$. Wegen der Vollständigkeit folgt $\Sigma \vdash \neg\alpha$; da $\mathcal{A}$ Modell ist, also $\mathcal{A} \models \neg\alpha \Rightarrow \alpha \notin \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. □

Definition 6.7.

Seien L eine formale Sprache und M eine nicht leere Klasse von L-Strukturen.

Wir nennen $\mathrm{Th}(M) = \{\alpha \in \mathrm{Aus}(L) \mid \mathcal{A} \models \alpha \text{ für alle } \mathcal{A} \in M\}$ die L-Theorie von M.

$\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ heißt ein Axiomensystem für $\mathrm{Th}(M)$, falls $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Ded}(\Sigma)$.

Bemerkung 6.8.

Es gelten:

1. $\mathrm{Th}(M)$ ist widerspruchsfrei und deduktiv abgeschlossen.
2. Jede L-Theorie T ist L-Theorie der Klasse $M = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models T\}$. ◊

Definition 6.9.

Seien $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$. Gilt $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ded}(\Sigma)$, dann heißt Σ eine vollständige Axiomatisierung von $\mathcal{A}$.

Beispiel 6.10.

1. Zu $L = (\leq; +, \cdot, -; 0, 1)$ betrachte $\mathcal{R} = (\mathbb{R}; \leq^{\mathbb{R}}; +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}; 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}})$. Dann gilt $\mathrm{Th}(\mathcal{R}) = \mathrm{Ded}(\Sigma(rcf))$, wobei $\Sigma(rcf)$ die Menge der Axiome für reell abgeschlossene Körper bezeichnet.
2. Für $\mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Th}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ded}(\Sigma(acf) \cup \{\mathrm{char}\ 0\})$, wobei $\Sigma(acf)$ die Menge der Axiome für algebraisch abgeschlossene Körper bezeichnet. ◊

Definition 6.11.

$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } L\text{-Struktur und } \mathcal{A} \models \Sigma\}$ heißt die Modellklasse von Σ.

Bemerkung 6.12.

Ist $M = \{\mathcal{A}\}$, dann $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. ◊

Definition 6.13.

$M \subseteq \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ ist L-Struktur$\}$ heißt axiomatisierbar, falls $M = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ für ein $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$.

Beispiel 6.14.

Für die folgenden Strukturen $\mathcal{A}$ suchen wir ein $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ mit $\mathrm{Ded}(\Sigma) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$. Dann ist $\Sigma_O = (O_1, ..., O_5)$ mit

   $O_1:\ \forall x(\neg x < x)$;
   $O_2:\ \forall xyz((x < y \wedge y < z) \to x < z)$;
   $O_3:\ \forall xy(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$;
   $O_4:\ \forall xy(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$;
   $O_5:\ \forall x \exists yz(y < x \wedge x < z)$

   eine vollständige Axiomatisierung von $\mathcal{A}$. Modelle für Σ_O sind z.B. $\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ und $\langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$.

   Dagegen sind $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle$ und $\langle \mathbb{Z}, <^{\mathbb{Z}} \rangle$ keine Modelle für Σ_O.

2. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}} \rangle$. Dann ist $\Sigma_G = \{G_1, ..., G_4\} \cup \{G_5^n, G_6^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit

   $G_1:\ \forall xyz(x + y) + z \doteq x + (y + z)$;
   $G_2:\ \forall x(x + 0 \doteq x)$;
   $G_3:\ \forall x \exists y(x + y \doteq 0)$;
   $G_4:\ \forall xy(x + y \doteq y + x)$;
   $G_5^n:\ \forall x(nx \doteq 0 \to x \doteq 0)$;
   $G_6^n:\ \forall x \exists y(ny \doteq x)$

   eine vollständige Axiomatisierung von $\mathcal{A}$. G_5^n wird als Torsionsfreiheit bezeichnet; G_6^n nennt man Divisibilität.

   Modelle für Σ_G sind z.B. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$, degegen wieder nicht $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

3. Für $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}} \rangle$ ist $\Sigma = \Sigma_O \cup \Sigma_G \cup \{\forall xyz(x < y \to x + z < y + z)\}$ eine vollständige Axiomatisierung. G_5^n ist dabei überflüssig. Modelle sind wieder $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.

4. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}} \rangle$ wird durch das Axiomensystem der reell abgeschlossenen Körper $\Sigma(rcf)$, gegeben durch

   $K_0:\ 0 \neq 1$;
   $K_1:\ \forall xyz(x + (y + z) \doteq (x + y) + z)$;
   $K_2:\ \forall x(x + 0 \doteq x)$;
   $K_3:\ \forall x(x + (-x) \doteq 0)$;
   $K_4:\ \forall xyz(x \cdot (y \cdot z) \doteq x \cdot (y \cdot z))$;
   $K_5:\ \forall x(x \cdot 1 \doteq x)$;
   $K_6:\ \forall x \exists y(x \doteq 0 \vee x \cdot y \doteq 1)$;
   $K_7:\ \forall xy(x \cdot y \doteq y \cdot x)$;
   $K_8:\ \forall xyz((x + y) \cdot z \doteq x \cdot z + y \cdot z)$;

   $O_1:\ \forall x(\neg x < x)$;
   $O_2:\ \forall xyz((x < y \wedge y < z) \to x < z)$;
   $O_3:\ \forall xy(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$;
   $O_4:\ \forall xy(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$;
   $O_5:\ \forall x \exists yz(y < x \wedge x < z)$;

   $K_1^O:\ \forall xyz(x < y \to x + z < y + z)$;
   $K_2^O:\ \forall xy((0 < x \wedge 0 < y) \to 0 < x \cdot y)$;
   $K^R:\ \forall x \exists y(x < 0 \vee x \doteq y^2)$;
   $K_{2n}^R:\ \forall x_0 ... x_{2n} \exists y(y^{2n+1} + x_{2n} \cdot y^{2n} + ... + x_1 \cdot y + x_0 \doteq 0)$

   vollständig axiomatisiert. Die Kommutativität der Addition lässt sich dabei aus den Axiomen folgern.

5. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{C}, +^{\mathbb{C}}, \cdot^{\mathbb{C}}, -^{\mathbb{C}}, 0^{\mathbb{C}}, 1^{\mathbb{C}} \rangle$ wird durch das Axiomensystem der algebraisch abgeschlossenen Körper $\Sigma(acf)$, bestehend aus den Körperaxiomen $K_0, ..., K_8$ zusammen mit

$$\forall a_0, ..., a_n \exists x(x^{n+1} + a_n \cdot x^n + ... + a_0 \doteq 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

axiomatisiert.

Allerding ist $\Sigma(acf)$ nicht vollständig: $\Sigma(acf) \nvDash (x + x + x \doteq 0)$ und $\Sigma(acf) \nvDash \neg(x + x + x \doteq 0)$.

Aber $\mathcal{A}$ wird durch $\Sigma(acf) \cup \{\neg\chi_p \mid p \text{ prim}\}$ vollständig axiomatisiert, wobei $\chi_p : \forall x(\sum_{k=1}^{p} x \doteq 0)$. Ebenso ist $\Sigma(acf) \cup \{\chi_p\}$ für p prim eine vollständige Axiomatisierung von $\overline{\mathbb{F}}_p$.

6. Für $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}} \rangle$ ist das Peano-Axiomensystem Σ_P, gebeben durch

$P_1 :\ \forall x(x + 1 \neq 0);$
$P_2 :\ \forall xy(x + 1 \doteq y + 1) \to x \doteq y;$
$P_3 :\ \forall x(x + 0 \doteq x);$
$P_4 :\ \forall xy(x + (y + 1) \doteq (x + y) + 1);$
$P_5 :\ \forall x(x \cdot 0 \doteq 0);$
$P_6 :\ \forall xy(x \cdot (y + 1) \doteq x \cdot y + x);$
$P_\varphi :\ (\varphi(0) \wedge \forall x\varphi(x + 1)) \to \forall x\varphi(x)\ (\varphi \in \mathrm{Fml}(L))$

eine Axiomatisierung. Diese ist aber nicht vollständig. ◊

7. Vollständigkeit von Axiomensystemen

Definition 7.1.

Seien L eine Sprache und $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei L-Strukturen. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ heißen elementar äquivalent (in Zeichen: $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$), falls $\forall \alpha \in \mathrm{Aus}(L) : \mathcal{A}_1 \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{A}_2 \models \alpha$.

Bemerkung 7.2.

1. $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_3 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_3$.
2. $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ ist vollständig $\Leftrightarrow \forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \models \Sigma : \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$.
3. $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_2)$.
4. Gelten $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}' \models \Sigma$, dann $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$. ◊

Definition 7.3.

Zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ heißen isomorph (in Zeichen: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es eine Abbildung $\Phi : A \to B$ gibt, so dass für alle R, f, c gelten:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(\Phi(a_1), ..., \Phi(a_n)); \quad \Phi(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\Phi(a_1), ..., \Phi(a_n)); \quad \Phi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

Wir sagen, eine L-Struktur $\mathcal{A}$ lässt sich bis auf Isomorphie durch ein Axiomensystem Σ kennzeichnen, wenn für alle L-Strukturen $\mathcal{A}'$ gilt $\mathcal{A}' \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{A}' \cong \mathcal{A}$.

Bemerkung 7.4.

Es gilt: $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$. ◊

Satz 7.5.

Seien $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ und A unendlich. Dann gibt es Modelle von Σ von beliebig großer Mächtigkeit.

Beweis.

Sei M eine Indexmenge mit $M \cap K = \emptyset$. Wir erweitern K um die Konstanten c_m $(m \in M)$ und definieren damit $\Sigma_M = \Sigma \cup \{c_\nu \neq c_\mu \mid \nu, \mu \in M \text{ mit } \nu \neq \mu\}$. Dann hat jede endliche Teilmenge von Σ_M ein Modell, nach dem Endlichkeitssatz also auch Σ_M.

Denn: Für $\Sigma \cup \{c_{\nu_i} \neq c_{\mu_i} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ist $\mathcal{A}^* = \langle A, ..., (c_{\nu_i}^{\mathcal{A}})_{1 \leq i \leq n} \rangle$ mit $c_{\nu_i}^{\mathcal{A}} \neq c_{\nu_j}^{\mathcal{A}}$ für $i \neq j$ ein Modell.□

Korollar 7.6.

Keine unendliche L-Struktur $\mathcal{A}$ lässt sich durch ein Axiomensystem bis auf Isomorphie kennzeichnen.

Bemerkung 7.7. (Kardinalzahlen)

Wir betrachte $0, 1, 2, ..., n, n+1, ..., \omega = \aleph_0, \aleph_1, ..., \aleph_\omega, ...$. Dazu ordne die Abbildung card jeder Menge eine Kardinalzahl zu. Es gelte $\mathrm{card}(A) = \#A$ für endliche Mengen und $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ ($\aleph$ „Aleph").

Ab jetzt betrachten wir nur noch unendliche Mengen. Es gelten:

1. $\mathrm{card}(M_1 \cup M_2) = \max\{\mathrm{card}(M_1), \mathrm{card}(M_2)\} = \mathrm{card}(M_1 \times M_2)$. Insbesondere $\mathrm{card}(M^n) = \mathrm{card}(M)$.
2. $\mathrm{card}(\wp(M)) > \mathrm{card}(M)$. Zum Beispiel ist $\mathrm{card}(\wp(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.
3. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (Spezielle Kontinuumshypothese).
4. $\sigma : M_1 \to M_2$ injektiv $\Rightarrow \mathrm{card}(M_1) \leq \mathrm{card}(M_2)$ bzw. $\sigma : M_1 \to M_2$ surjektiv $\Rightarrow \mathrm{card}(M_2) \leq \mathrm{card}(M_1)$.
5. Setze $M^{<\omega} = \{(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in M,\ n \in \mathbb{N}\}$. Dann $\mathrm{card}(M^{<\omega}) = \mathrm{card}(M)$.
6. Sei $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_i$ mit $\mathrm{card}(M_i) \leq \kappa$, dann auch $\mathrm{card}(M) \leq \kappa$. $\lozenge$

Bemerkung 7.8.

1. Sei $L = (\lambda, \mu, K)$ eine Sprache. Dann ist $\kappa_L = \max\{\mathrm{card}(I), \mathrm{card}(J), \mathrm{card}(K), \mathrm{card}(\mathbb{N})\}$ die Kardinalität dieser Sprache. Insbesondere gilt: Sind I, J, K endlich, dann ist $\kappa_L = \aleph_0$.
2. Es gilt $\mathrm{card}(\mathrm{Fml}(L)) = \mathrm{card}(\mathrm{Aus}(L)) = \mathrm{card}(\mathrm{Tm}(L)) = \mathrm{card}(L) = \kappa_L$. $\lozenge$

Satz 7.9.

Besitzt $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ ein Modell unendlicher Mächtigkeit, so auch jeder Mächtigkeit $\kappa > \kappa_L$.

Beweis.

Sei M eine Indexmenge der Kardinalität $\kappa > \kappa_L$. Betrachte wieder $\Sigma_M = \Sigma \cup \{c_\nu \neq c_\mu \mid \nu, \mu \in M,\ \nu \neq \mu\}$. Betrachte $L \subseteq L_M \subseteq L_M^*$ und dazu das Termmodell $\mathcal{A} = \{A, ..., (c_\nu^{\mathcal{A}})_{\nu \in M}\}$ (wobei $A = \mathrm{CT}/\sim$ mit $t_1 \sim t_2 :\Leftrightarrow t_1 \doteq t_2 \in \Sigma_M^* \subseteq \mathrm{Aus}(L_M^*)$). $\sigma : M \to A,\ \nu \mapsto c_\nu^{\mathcal{A}}$ ist injektiv, also $\kappa \leq \mathrm{card}(A)$.

Es gilt $\mathrm{card}(\mathrm{Aus}(L_M)) = \kappa_{L_M} = \max(\mathrm{card}(I), \mathrm{card}(J), \mathrm{card}(K \dot{\cup} M), \aleph_0) = \max(\kappa_L, \mathrm{card}(M)) = \kappa$. In der Kette $L_0 \subseteq L_1 \subseteq ...$ hat L_i stets so viele zusätzliche Konstanten, wie L_{i-1} Aussagen hat, also wegen $\mathrm{card}(L_0) = \kappa$ auch $\mathrm{card}(L_i) = \kappa$. Damit ist $\mathrm{card}(\mathrm{Tm}(L_M^*)) = \kappa = \mathrm{card}(\mathrm{CT})$ und da die Abbildung $\mathrm{CT} \to A$ mit $t \mapsto [t]_\sim$ surjektiv, folgt auch $\mathrm{card}(A) \leq \kappa$.

Insgesamt ergibt sich $\mathrm{card}(A) = \kappa$. Da $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ_M^* ist, gilt auch $\mathcal{A} \models \Sigma$. $\square$

Korollar 7.10.

Zu jeder L-Struktur $\mathcal{A}$ unendlicher Mächtigkeit und jedem $\kappa \geq \kappa_L$ gibt es eine L-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \kappa$ und $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$.

Beweis.

$\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ besitzt ein Modell unendlicher Mächtigkeit, nämlich $\mathcal{A}$ selber. Also existiert $\mathcal{B} \models \Sigma$ mit $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \kappa$, d.h. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. $\square$

Satz 7.11. (Vaught-Test)

$\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ habe nur unendliche Modelle und es gebe eine Kardinalzahl $\kappa \geq \kappa_L$, so dass alle Modelle von Σ der Kardinalität κ isomorph sind. Dann ist Σ vollständig.

Beweis.

Wissen: Σ ist vollständig $\Leftrightarrow$ je zwei Modelle von Σ sind elementar äquivalent und $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$. Hat Σ ein unendliches Modell, dann auch Modelle jeder Kardinalität $\kappa \geq \kappa_L$.

Setze Œ $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$, dann gilt $\mathcal{A}_1 \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}$. Wir zeigen: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$.

Es gibt Modelle $\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_2'$ von Σ mit $\mathrm{card}(\mathcal{A}_1') = \kappa = \mathrm{card}(\mathcal{A}_2')$ und $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_1'$, $\mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_2'$. Dann folgt wegen $\mathcal{A}_1' \cong \mathcal{A}_2' \Rightarrow \mathcal{A}_1' \equiv \mathcal{A}_2'$, dass $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$. □

Korollar 7.12.

Die Theorie Σ^1 der divisiblen, torsionsfreien, nicht trivialen, abelschen Gruppen ist vollständig.

Beweis.

$\langle G, +, 0\rangle$ ist unendlich und $\kappa_L = \aleph_0$. Gelte $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \models \Sigma^1$. Wir suchen $\mathcal{G}_1', \mathcal{G}_2'$ mit $\mathcal{G}_1 \equiv \mathcal{G}_1' \cong \mathcal{G}_2' \equiv \mathcal{G}_2$. Gelte $\mathcal{G}_1' \models \mathrm{Th}(\mathcal{G}_1)$ und $\mathcal{G}_2' \models \mathrm{Th}(\mathcal{G}_2)$. Wähle $\kappa > \aleph_0$.

Wir setzen wie üblich $ng = g + g + ... + g$, $-g = g'$ mit $g + g' = 0$, $\frac{1}{m}g = g''$ mit $mg'' = g$ (m eindeutig wegen Torsionsfreiheit) und $\frac{n}{m}g = n(\frac{1}{m}g)$. Dann werden G_1, G_2 zu $\mathbb{Q}$-Vektorräumen mit Mächtigkeit $\mathrm{card}(G_1) = \mathrm{card}(G_2) = \kappa$. Wir zeigen: $G_1 \cong G_2$ (als $\mathbb{Q}$-Vektorräume); dann auch $G_1 \cong G_2$ als Gruppen und damit $G_1 \equiv G_2$. Wir zeigen: Ist B eine $\mathbb{Q}$-Basis von G und $\kappa > \aleph_0$, dann gilt $\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(B)$.

Sei dazu $B = \{b_\nu \mid \nu \in I,\ b_\nu \in G\}$ eine Basis von G. Allgemein gilt $\mathrm{card}(\bigcup_{j\in J} M_j) \leq \max(\mathrm{card}(J), \alpha)$ mit $\mathrm{card}(M_j) \leq \alpha$ für alle $j \in J$ und $\mathrm{card}(\{\text{endliche Folgen von } I\}) = \mathrm{card}(I)$, also $\mathrm{card}(I) = \kappa$. □

Bemerkung 7.13.

Der Satz von Steinitz besagt, dass zwei algebraisch abgeschlossene Körper der gleichen Charakteristik und gleicher, überabzählbarer Kardinalität isomorph sind. ◊

Korollar 7.14.

Die Theorie Σ^2 der algebraisch abgeschlossenen Körper von Charakteristik 0 ist vollständig.

Beweis.

Folgt mit dem Vaught-Test direkt aus dem Satz von Steinitz. □

Korollar 7.15.

Die Theorie Σ^3 der dichten, linearen Ordnungen ohne Endpunkte ist vollständig.

Beweis.

Seien $\mathcal{A} = \langle A, <\rangle$ und $\mathcal{A}' = \langle A', <'\rangle$ zwei dichte, lineare Ordnungen ohne Extrema. Außerdem seien A, A' abzählbar, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von A und $(b_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von A'. Mit Hilfe von Cantors „Hin-und-Her-Verfahren“ definieren wir einen Isomorphismus Φ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}'$ rekursiv, indem wir neue Abzählungen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n')_{n\in\mathbb{N}}$ so definieren, dass $\Phi(a_n) = a_n'$ ordnungstreu ist.

Seien a_n und a_n' für $n < m$ bereits so konstruiert, dass $(*)\ \forall i, j < m : (a_i < a_j \Leftrightarrow a_i' < a_j')$. Ist m gerade, dass sei a_m dasjenige b_n mit minimalem Index, das nicht in der Menge $\{a_0, ..., a_{m-1}\}$ liegt. Da $\mathcal{A}'$ dichte Ordnung ohne Extrema, lässt sich dazu $a_m' \in \mathcal{A}'$ so wählen, dass $(*)$ auch für alle $i, j \leq m$ erfüllt ist.

Ist m dagegen ungerade, dann sei analog zu eben a_m' dasjenige b_n' mit minimalen Index, das nicht in der Menge $\{a_0', ..., a_{m-1}'\}$ liegt. Dann lässt sich $a_m \in A$ so wählen, dass $(*)$ für alle $i, j \leq m$ erfüllt ist. □

Bemerkung 7.16.

Für $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Isomorphismus, $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ und $h : \mathrm{Vbl} \to A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[h] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\Phi \circ h]$. ◊

8. Logik zweiter Stufe

Aus dem Satz von Hölder, der besagt, dass sich jeder archimedisch angeordnete Körper ordnungstreu in $\mathbb{R}$ einbetten lässt, kann man sofort folgern, dass jeder Dedekind-vollständige, angeordnete Körper zu $\mathbb{R}$ isomorph ist.

In der formalen Sprache Erster Stufe lässt sich die Dedekind-Vollständigkeit allerdings nicht formulieren: In einer Struktur $\mathcal{A} = \langle A, ... \rangle$ bezieht sich $\forall x$ stets auf Elemente von A. Wir führen daher neue Variablen $X, Y, ...$ ein, so dass sich $\forall X$ auf Teilmengen von A bezieht.

Unsere Objektsprache wird jetzt erweitert zur sog. Monadischen Zweiten Stufe:

1. neue Variablen: $X, Y, ...$;
2. neues Relationszeichen: ϵ;
3. neue Primformeln: $t \epsilon X$. $\Diamond$

Satz 8.1.

Die Klasse der Dedekind-vollständigen Körper ist in der Zweiten Stufe axiomatisierbar.

Speziell gilt für $\mathcal{K} = \langle K, +, -, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$: $\mathcal{K} \models \Sigma_D \Longrightarrow \mathcal{K} \cong \mathbb{R}$.

Beweis. Wir geben das Axiomensystem Σ_D explizit an: Σ_D besteht aus der Menge der Axiome für angeordnete Körper (Erste Stufe) zusammen mit der folgenden Aussage Zweiter Stufe:

$\forall XY(\forall xy(((x \epsilon X \wedge y \epsilon Y) \to x \leq y) \wedge \exists x(x \epsilon X) \wedge \exists x(y \epsilon Y)) \to \exists z \forall xy((x \epsilon X \wedge y \epsilon Y) \to (x \leq z \wedge z \leq y)))$. $\square$

Satz 8.2.

Der Beweisbegriff der Ersten Stufe lässt sich nicht auf die Zweite Stufe übertragen.

Beweis.

Angenommen, es gäbe einen (vollständigen) Beweisbarkeitsbegriff $\vdash^2$ für L^2 wie in der Ersten Stufe, d.h. $\Sigma \vdash^2 \alpha$ würde genau dann gelten, wenn es ein endliches $\Pi \subseteq \Sigma$ gäbe mit $\Pi \vdash^2 \alpha$. Dann würde auch in der Zweiten Stufe der Endlichkeitssatz gelten, d.h. mit jedem endlichen Modell $\Pi \subseteq \Sigma$ hätte stets auch Σ ein Modell.

Setze $\Sigma' = \Sigma_D \cup \{c_\nu \neq c_\mu \mid \nu \neq \mu\} \supseteq \Pi$ endlich, dann hätte $\Pi \subseteq \Sigma_D \cup \{c_{\nu_1} \neq c_{\mu_1}, ..., c_{\mu_m} \neq c_{\nu_n}\}$ ein Modell, zum Beispiel $\langle \mathbb{R}, ... \rangle$. Nach dem Endlichkeitssatz hätte dann auch Σ' ein Modell $\langle K, \leq \rangle \cong \mathbb{R}$ mit $\mathrm{card}(K) \geq \kappa > \mathrm{card}(\mathbb{R})$, ein Widerspruch. $\square$

9. Entscheidbarkeit und Erzeugbarkeit

Gegeben seien ein endliches Alphabet $A = \{a_1, ..., a_n\}$ und das leere Zeichen a_0.

Unter einer Turing-Maschine über A verstehen wir ein nach beiden Seiten endloses Band aus disktreten Feldern $\cdots\square\square\square\square\square\square\square\square\cdots$ zusammen mit einem Arbeitskopf und einer Programmtafel.

Die Felder des Bandes sind entweder leer (d.h. das leere Zeichen a_0 befindet sich darauf) oder mit genau einem Zeichen a aus A bedruckt. Der Arbeitskopf steht in jedem Arbeitsschritt über genau einem Feld, dem Arbeitsfeld, dieses Bandes und hat die folgenden (endlich vielen) Arbeitsschrittmöglichkeiten:

1. `a`: Beschriften des Arbeitsfeldes mit a (wobei a aus $A \cup \{a_0\}$);
2. `r`: ein Feld nach rechts Gehen;
3. `l`: ein Feld nach links Gehen;
4. `s`: Stoppen.

Die Programmtafel ist eine endliche Folge von Zeichen der Gestalt $z\ a\ b\ z'$, wobei a ein Element aus A ist, b eine der Arbeitsschrittmöglichkeiten des Kopfes und z, z' Elemente einer endlichen Zustandsmenge $Z = (z_1, ..., z_m)$ sind; diese können zum Beispiel durch die Ziffern $1, ..., m$ wiedergegeben werden.

Die Arbeitsweise der Turing-Machine ist durch die Programmtafel folgendermaßen eindeutig festgelegt: Befindet sich die Maschine im Zustand z und ist die Inschrift des Arbeitsfeldes a, so reagiert die Turing-Maschine mit b und die Maschine geht in den Zustand z' über. Die endliche, vierspaltige Matrix, aus der die Programmtafel besteht, legt also durch die Zuordnung $(z, a) \mapsto (b, z')$ die Arbeitsweise der Turing-Maschine eindeutig fest. Wir können die Maschine daher mit ihrer Programmtafel identifizieren.

Beispiel 9.1.

Der Arbeitskopf unserer Maschine soll sich nach rechts bewegen und bei a_1, spätestens aber nach fünf Schritten, stoppen ($A = \{a_0, a_1\}$).

$$\begin{array}{llll} z_1\ a_0\ \mathtt{r}\ z_2 & z_2\ a_0\ \mathtt{r}\ z_3 & z_3\ a_0\ \mathtt{r}\ z_4 & z_4\ a_0\ \mathtt{r}\ z_5 \\ z_5\ a_0\ \mathtt{s}\ z_1 & z_1\ a_1\ \mathtt{s}\ z_1 & z_2\ a_1\ \mathtt{s}\ z_1 & z_3\ a_1\ \mathtt{s}\ z_1 \\ z_4\ a_1\ \mathtt{s}\ z_1 & z_5\ a_1\ \mathtt{s}\ z_1 & & \end{array}$$

◊

Definition 9.2.

Seien $A = \{a_1, ..., a_n\}$ ein Alphabet und W die Menge der endlichen Zeichenreihen.

$M \subseteq W$ heißt entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine T gibt, die bei Eingabe von $w \in W$ nach endlich vielen Schritten stoppt mit $+$ oder $-$, je nachdem, ob $w \in M$ oder $w \notin M$ gilt.

M heißt erzeugbar, falls es eine Maschine T gibt, die alle Elemente $w \in M$ in irgend einer Reihenfolge erzeugt.

Bemerkung 9.3.

1. W ist erzeugbar.
2. Ist M entscheidbar, dann ist M auch erzeugbar. Erzeuge nämlich W und entscheide nach jedem Schritt, ob $+$ oder $-$ gilt. Schöpfe so alls $w \in W$ ab, die ein $+$ liefern.
3. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. ◊

Lemma 9.4.

Sei $A = \{a_1, ..., a_n\}$ das Alphabet einer Sprache L mit I, J, K endlich. Sei $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ erzeugbar. Dann ist auch der deduktive Abschluss $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ erzeugbar.

Beweis.

Sei $\alpha \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$, d.h. es gibt einen formalen Beweis $\varphi_1, ..., \varphi_{m-1}, \alpha$. Da alle formalen Beweise erzeugbar sind, ist auch α erzeugbar. □

Satz 9.5.

Sei Σ vollständig und erzeugbar. Dann ist $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ entscheidbar.

Beweis.

Mit Σ ist auch $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ erzeugbar. Sei $\mathrm{Ded}(\Sigma) = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$. Da Σ vollständig, gibt es zu $\alpha \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha = \alpha_m$ oder $\neg\alpha = \alpha_m$, also ist $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ entscheidbar. □

Bemerkung 9.6.

Eine Abbildung $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt eine zahlentheoretische Funktion.

Ein solches f heißt Turing-berechenbar, falls es eine Turing-Maschine gibt, die f berechnet. ◊

Bemerkung 9.7. (Vorgriff)

Die Klasse T der Turing-berechenbaren Funktionen ist die kleinste Klasse, die

1. c_0^0, die nullstellige Funktion 0,
2. N, die Nachfolgerfunktion $x \mapsto x + 1$,
3. $+$, die Summenfunktion $(x, y) \mapsto x + y$,
4. $\cdot$, die Produktfunktion $(x, y) \mapsto xy$ und
5. $|-|$, die Betragsdifferenz $(x, y) \mapsto |x - y|$

enthält und abgeschlossen ist unter

6. Einsetzung: g m-stellig, $f_1, ..., f_m$ n-stellig, alle aus $T \Rightarrow g(f_1, ..., f_m) \in T$,
7. dem μ-Operator im Normalfall: f $(n+1)$-stellig aus T, $h(x_1, ..., x_n) = y$ mit y minimal, so dass $f(x_1, ..., x_n, y) = 0$, dann $h \in T$. $\Diamond$

Lemma 9.8.

Zu jeder Turing-berechenbaren, n-stelligen Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ gibt es eine Formel $\varphi(v_0, ..., v_n)$, so dass $y = f(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi(v_0/y, v_1/x_1, ..., v_n/x_n)$ $(y, x_1, ..., x_n \in \mathbb{N})$.

Beweis.

1. $c_0^0 :\ v_0 \doteq 0$.
2. $N :\ v_0 \doteq v_1 + 1$.
3. $+ :\ v_0 \doteq v_1 + v_2$.
4. $\cdot :\ v_0 \doteq v_1 \cdot v_2$.
5. $|-| :\ (v_0 + v_1 \doteq v_2) \vee (v_0 + v_2 \doteq v_1)$ (in $\mathbb{N}$ liefert dies eine eindeutige Zuordnung).
6. Einsetzung: $\varphi_g, \varphi_1, ..., \varphi_m$ seien gegeben. Setze
$$\varphi_h : \exists u_1, ..., u_m(\varphi_g(v_0, v_1/u_1, ..., v_m/u_m) \wedge \varphi_{f_1}(v_0/u_1, v_1, ..., v_m) \wedge ... \wedge \varphi_{f_m}(v_0/u_m, v_1, ..., v_n)).$$
7. μ-Operator: Gegeben sei φ_f. Setze
$$\varphi_h : \varphi_f(v_0/0, v_1, ..., v_n, v_{n+1}/v_0) \wedge \forall u_1(\varphi_f(v_0/0, v_1, ..., v_n, v_{n+1}/u_1) \to \exists u_2(u_1 \doteq v_0 + u_2)).$$
Dabei heißt $\exists u_2(u_1 \doteq v_0 + u_2)$ nichts anderes, als dass $v_0 \leq u_1$. $\square$

Satz 9.9. (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

Sei $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ mit $\mathbb{N} \models \Sigma$. Dann ist Σ nicht vollständig.

Beweis.

Wir zeigen, dass $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ unentscheidbar ist. Da Σ nach Voraussetzung erzeugbar ist, kann Σ dann nicht vollständig sein.

Betrachte $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$. Wir nehmen an, dass $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ entscheidbar ist. Zu gegebenem Alphabet $\{a_1, ..., a_m\}$ codieren wir jedes Wort α mit der zugehörigen Gödel-Zahl $\lceil \alpha \rceil$: $a_{n_1} a_{n_2} ... a_{n_\sigma} \mapsto 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot ... \cdot p_{n_\sigma}^{n_\sigma}$. Wir betrachten die Abbildung $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) \to M = \{\lceil \alpha \rceil \mid \alpha \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})\}$ und dazu $\chi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeben durch $n \mapsto 1$ für $n \in M$ und $n \mapsto 0$ sonst. Nach Annahme ist χ_M entscheidbar. Also gibt es ein φ mit $\mathbb{N} \models \varphi(1, \lceil \alpha \rceil) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \alpha$ für alle $\mathcal{A} \in \mathrm{Aus}(L)$. Zu $\rho \in \mathrm{Fml}(L)$ mit $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \{v_0\}$ setze $g(\lceil \rho \rceil) = 1$ für $\mathbb{N} \models \neg\varphi(\lceil \rho \rceil)$ und 2 für $\mathbb{N} \models \varphi(\lceil \rho \rceil)$. Dann ist g Turing-berechenbar. Erweitere g auf $\mathbb{N}$ und setze $g(m) = 0$, falls m keine Gödel-Zahl ist.

Es gibt Formel $\psi(v_0, v_1)$ mit $\mathbb{N} \models \psi(1, \lceil \rho \rceil) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \neg\rho(\lceil \rho \rceil)$ für alle $\rho \in \mathrm{Fml}(L)$ mit $\mathrm{Fr}(\rho) \subseteq \{v_0\}$. Speziell für $\rho_0(v_0) = \psi(1, v_0)$ gilt dann $\mathbb{N} \models \rho_0(\lceil \rho \rceil) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \neg\rho(\lceil \rho \rceil)$ für alle $\rho \in \mathrm{Fml}(L)$ mit $\mathrm{Fr}(\rho) \subseteq \{v_0\}$. Insbesondere gilt dann $\mathbb{N} \models \rho_0(\lceil \rho_0 \rceil) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \neg\rho_0(\lceil \rho_0 \rceil)$, ein Widerspruch (Antinomie des Lügners). $\square$