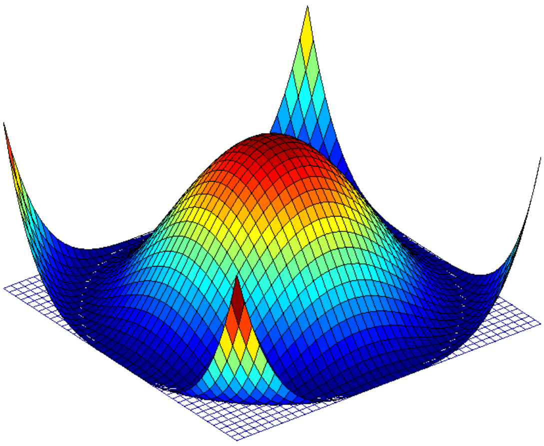
Skript zur Vorlesung

Differenzialgeometrie



gelesen von

Dr. M. Geißert

Martin Gubisch

Konstanz, Sommersemester 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Kurventheorie

1.1 Regulär parametrisierte Kurven

Definition 1.1

Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine *$\mathcal{C}^k$-Parametrisierung* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, wobei $I = I(\gamma)$ ein Intervall. Das Bild $\gamma(I)$ heißt die *Spur* von γ; $\dot{\gamma}(t)$ heißt der *Tangential-* oder *Geschwindigkeitsvektor* zur Stelle $t \in I$. Die Parametrisierung γ heißt *regulär*, falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

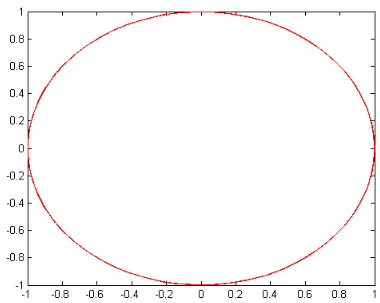
Beispiel 1.2

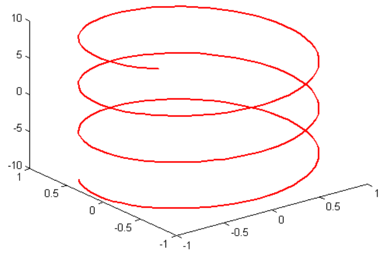
Folgende Abbildungen γ sind $\mathcal{C}^\infty$-Parametrisierungen mit $I(\gamma) = \mathbb{R}$:

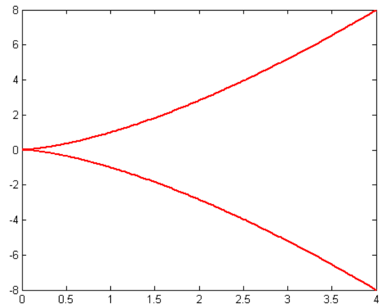
$$\gamma_1 : t \mapsto x_0 + tv \ (x_0, v \in \mathbb{R}^n), \qquad \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix} \ (r > 0); \qquad \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}.$$

Spur(γ_1) ist eine Gerade durch x_0 in Richtung v; Spur(γ_2) der Kreisrand mit Radius r um 0 und Spur(γ_3) eine „Schraubenlinie“ („Helix“) mit Radius r und „Ganghöhe“ h.

Die „Neilsche Parabel“ $\gamma(t) := (t^2, t^3)$ ist dagegen keine reguläre Parametrisierung, da $\dot{\gamma}(0) = 0$.







Definition 1.3

Eine *$\mathcal{C}^k$-Parametertransformation* ist eine Bijektin $\varphi : I \to J$ zwischen Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass φ, φ^{-1} beides $\mathcal{C}^k$-Funktionen sind.

φ heißt *orientierungserhaltend*, falls $\dot{\varphi} > 0$ auf I, und *orientierungsumkehrend*, falls $\dot{\varphi} < 0$ auf t.

Konvention 1.4

Ab jetzt seien alle Parametrisierungen regulär.

Definition 1.5

Seien γ_1, γ_2 zwei $\mathcal{C}^k$-Parametrisierungen, dann setzen wir

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine (orientierungserhaltende) } \mathcal{C}^k\text{-Parametertransformation } \varphi : I(\gamma_1) \to I(\gamma_2) \text{ mit } \gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi.$$

Sowohl im allgemeinen als auch im orientierungserhaltenden Fall definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $\mathcal{C}^k$-Parametrisierungen.

Die Äquivalenzklassen $\Gamma = [\gamma]$ heißen *(orientierte) $\mathcal{C}^k$-Kurven*. γ heißt dann eine *Parametrisierung* von Γ. Wir sagen, Γ wird von γ *erzeugt*.

Wegen $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \text{Spur}(\gamma_1) = \text{Spur}(\gamma_2)$ können wir $\text{Spur}([\gamma]) := \text{Spur}(\gamma)$ setzen.

Bemerkung 1.6

Seien $\Gamma_1 = [\gamma_1], \Gamma_2 = [\gamma_2]$ Kurven mit $\mathrm{Spur}(\Gamma_1) = \mathrm{Spur}(\Gamma_2)$. Dann muss nicht gelten $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ($\Leftrightarrow \gamma_1 \sim \gamma_2$): Beispielsweise erzeugen $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1, \gamma_2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ (ein- bzw. zweifacher Durchlauf des Kreisrandes) verschiedene Kurven Γ_1, Γ_2.

Definition 1.7

Sei Γ eine $\mathcal{C}^k$-Kurve mit $\Gamma = [\gamma]$. Dann heißt γ eine Parametrisierung *proportional zur Bogenlänge*, falls $||\dot\gamma|| \equiv$ konstant auf $I(\gamma)$, und *Bogenlängenparametrisierung*, falls $||\dot\gamma|| \equiv 1$ auf $I(\gamma)$.

Satz 1.8

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine $\mathcal{C}^k$-Kurve, dann gibt es eine orientierungserhaltende $\mathcal{C}^k$-Parametertransformation φ derart, dass $\gamma \circ \varphi$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge ist.

Beweis

Wähle $t_0 \in I := I(\gamma)$ und setze $\psi(s) := \int_{t_0}^{s} ||\dot\gamma(\tau)||\,\mathrm{d}\tau$ $(s \in I)$. Dann ist $\psi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ mit $\dot\psi = ||\dot\gamma|| > 0$, d.h. ψ ist streng monoton wachsend. Daher gibt es $\varphi := \psi^{-1} : J \to I$ $(J := \psi(I))$, $\varphi \in \mathcal{C}^k(J)$ und

$$\dot\varphi(t) = \frac{1}{\dot\psi(\varphi(t))} = \frac{1}{||\dot\gamma(\varphi(t))||} > 0, \qquad ||(\gamma \circ \varphi)^\cdot(t)|| = ||\dot\gamma(\varphi(t))\dot\varphi(t)|| = 1. \qquad \blacksquare$$

Satz 1.9

Seien γ_1, γ_2 Parametrisierungen einer $\mathcal{C}^k$-Kurve Γ nach der Bogenlänge, dann gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $t \in I(\gamma_1)$ entweder $\gamma_1(t) = \gamma_2(t + t_0)$ oder $\gamma_1(t) = \gamma_2(t_0 - t)$ gilt.

Ist Γ orientiert, dann gilt $\gamma_1(t) = \gamma_2(t + t_0)$ für alle $t \in I(\gamma_1)$.

Beweis

Sei φ eine $\mathcal{C}^k$-Parametertransformation mit $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Dann gilt

$$1 = ||\dot\gamma_1(t)|| = ||\dot\gamma_2(\varphi(t))\dot\varphi(t)|| = ||\dot\gamma_2(\varphi(t))|||\dot\varphi(t)| = |\dot\varphi(t)|,$$

d.h. $\varphi(t) = t_0 \pm t$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varphi(t) = t_0 + t$, falls Γ orientiert ist. $\blacksquare$

Definition 1.10

Sei Γ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve mit Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Die *Länge* von Γ ist definiert als

$$L(\Gamma) := \int_a^b ||\dot\gamma(\tau)||\,\mathrm{d}\tau.$$

Bemerkung 1.11

$L(\Gamma)$ ist wohldefiniert, d.h. invariant unter $\sim$: Sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine Parametertransformation, dann

$$\int_\alpha^\beta ||(\gamma \circ \varphi)^\cdot(\tau)||\,\mathrm{d}\tau = \int_\alpha^\beta ||\dot\gamma(\varphi(\tau))|||\dot\varphi(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \overset{\text{Subst.}}{=} \int_a^b ||\dot\gamma(\tau)||\,\mathrm{d}\tau.$$

Bemerkung 1.12

Sei $Z = \{t_0, ..., t_k\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, d.h. $a = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} < t_k = b$. Setzen wir

$$L(\gamma, Z) := \sum_{i=1}^{k} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$$

(Länge des Polygonzuges zwischen den Punkten $\gamma(t_0), ..., \gamma(t_k)$), so gilt

$$L(\Gamma) = \sup\{L(\gamma, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}.$$

Definition 1.13
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine $\mathcal{C}^2$-Kurve. Definiere

$$\vec{\varkappa}_\gamma(t) := \frac{1}{||\dot\gamma(t)||^2}\ddot\gamma(t) - \frac{\langle\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\rangle}{||\dot\gamma(t)||^4}\dot\gamma(t),$$

dann heißt $\vec{\varkappa}_\gamma : I(\gamma) \to \mathbb{R}^n$ das *Krümmungsvektorfeld von γ* und $\vec{\varkappa}_\Gamma := [\vec{\varkappa}_\gamma]$ das *Krümmungsvektorfeld von Γ*.

Bemerkung 1.14
$\vec{\varkappa}_\Gamma$ ist wohldefiniert: Sei φ eine Parametertransformation, dann gilt

$$(\gamma\circ\varphi)^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = \dot\gamma(\varphi(t))\dot\varphi(t), \quad (\gamma\circ\varphi)^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}(t) = \ddot\gamma(\varphi(t))\dot\varphi(t)^2 + \dot\gamma(\varphi(t))\ddot\varphi(t).$$

Einsetzen und Ausrechnen liefert $\vec{\varkappa}_{\gamma\circ\varphi} = \vec{\varkappa}_\gamma\circ\varphi$, d.h. $[\vec{\varkappa}_{\gamma\circ\varphi}] = [\vec{\varkappa}_\gamma]$.

Satz 1.15
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine $\mathcal{C}^2$-Kurve. Dann gelten:
(1) $\forall t\in I(\gamma) : \vec{\varkappa}_\gamma(t)\perp\dot\gamma(t)$ ($\Leftrightarrow \langle\vec{\varkappa}_\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle = 0$).
(2) Ist γ eine Bogenlängenparametrisierung, dann $\vec{\varkappa}_\gamma = \ddot\gamma$.

Beweis
Sei zunächst γ eine beliebige Parametrisierung von Γ, dann gilt für alle $t\in I(\gamma)$:

$$\langle\vec{\varkappa}_\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||^2}\langle\ddot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle - \frac{\langle\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\rangle}{||\dot\gamma(t)||^4}\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle = 0.$$

Sei nun γ eine Bogenlängenparametrisierung von Γ, d.h. $||\dot\gamma|| = 1$, dann gilt für $t\in I(\gamma)$:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\dot\gamma(t)||^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle = 2\langle\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\rangle,$$

also $\vec{\varkappa}_\gamma(t) = \ddot\gamma(t) - \langle\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\rangle\dot\gamma(t) = \ddot\gamma(t)$. ∎

Bemerkung 1.16
Seien $f,g\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ und $s:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ das Standardskalarprodukt, d.h. $s(x,y) := \langle x,y\rangle$ $(x,y\in\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\forall t\in I : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(t),g(t)\rangle = \langle g(t),\dot f(t)\rangle + \langle f(t),\dot g(t)\rangle.$$

Wegen $s(x,y) = \sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$ ist nämlich $(\nabla s)(x,y) = \binom{y}{x}$, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(t),g(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s\circ(f,g)](t) = \left([(\nabla s)(f,g)]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f,g)\right)(t) = \begin{pmatrix}g(t)\\f(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot f(t)\\\dot g(t)\end{pmatrix} = \langle g(t),\dot f(t)\rangle + \langle f(t),\dot g(t)\rangle.$$

Beispiel 1.17
Sei $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := r(\cos(t),\sin(t))$ $(r>0)$. Mit $\varphi(t) := \frac{t}{r}$ ist $\sigma := \gamma\circ\varphi$ eine Bogenlängenparametrisierung, d.h. für $t\in I(\gamma)$ gilt

$$\vec{\varkappa}_\gamma(t) = \vec{\varkappa}_{\sigma\circ\varphi^{-1}}(t) = (\vec{\varkappa}_\sigma\circ\varphi^{-1})(t) = \vec{\varkappa}_\sigma(rt) = \ddot\sigma(rt) = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix} = -\frac{1}{r^2}\gamma(t).$$

Bemerkung 1.18
Seien $\gamma_1,\gamma_2 : I_{1,2}\to\mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-Parametrisierungen und $t_{1,2}\in I_{1,2}$ mit $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. Dann gibt es genau ein $\alpha\in[-\pi,\pi)$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle\dot\gamma_1(t_1),\dot\gamma_2(t_2)\rangle}{||\dot\gamma_1(t_1)||\cdot||\dot\gamma_2(t_2)||}.$$

α heißt der *Schnittwinkel* von γ_1 und γ_2 in (t_1,t_2).

1.2 Ebene Kurven und deren Krümmung

Sprechweise 1.19

Ist γ eine Parametrisierung im $\mathbb{R}^2$, so heißt γ *ebene Parametrisierung* und $\Gamma := [\gamma]$ eine *ebene Kurve*.

Definition 1.20

Sei $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $J(x_1, x_2) := (-x_2, x_1)$. Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine orientierte, ebene $\mathcal{C}^1$-Kurve. Definiere für $t \in I(\gamma)$

$$\vec{\nu}_\gamma(t) := \frac{1}{||\dot{\gamma}(t)||} J(\dot{\gamma}(t)),$$

dann heißt $\vec{\nu}_\gamma : I(\gamma) \to \mathbb{R}^2$ das *positiv orientierte Einheitsnormalenfeld von* γ und $\vec{\nu}_\Gamma := [\vec{\nu}_\gamma]$ das *positiv orientierte Einheitsnormalenfeld von* Γ.

Bemerkung 1.21

$\vec{\nu}_\Gamma$ ist wohldefiniert: Sei φ eine Parametertransformation, dann gilt:

$$(\vec{\nu}_{\gamma\circ\varphi})(t) = \frac{J((\gamma\circ\varphi)^{\cdot}(t))}{||(\gamma\circ\varphi)^{\cdot}(t)||} = \frac{J(\dot{\gamma}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t))}{||\dot{\gamma}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)||} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{||\dot{\varphi}(t)||}\frac{J(\dot{\gamma}(\varphi(t)))}{||\dot{\gamma}(\varphi(t))||} = (\vec{\nu}_\gamma \circ \varphi)(t),$$

also $\vec{\nu}_{\gamma\circ\varphi} = \vec{\nu}_\gamma \circ \varphi$, d.h. $[\vec{\nu}_{\gamma\circ\varphi}] = [\vec{\nu}_\gamma]$.

Merke: Orientierung des Einheitsnormalenfeldes „in Fahrtrichtung links“.

Satz 1.22

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine positiv orientierte, ebene $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann gilt für alle $t \in I(\gamma)$:

$$\langle \vec{\nu}_\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = 0.$$

Beweis

Sei $t \in I(\gamma)$ beliebig, dann gilt

$$\langle \vec{\nu}_\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = \frac{1}{||\dot{\gamma}(t)||}\langle J(\dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle = \frac{1}{||\dot{\gamma}(t)||}\left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_2(t) \\ \dot{\gamma}_1(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t)\end{pmatrix}\right\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Definition 1.23

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine orientierte, ebene $\mathcal{C}^2$-Kurve. Für $t \in I(\gamma)$ definiere

$$\varkappa_\gamma(t) := \langle \vec{\varkappa}_\gamma(t), \vec{\nu}_\gamma(t)\rangle,$$

dann heißt $\varkappa_\gamma$ die *skalare Krümmung von* γ und $\varkappa_\Gamma := [\varkappa_\gamma]$ die *skalare Krümmung von* Γ.

Bemerkung 1.24

$\varkappa_\Gamma$ ist wohldefiniert: Sei φ eine Parametertransformation, dann gilt

$$\varkappa_{\gamma\circ\varphi}(t) = \langle \vec{\varkappa}_{\gamma\circ\varphi}(t), \vec{\nu}_{\gamma\circ\varphi}(t)\rangle = \langle (\vec{\varkappa}_\gamma\circ\varphi)(t), (\vec{\nu}_\gamma\circ\varphi)(t)\rangle = (\varkappa_\gamma\circ\varphi)(t),$$

d.h. $\varkappa_{\gamma\circ\varphi} = \varkappa_\gamma \circ \varphi$ und damit $[\varkappa_{\gamma\circ\varphi}] = [\varkappa_\gamma]$.

$\varkappa_\gamma$ zeigt bei „Linkskurven“ in, bei „Rechtskurven“ entgegen des Einheitsnormalenfeldes.

Physikalisch: Nach dem Newtonschen Gesetz „Kraft = Masse × Beschleunigung“ misst $\varkappa_\gamma(t)$ die (skalare Größe der) Kraft, die nötig ist, um einen mit Geschwindigkeit $||\dot{\gamma}(t)|| = 1$ bewegten Einheitsmassepunkt auf der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve $\Gamma = [\gamma]$ zu halten.

Korollar 1.25
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine orientierte, ebene $\mathcal{C}^2$-Kurve. Dann gelten für alle $t \in I(\gamma)$:
(1) $\varkappa_\gamma(t) = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||^2}\langle \ddot\gamma(t), \vec{\nu}_\gamma(t)\rangle$;
(2) $\vec{\varkappa}_\gamma(t) = \varkappa_\gamma(t)\vec{\nu}_\gamma(t)$, insbesondere $|\varkappa_\gamma(t)| = ||\varkappa_\gamma(t)||$.

Beispiel 1.26
(1) Die Parametrisierungen $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Kreisrandes mit Radius $r > 0$,

$$\gamma_1(t) := r\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, \qquad \gamma_2(t) = r\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

sind unterschiedlich orientiert. Für die Einheitsnormalenfelder gelten

$$\vec{\nu}_{\gamma_1}(t) = J\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} = -\frac{1}{r}\gamma_2(t), \qquad \vec{\nu}_{\gamma_2}(t) = J\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\gamma_1(t).$$

(2) Betrachte für $r > 0$ die Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

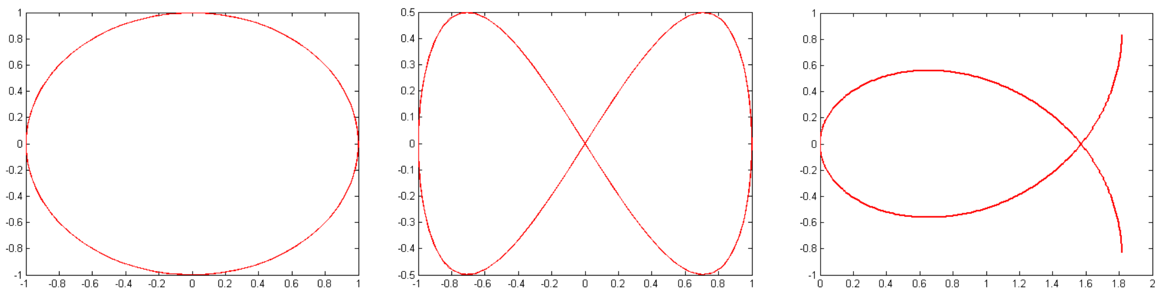
$$\gamma(t) := r\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \cos(t)\sin(t)\end{pmatrix} \qquad \textit{(Lemniskate)}.$$

Dann ist $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos^2(t) - \sin^2(t)\end{pmatrix}$, d.h. $\vec{\nu}_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{(\cos^2(t)-\sin^2(t))^2+\sin^2(t)}}\begin{pmatrix}\sin^2(t) - \cos^2(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix}$.
(3) Betrachte die Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix}t\sin(t)\\ t\cos(t)\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}\sin(t) + t\cos(t)\\ \cos(t) - t\sin(t)\end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\vec{\nu}_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix}t\sin(t) - \cos(t)\\ \sin(t) + t\cos(t)\end{pmatrix}.$$



(4) Seien $u \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ und $\gamma_u(t) := (t, u(t))$ die *Graphenabbildung* von u, d.h. $\mathrm{Spur}(\gamma_u) = \mathrm{Graph}(u)$. Dann sind für $t \in I$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}1\\ \dot u(t)\end{pmatrix}, \qquad \vec{\nu}_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\dot u(t)}}\begin{pmatrix}-\dot u(t)\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \ddot\gamma(t) = \begin{pmatrix}0\\ \ddot u(t)\end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{aligned}\vec{\varkappa}_\gamma(t) &= \frac{1}{1+\dot u(t)^2}\begin{pmatrix}0\\ \ddot u(t)\end{pmatrix} - \frac{\dot u(t)\ddot u(t)}{(1+\dot u(t))^2}\begin{pmatrix}1\\ \dot u(t)\end{pmatrix};\\ \varkappa_\gamma(t) &= \frac{\ddot u(t)}{(1+\dot u(t)^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dot u(t)^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\arctan(\dot u(t))).\end{aligned}$$

$\arctan(\dot u(t))$ gibt dabei den Winkel zwischen der t-Achse und der Tangente an γ im Punkt $\gamma(t)$ an.

Lemma 1.27 (Frenet-Gleichungen)
Für eine ebene $\mathcal{C}^2$-Parametrisierung γ gelten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot\gamma(t)}{||\dot\gamma(t)||} = ||\dot\gamma(t)||\varkappa_\gamma(t)\vec{\nu}_\gamma(t), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\nu}_\gamma(t) = -\varkappa_\gamma(t)\dot\gamma(t).$$

Beweis
Zur ersten Gleichung: Differenzieren nach Quotientenregel ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot\gamma(t)}{||\dot\gamma(t)||} = \frac{\ddot\gamma(t)||\dot\gamma(t)|| - \dot\gamma(t)\frac{2\langle\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\rangle}{2||\dot\gamma(t)||}}{||\dot\gamma(t)||^2} = \frac{\ddot\gamma(t)}{||\dot\gamma(t)||} - \frac{\langle\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\rangle\dot\gamma(t)}{||\dot\gamma(t)||^3} = ||\dot\gamma(t)||\vec{\varkappa}(t) = \varkappa||\dot\gamma(t)||\vec{\nu}(t).$$

Zur zweiten Gleichung: Es gilt $\langle\vec{\nu},\vec{\nu}\rangle \equiv 1$, Differenzieren liefert also $\langle\vec{\nu}^{\,\cdot},\vec{\nu}\rangle = 0$. Also existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $\vec{\nu}^{\,\cdot} = a\dot\gamma$. Weiter ist $\langle\vec{\nu},\dot\gamma\rangle \equiv 0$; Differenzieren ergibt $\langle\ddot\gamma,\vec{\nu}\rangle + \langle\dot\gamma,\vec{\nu}^{\,\cdot}\rangle = 0$, also $a||\dot\gamma||^2 = -\langle\ddot\gamma,\vec{\nu}\rangle = -||\dot\gamma||^2\varkappa$, d.h. $a = -\varkappa$ und damit $\vec{\nu}^{\,\cdot} = -\varkappa\dot\gamma$. ■

Definition 1.28
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine ebene $\mathcal{C}^2$-Kurve. Ist $t_0 \in I(\gamma)$ mit $\varkappa_\gamma(t_0) \neq 0$, dann heißt die Kurve $\Lambda = [\lambda]$ mit

$$\lambda(t) := \gamma(t_0) + \frac{\vec{\nu}_\gamma(t_0)}{\varkappa_\gamma(t_0)} + \frac{1}{|\varkappa_\gamma(t_0)|}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

der *Krümmungskreis von γ* im Punkt t_0.

Bemerkung 1.29
Sind γ eine Bogenlängenparametrisierung von Γ und σ eine Bogenlängenparametrisierung von Λ mit $\sigma(t_0) = \gamma(t_0)$ und $\dot\sigma(t_0) = \dot\gamma(t_0)$, so gilt auch $\ddot\sigma(t_0) = \ddot\gamma(t_0)$. In diesem Sinne ist der Krümmungskreis der einzige Kreis, der Γ im Punkt t_0 von mindestens zweiter Ordnung berührt.

Wir sprechen dann vom *Krümmungskreis von Γ* im Punkt t_0.

Bemerkung 1.30
(1) Die skalare Krümmung eines Kreises vom Radius r in Gegenuhrzeigerrichtung parametrisiert ist $\varkappa \equiv \frac{1}{r}$: Je kleiner der Radius, desto größer die Krümmung.
(2) Seien γ eine Bogenlängenparametrisierung einer $\mathcal{C}^2$-Kurve $\Gamma = [\gamma]$, $t_0 \in I(\gamma)$ mit $\varkappa_\gamma(t_0) \neq 0$ und λ eine Bogenlängenparametrisierung des Krümmungskreises $\Lambda = [\lambda]$ in t_0 mit Radius $r = r(t_0)$. Dann ist $|\kappa_\gamma(t_0)| = \frac{1}{r}$.
(3) Die Kurve $E = [\vec{e}_\gamma]$ der Krümmungskreismittelpunkte wird parametrisiert durch

$$\vec{e}_\gamma(t) := \gamma(t) + \frac{\vec{\nu}_\gamma(t)}{\varkappa_\gamma(t)} \qquad (t \in I(\gamma)).$$

Sie ist unabhängig von der gewählten Parametrierung γ und heißt *Evolute* von Γ. In unserem Fall ist γ Bogenlängenparametrisierung, d.h.

$$\vec{e}_\gamma(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{\ddot\gamma(t_0)}{|\ddot\gamma(t_0)|^2} = \frac{\lambda(t_0)}{|\lambda(t_0)|^2}.$$

1.3 Der Umlaufsatz

Satz 1.31

Sei γ eine ebene $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung ($k \geq 2$). Dann gibt es ein $\alpha_\gamma \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ mit

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_\gamma(t)) \\ \sin(\alpha_\gamma(t)) \end{pmatrix} \qquad (t \in I(\gamma)).$$

Ist $\tilde{\alpha}_\gamma$ eine weitere solche Funktion, dann gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_\gamma - \tilde{\alpha}_\gamma \equiv 2\pi l$ auf $I(\gamma)$, d.h. α_γ ist bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Jedes solche α_γ heißt ein *Umlaufwinkel* von γ.

Beweis

Sei $t_0 \in I(\gamma)$ beliebig und dazu ein $\alpha(t_0)$ so gewählt, dass

$$\frac{\dot{\gamma}(t_0)}{||\dot{\gamma}(t_0)||} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t_0)) \\ \sin(\alpha(t_0)) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\alpha(t_0)$ modulo $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt. Definiere dazu

$$\boxed{\alpha(t) := \alpha(t_0) + \int_{t_0}^t \varkappa(\tau)||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau}, \qquad v(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} - \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Dann sind v, α zwei $\mathcal{C}^{k-1}$-Funktionen. Wir zeigen, dass $v \equiv 0$ ist. Differenzieren ergibt

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \frac{\ddot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} - \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\rangle \dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||^3} - \varkappa(t)||\dot{\gamma}(t)|| \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \\ &= ||\dot{\gamma}(t)|| \left(\vec{\varkappa}(t) - \varkappa(t) \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \right) \\ &= \varkappa(t)||\dot{\gamma}(t)|| \left(\vec{\nu}(t) - \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \right) \\ &= \varkappa(t)||\dot{\gamma}(t)|| \left(\vec{\nu}(t) - J \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Für $t \in I(\gamma)$ definiere $f(t) := \varkappa(t)||\dot{\gamma}(t)||$, dann $\dot{v}(t) = f(t)J(v(t))$.
Identifiziere $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, d.h. $(x_1, x_2) \leftrightarrow x_1 + ix_2$, insbesondere $J(x_1, x_2) = (-x_2, x_1) \leftrightarrow ix_1 - x_2 = i(x_1 + ix_2)$.
Wir erhalten $\dot{v}(t) = if(t)v(t)$ und via Integration

$$v(t) = v(t_0) \exp\left(i \int_{t_0}^t f(\tau)\ \mathrm{d}\tau \right) \overset{v(t_0)\,=\,0}{\Longrightarrow} v(t) \equiv 0.$$

■

Definition 1.32

Eine Kurve Γ im $\mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn sie eine periodische Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ besitzt.

Γ heißt *einfach geschlossen*, falls γ zusätzlich injektiv ist auf einem (bzw. jedem) halboffenen Periodenintervall, d.h. ist $L > 0$ die Periode von γ (insbesondere L minimal gewählt), dann ist γ injektiv auf jedem Intervall $[t_0, t_0 + L)$ $(t_0 \in \mathbb{R})$.

Seien $\Gamma = [\gamma]$ eine geschlossene, ebene, orientierte $\mathcal{C}^2$-Kurve mit γ von der Periode $L(\gamma)$ und α_γ ein Umlaufwinkel von γ. Dann heißt

$$\chi(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{L(\gamma)} \varkappa_\gamma(\tau)||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}(\alpha_\gamma(L(\gamma)) - \alpha_\gamma(0)) \in \mathbb{Z} \qquad (**)$$

die *Umlaufzahl* von Γ.

Bemerkung 1.33

(1) Nach Satz 1.31 ist der letzte Term von $(**)$ unabhängig von der Wahl des Umlaufwinkels α.

(2) Die Gleichheit in $(**)$ ergibt sich aus der Wahl von α_γ in $(*)$.

(3) Da γ L-periodisch, ist $e^{i\alpha(0)} = \cos(\alpha(0)) + i\sin(\alpha(0)) = \cos(\alpha(L)) + i\sin(\alpha(L)) = e^{i\alpha(L)}$ und damit $\alpha(L) - \alpha(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(4) Bleibt die Unabhängigkeit von der Parametrisierung zu zeigen. Sei γ_0 eine Bogenlängenparametrisierung mit Periode L_0. Nach Satz 1.9 ist jede andere periodische Bogenlängenparametrisierung γ_1 von der Form $\gamma_1(t) = \gamma_0(t + t_0)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, also $\varkappa_{\gamma_1}(t) = \varkappa_{\gamma_0}(t + t_0)$, d.h. „$\chi([\gamma_0]) = \chi([\gamma_1])$".

Sei nun $L = L(\gamma)$ und dazu $\tilde{L} := \int_a^{a+L} ||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau$ $(a \in \mathbb{R})$. Für $\psi(t) := \int_0^t ||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau$ gilt dann

$$\forall t \in \mathbb{R} : \psi(t + L) = \int_0^t ||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau + \int_t^{t+L} ||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau = \psi(t) + \tilde{L}.$$

Für $\varphi := \psi^{-1}$ ist $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ eine Bogenlängenparametrisierung mit $\varphi(t + \tilde{L}) = \varphi(t) + L$ $(t \in \mathbb{R})$; insbesondere hat $\tilde{\gamma}$ die Periode $\tilde{L}$ und dies ist dann auch die Periode für jede andere Parametrisierung nach der Bogenlänge. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} \varkappa_{\gamma_0}(\tau)\ \mathrm{d}\tau &= \int_0^{\tilde{L}} \varkappa_{\tilde{\gamma}}(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{\tilde{L}} \varkappa_\gamma(\varphi(\tau))||(\gamma \circ \varphi)^\cdot(\tau)||\ \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{\tilde{L}} \varkappa_\gamma(\varphi(\tau))||\dot{\gamma}(\varphi(\tau))||\dot{\varphi}(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\tilde{L})} \varkappa_\gamma(\tau)||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{L} \varkappa_\gamma(\tau)||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

also ist die Umlaufzahl unabhängig vom Vertreter γ.

(5) Die Umlaufzahl misst die Anzahl der Drehungen des Tangentialvektors bei einem Durchlauf.

Beispiel 1.34

Die „Lemniskate" $\Gamma = [\gamma]$ mit

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

hat die Umlaufzahl $\chi(\Gamma) = 0$: Γ ist 2π-periodisch und es gilt $\gamma(t+\pi) = P(\gamma(t))$ mit $P(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ (d.h. $JP = -PJ$) für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Damit sind $\vec{\varkappa}(t + \pi) = P(\vec{\varkappa}(t))$ und $\vec{\nu}(t + \pi) = -P(\vec{\nu}(t))$, d.h. $\varkappa(t + \pi) = -\varkappa(t)$. Damit ist

$$\chi(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \varkappa(\tau)||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau = -\int_0^{2\pi} \varkappa(\tau + \pi)||\dot{\gamma}(\tau + \pi)||\ \mathrm{d}\tau = -\int_\pi^{3\pi} \varkappa(\tau)||\dot{\gamma}(\tau)||\ \mathrm{d}\tau = -\chi(\Gamma),$$

also $\chi(\Gamma) = 0$.

Theorem 1.35 (Liftungslemma)

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig bzgl. x_0 und $e : M \to \mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ eine stetige Funktion.

Dann existiert ein stetiges $\alpha : M \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in M : e(x) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(x)) \\ \sin(\alpha(x)) \end{pmatrix} = e^{i\alpha(x)}.$$

α ist durch die Vorgabe $\alpha(x_0) := \alpha_0$ eindeutig festgelegt.

Satz 1.36 (Umlaufsatz)
Sei Γ eine orientierte, ebene, einfach geschlossene $\mathcal{C}^2$-Kurve. Dann ist $|\chi(\Gamma)| = 1$.

Beweis

(1) Wähle eine Bogenlängenparametrisierung γ von Γ derart, dass $\gamma_1(0) = \max\{\gamma_1(t) \mid t \in [0, L]\}$. Dann ist $\dot\gamma(0) = \pm(0,1)$ und der Halbstrahl $\sigma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(s) := \gamma(0) + s(1,0)$ $(s > 0)$ enthält keinen weiteren Punkt von $\operatorname{Spur}(\Gamma)$.

(2) Sei $M = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le L\}$. Definiere $e : M \to \mathbb{S}^1$ durch

$$e(t_1, t_2) := \begin{cases} \dot\gamma(t) & t_1 = t = t_2 \\ -\dot\gamma(0) & (t_1, t_2) = (0, L) \\ \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{||\gamma(t_2) - \gamma(t_1)||} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist e wohldefiniert und stetig. Nach dem Liftungslemma gibt es dann ein stetiges $\alpha : M \to \mathbb{R}$ mit

$$e(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t_1, t_2)) \\ \sin(\alpha(t_1, t_2)) \end{pmatrix}.$$

Wegen $e(t,t) = \dot\gamma(t)$ und $||\dot\gamma|| = 1$, folgt aus Satz 1.31, dass $2\pi \cdot \chi(\Gamma) = \alpha(L, L) - \alpha(0, 0)$.

(3) Es gibt ein $l \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $t \in [0, L]$ gilt $\alpha(0, t) \in (2\pi l, 2\pi(l+1))$, denn andernfalls gäbe es nach dem Zwischenwertsatz wegen $e(0,0) = -e(0,L) = \dot\gamma(0) = \pm(1,0)$ ein $s \in (0, L]$ mit

$$\frac{\gamma(s) - \gamma(0)}{||\gamma(s) - \gamma(0)||} = e(0, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $\gamma(s) \in \operatorname{Spur}(\sigma)$ im Widerspruch zu (1).

(4) Aus (3) und

$$\begin{array}{rccccccc} & e^{i\alpha(0,0)} & \overset{\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}}{=} & e(0,0) & = & \dot\gamma(0) & \overset{\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2}{=} & e^{\pm i \frac{\pi}{2}} \\ \text{und analog} & e^{i\alpha(0,L)} & \overset{\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}}{=} & e(0,L) & = & -\dot\gamma(0) & \overset{\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2}{=} & e^{\pm i \frac{3\pi}{2}} \end{array}$$

folgt, dass $\alpha(0, L) - \alpha(0, 0) = \pm(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \pm\pi$ ist. Analog sieht man $\alpha(L, L) - \alpha(0, L) = \pm\pi$ (Wiederhole (3) mit $\alpha(t, L)$ statt $\alpha(0, t)$). Insgesamt erhalten wir also

$$2\pi \cdot \chi(\Gamma) \overset{(2)}{=} \alpha(L, L) - \alpha(0, 0) = (\alpha(L, L) - \alpha(0, L)) + (\alpha(0, L) - \alpha(0, 0)) = \pm 2\pi,$$

d.h. $\chi(\Gamma) = \pm 1$. ■

Bemerkung 1.37

Für eine einfach geschlossene, ebene Kurve Γ existiert eine natürliche bzw. „positive“ Orientierung: Seien hierzu γ eine L-periodische Parametrisierung und $x_0 := \max\{\gamma_1(t) \mid t \in [0, L]\}$. Sei $t_0 \in [0, L)$ mit $\gamma_1(t_0) = x_0$. Dann ist $\dot\gamma(t_0) = (0, \lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ist dieses $\lambda > 0$, so wähle die Kurve $[\gamma]$, andernfalls $[\gamma(-(\cdot))]$

Für eine solche natürlich orientierte, einfach geschlossene Kurve Γ ist dann stets $\chi(\Gamma) = +1$.

1.4 Konvexe Kurven

Definition 1.38

Sei γ eine ebene $\mathcal{C}^1$-Parametrisierung. Die *Tangente* von γ im Punkt t ist gegeben durch

$$G_\gamma(t) := \{\gamma(t) + s\dot{\gamma}(t) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Gerade berandet zwei abgeschlossene Halbebenen

$$H_\gamma^\pm(t) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \pm \langle x - \gamma(t), \vec{\nu}_\gamma(t)\rangle \geq 0\}.$$

$\Gamma = [\gamma]$ heißt *konvex*, falls für alle $t \in I(\gamma)$ gilt: $\operatorname{Spur}(\Gamma) \subseteq H_\gamma^+(t)$ oder $\operatorname{Spur}(\Gamma) \subseteq H_\gamma^-(t)$.

Bemerkung 1.39

Die Eigenschaft „Konvexität“ ist wieder unabhängig von der Wahl der Parametrisierung γ.

Lemma 1.40

Sei Γ eine ebene $\mathcal{C}^1$-Kurve. Genau dann ist Γ konvex, wenn für eine (und damit jede) Parametrisierung γ von Γ entweder gilt $\operatorname{Spur}(\Gamma) \subseteq H_\gamma^+(t)$ oder $\operatorname{Spur}(\Gamma) \subseteq H_\gamma^-(t)$ für alle $t \in I(\gamma)$.

Beweis

Sei $\Gamma = [\gamma]$ konvex. Setze $f : I \times I \to \mathbb{R}$, $f(s,t) := \langle \gamma(s) - \gamma(t), \vec{\nu}(t)\rangle$. Wegen der Konvexität von Γ gilt dann für jedes $t \in I$, dass $f(\cdot,t) \geq 0$ oder $f(\cdot,t) \leq 0$. Wir zeigen, dass sich die beiden Bedingungen ausschließen. Nehmen wir nämlich an, dass $t_1, t_2 \in I$ existieren mit $f(\cdot,t_1) \leq 0$ und $f(\cdot,t_2) \geq 0$, dann ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Es ist $t_1 = t_0 = t_2$, dann $f(\cdot,t_0) = 0$, d.h. $\operatorname{Spur}(\Gamma)$ ist eine Gerade und die Behauptung gilt.

(2) Œ $t_1 < t_2$, dann setze $M := \{t \in [t_1,t_2] \mid f(\cdot,t) \leq 0\} \subseteq [t_1,t_2]$.

M ist abgeschlossen, denn sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ mit $t_n \to t \in I$, dann folgt aus der Stetigkeit von f, dass $0 \geq f(s,t_n) \to f(s,t)$ $(s \in I)$, also $t \in M$. Damit folgt $t^* := \sup M \in M$, d.h. $f(\cdot,t^*) \leq 0$.

(a) Sei zunächst $t^* = t_2$, dann $f(\cdot,t^*) = 0$ und wir sind fertig, vgl. (1).

(b) Ist dagegen $t^* < t_2$, dann wähle $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [t^*,t_2]^{\mathbb{N}}$ mit $r_k \to t^*$. Da Γ konvex und $r_k \notin M$, ist $f(\cdot,r_k) \geq 0$, also $0 \leq f(s,r_k) \to f(s,t^*)$ $(s \in I)$, also $f(\cdot,t^*) = 0$. ■

Korollar 1.41

Sei Γ eine orientierte, konvexe $\mathcal{C}^2$-Kurve. Dann ist $\varkappa_\Gamma \leq 0$ oder $\varkappa_\Gamma \geq 0$.

Beweis

Sei γ eine Bogenlängenparametrisierung von Γ. Nach Lemma 1.40 ist Œ $\langle \gamma(s) - \gamma(t), \vec{\nu}(t)\rangle \geq 0$ $(s,t \in \mathbb{R})$. Der Satz von Taylor liefert ein $\eta \in [s,t]$ mit

$$\gamma(s) = \gamma(t) + \dot{\gamma}(t)(s-t) + \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(\eta)(s-t)^2,$$

d.h. $0 \leq \langle \gamma(s) - \gamma(t), \vec{\nu}(t)\rangle = \langle \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(\eta)(s-t)^2, \vec{\nu}(t)\rangle$ (da $\dot{\gamma}(t) \perp \vec{\nu}(t)$ für alle t).

Damit $0 \leq \langle \ddot{\gamma}(\eta), \vec{\nu}(t)\rangle \xrightarrow{s \to t} \langle \ddot{\gamma}(t), \vec{\nu}(t)\rangle = \varkappa(t)$, d.h. die skalare Krümmung wird nie positiv. ■

Satz 1.42

Sei Γ eine geschlossene, ebene, orientierte $\mathcal{C}^2$-Kurve mit $|\chi(\Gamma)| = 1$ und $\varkappa_\Gamma \geq 0$ oder $\varkappa_\Gamma \leq 0$.

Dann ist Γ konvex.

Beweis

Sei Œ $\varkappa_\Gamma \geq 0$ und $\chi(\Gamma) = 1$. Sei γ eine L-periodische Bogenlängenparametrisierung von Γ.

Angenommen, Γ wäre nicht konvex, d.h. es gäbe $t_0 \in [0, L)$, so dass $f : t \mapsto \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \vec{\nu}(t_0)\rangle$ sein Vorzeichen auf $[0, L)$ wechselt. Dann gibt es $t_*, t^* \in [0, L)\backslash\{t_0\}$ mit

$$f(t_*) = \min_{0\leq t\leq L} f(t) < 0 = f(t_0) < f(t^*) = \max_{0\leq t\leq L} f(t).$$

Damit $0 = \dot{f}(t^*) = \langle\dot\gamma(t^*), \vec{\nu}(t_0)\rangle$ und $0 = \dot{f}(t_*) = \langle\dot\gamma(t_*), \vec{\nu}(t_0)\rangle$; wegen $\dot\gamma(t_0)\perp\vec{\nu}(t_0)$ und $||\dot\gamma|| = 1$ folgt also $\dot\gamma(t_0) = \pm\dot\gamma(t_*) = \pm\dot\gamma(t^*)$ (mit unabhängigen Vorzeichen).

Also gibt es $s_1, s_2 \in \{t_0, t_*, t^*\}$ mit $s_1 < s_2$ und $\dot\gamma(s_1) = \dot\gamma(s_2)$; wegen $\dot\gamma(t) = e^{i\alpha(t)}$ (α Umlaufwinkel von γ) existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha(s_2) - \alpha(s_1) = 2\pi k$. Andererseits ist $\dot\alpha = \varkappa(\gamma) \geq 0$, d.h. $k \in \mathbb{N}_0$. Analog zeigt man $\alpha(s_1 + L)\alpha(s_2) = 2\pi l$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$.

Nach Voraussetzung ist

$$1 = \chi(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}(\alpha(s_1 + L) - \alpha(s_1)) = \frac{1}{2\pi}((\alpha(s_1 + L) - \alpha(s_2)) + (\alpha(s_2) - \alpha(s_1))).$$

Es gilt also entweder $(k, l) = (1, 0)$ oder $(k, l) = (0, 1)$.

Ist Œ $(k, l) = (0, 1)$, dann $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$ und $\dot\alpha \geq 0$, d.h. $\varkappa(s) = \alpha(s) = 0$ für alle $s \in [s_1, s_2]$. Wegen $\dot\gamma(s) = \varkappa(s) = 0$ folgt: $\gamma|_{[s_1,s_2]}$ ist ein Geradenstück, d.h.

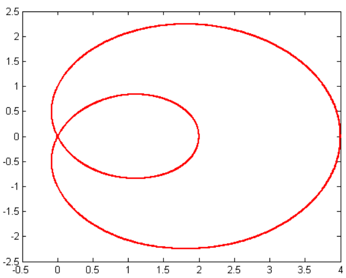
$$\gamma(s) = \gamma(s_1) + (s - s_1)\dot\gamma(s_1) = \gamma(s_1) \pm (s - s_1)\dot\gamma(t_0).$$

Damit gilt für alle $s \in [s_1, s_2]$

$$f(s) = \langle\gamma(s_1) \pm (s - s_1)\dot\gamma(t_0) - \gamma(t_0), \vec{\nu}(t_0)\rangle \overset{\dot\gamma(t_0)\perp\vec{\nu}(t_0)}{=} \langle\gamma(s_1) - \gamma(t_0), \vec{\nu}(t_0)\rangle = f(s_1)$$

Also ist $f(s_2) = f(s_1)$ im Widerspruch zu $f(t_*) < f(t_0) < f(t^*)$. ■

Beispiel 1.43



Für die „Pascalsche Schnecke“ $\Gamma = [\gamma]$ mit

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} a\cos(t)^2 + b\cos(t) \\ a\cos(t)\sin(t) + b\sin(t)\end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

ist $\varkappa > 0$, falls $a > b$.

Sie ist aber weder konvex noch einfach geschlossen.

Ihre Umlaufzahl ist 2.

Lemma 1.44

Sei Γ eine einfach geschlossene, konvexe $\mathcal{C}^2$-Kurve. Dann sind äquivalent:

(1) $\mathrm{Spur}(\Gamma)$ enthält ein Geradenstück;

(2) Für eine (und damit jede) Parametrisierung γ der Periode $L(\gamma)$ gibt es $0 \leq t_1 < t_2 < L(\gamma)$ und $\lambda > 0$ mit $\dot\gamma(t_1) = \lambda\dot\gamma(t_2)$.

Korollar 1.45

Seien Γ eine einfach geschlossene, konvexe $\mathcal{C}^2$-Kurve und G eine Gerade. Dann gelten:

(1) Schneidet G die Spur von Γ in drei verschiedenen Punkten, so enthält $G \cap \mathrm{Spur}(\Gamma)$ ein Geradenstück.

(2) Schneidet G die Spur von Γ in zwei verschiedenen Punkten tangential, so enthält $\mathrm{Spur}(\Gamma)$ ein Geradenstück.

1.5 Der Vierscheitelsatz

Definition 1.46

Sei γ eine ebene $\mathcal{C}^2$-Parametrisierung. Wir sagen, dass γ in $t \in I(\gamma)$ einen *Scheitelpunkt* besitzt, falls die Krümmung $\varkappa_\gamma$ in t ein relatives Extremum hat.

Beispiel 1.47

Sei γ eine L-periodische, punktsymmetrische $\mathcal{C}^2$-Parametrisierung, d.h. $x \in \operatorname{Spur}(\gamma) \Leftrightarrow -x \in \operatorname{Spur}(\gamma)$. Dann hat γ mindestens vier Scheitel in $[0, L)$: Es gibt $t_*, t^* \in [0, L)$ mit $\varkappa(t_*) = \min \varkappa$ und $\varkappa(t^*) = \max \varkappa$ und wegen der Punktsymmetrie werden diese Extrema in den „diagonal gegenüber liegenden Punkten“ noch einmal angenommen.

Satz 1.48 (Vierscheitelsatz)

Sei Γ eine konvexe, einfach geschlossene, ebene $\mathcal{C}^3$-Kurve. Dann besitzt jede periodische Parametrisierung von Γ mindestens vier Scheitel in jedem halboffenen Periodenintervall.

Beweis

Es sei γ Œ eine L-periodische Bogenlängenparametrisierung mit $\varkappa(t_0) = \min \varkappa$, $\varkappa(t_1) = \max \varkappa$ für $t_0 = 0$, $t_1 \in (0, L)$. Œ seien diese strikte Extrema und Œ stimme die Gerade G durch $\gamma(0), \gamma(t_1)$ mit der x_1-Achse überein (Translationen und Drehungen erhalten die Krümmung). Nach Korollar 1.45 können wir $G \cap \operatorname{Spur}(\gamma) = \{\gamma(0), \gamma(t_1)\}$ annehmen, sonst wäre ein Geradenstück in der Spur enthalten.

Angenommen, γ hätte keine weiteren Scheitel. Dann wäre $\dot\varkappa \geq 0$, $\dot\varkappa \not\equiv 0$ auf $(0, t_1)$ sowie $\dot\varkappa \leq 0$ und $\dot\varkappa \not\equiv 0$ auf (t_1, L). Nach Korollar 1.43 kann dann $\operatorname{Spur}(\gamma)$ nicht auf einer Seite von G liegen, also Œ $\gamma((0, t_1))$ oberhalb von G und $\gamma((t_1, L))$ unterhalb von G (sonst wende eine Drehung um 180° an). Daher ist $\dot\varkappa\gamma_2 \geq 0$ und $\dot\varkappa\gamma_2 \not\equiv 0$ auf $(0, t_1) \cap (t_1, L)$ und somit

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^L \dot\varkappa(t)\gamma_2(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^L (\varkappa(t)\gamma_2(t))^{\cdot} - \varkappa(t)\dot\gamma_2(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \varkappa(t)\gamma_2(t)\Big|_0^L - \int_0^L \varkappa(t)\dot\gamma_2(t)\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^L \varkappa(t)\dot\gamma_2(t)\, \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{2. Frenet}}{=} \int_0^L \dot{\vec\nu}_2(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \vec\nu_2(L) - \vec\nu_2(0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Also hat γ mindestens drei Scheitelpunkte in $[0, L)$; da zwischen zwei Maxima (Minima) mindestens noch ein Minimum (Maximum) liegen muss, folgt die Behauptung. ■

1.6 Die isoperimetrische Ungleichung

Definition 1.49

Sei Γ eine einfach geschlossene, ebene, orientierte $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann heißt

$$A(\Gamma) := \frac{1}{2}\int_0^{L(\gamma)} \det(\gamma(\tau)\dot\gamma(\tau))\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^{L(\gamma)} (\gamma_1(\tau)\dot\gamma_2(\tau) - \gamma_2(\tau)\dot\gamma_1(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

der *orientierte Flächeninhalt* von Γ.

Bemerkung 1.50

$A(\Gamma)$ ist unabhängig von von der Wahl der Parametrisierung γ.

Beispiel 1.51

Sei $\Gamma = [\gamma]$ der positiv orientierte Rand des Kreises mit Radius $r > 0$ und Zentrum $x = (x_1, x_2)$, d.h.

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x_1 + r\cos(t) \\ x_2 + r\sin(t)\end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt für den orientierten Flächeninhalt $A(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} A(\Gamma) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((x_1 + r\cos(\tau))r\cos(\tau) + (x_2 + r\sin(\tau))r\sin(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{r}{2}\int_0^{2\pi} (x_1\cos(\tau) + x_2\sin(\tau)) + \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(\tau)^2 + \sin(\tau)^2)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

Umläuft man den Kreis in entgegengesetzter Richtung (d.h. betrachtet man $\Gamma' := [\gamma(-(\cdot))]$), so erhält man $A(\Gamma') = -\pi r^2$.

Satz 1.52

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine einfach geschlossene, ebene, orientierte $\mathcal{C}^1$-Kurve. Zu einer Zerlegung $Z = \{t_0, ..., t_k\}$ von $[0, L(\gamma)]$ definiere $|Z| := \max_{1\le i\le k} t_{i-1} - t_i$ (*Feinheit* von Z) und

$$A(\gamma, Z) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\gamma_1(t_{i-1})(\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})) - \gamma_2(t_{i-1})(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))).$$

Dann gilt $A(\Gamma) = \lim_{|Z|\to 0} A(\gamma, Z)$.

Beweis

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\epsilon}{M^2 L(\gamma)}$ mit $M := ||\dot\gamma||_\infty$. Bezeichne mit F_i die einzelnen Summanden

$$F_i := (\gamma_1(t_{i-1})(\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})) - \gamma_2(t_{i-1})(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))), \qquad (i = 1, ..., k).$$

Beachte dazu: Der orientierte Flächeninhalt des von den Punkten $0, (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ aufgespannten Dreiecks ist

$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)).$$

Wende dies hier an auf die Punkte $0, \gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)$. Die F_i haben die Darstellung

$$\frac{1}{2}F_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma_1(t_{i-1})\dot\gamma_2(\tau) - \gamma_2(t_{i-1})\dot\gamma_1(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Wegen $|\gamma_j(t_{i-1}) - \gamma_j(\tau)| \leq M|\tau - t_{i-1}| \leq M(t_i - t_{i-1})$ folgt für $|Z| < \delta$, dass

$$\begin{aligned}
&\left|2F_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma_1(\tau)\dot\gamma_2(\tau) - \gamma_2(\tau)\dot\gamma_1(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right| \\
\leq\ & \int_{t_{i-1}}^{t_i} (|\gamma_1(t_{i-1}) - \gamma_i(\tau)|\underbrace{|\dot\gamma_2(\tau)|}_{\leq M} + |\gamma_2(t_{i-1}) - \gamma_2(\tau)|\underbrace{|\dot\gamma_1(\tau)|}_{\leq M}) \\
\leq\ & M^2(t_i - t_{i-1})^2 \\
\leq\ & M^2\delta(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Aufsummieren ergibt $|2A(\gamma, Z) - 2A(\Gamma)| \leq \epsilon$:

$$|2A(\gamma, Z) - 2A(\Gamma)| \leq \sum_{i=1}^k M^2\delta(t_i - t_{i-1}) = M^2\delta L(\gamma) \leq \epsilon. \qquad \blacksquare$$

Wiederholung 1.53

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch. Definiere

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{(der } k\text{-te „Fourier-Koeffizient“).}$$

Dann gilt die „Parsevalsche Gleichung“

$$\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\ \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Ist $f \in \mathcal{C}^1$, dann $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ und damit

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t) \qquad \text{glm. auf } [0, 2\pi].$$

Satz 1.54 (Isoperimetrische Ungleichung)

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine einfach geschlossene, ebene, orientierte $\mathcal{C}^1$-Kurve der Periode $L(\gamma)$. Dann gilt

$$|A(\Gamma)| \leq \frac{1}{4\pi}\text{Länge}(\Gamma)^2 \qquad (\text{Länge}(\Gamma) := L(\gamma|_{[0,L(\gamma)]})).$$

Genau dann gilt Gleichheit, wenn Γ ein Kreisrand ist.

Beweis

Identifiziere wieder $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Schritt 1: Sei zunächst Länge$(\Gamma) = 2\pi$ und γ eine Bogenlängenparametrisierung (insbesondere γ 2π-periodisch). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\dot\gamma(t)|^2\ \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Parseval}}{=} \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\dot\gamma}(k)|^2 \qquad (*) \\
&= \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|\widehat{\gamma}(k)|^2.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt wegen

$$\begin{aligned}
\dot\gamma(\tau)\overline{\gamma(\tau)} &= (\dot\gamma_1 + i\dot\gamma_2)(\gamma_1 - i\gamma_2) \\
&= (\dot\gamma_1\gamma_1 + \dot\gamma_2\gamma_2 + i(\dot\gamma_2\gamma_1 - \dot\gamma_1\gamma_2)),
\end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned} A(\Gamma) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \gamma_1(\tau)\dot{\gamma}_2(\tau) - \gamma_2(\tau)\dot{\gamma}_1(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\Im\left(\int_0^{2\pi} \dot{\gamma}(\tau)\overline{\gamma(\tau)}\ \mathrm{d}\tau\right) \\ &\overset{\text{Parseval}}{=} \pi\Im\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\widehat{\dot{\gamma}}(k)}_{=ik\widehat{\gamma}(k)}\ \overline{\widehat{\gamma}(k)}\right) \\ &= \pi\Im\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} ik|\widehat{\gamma}(k)|^2\right) \\ &= \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} k|\widehat{\gamma}(k)|^2 \qquad (**), \end{aligned}$$

also $\pi - A(\Gamma) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^2 - k)|\widehat{\gamma}(k)|^2 \geq 0$.

Analog sieht man $\pi + A(\Gamma) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^2 + k)|\widehat{\gamma}(k)|^2 \geq 0$, d.h.

$$|A(\Gamma)| \leq \pi = \frac{(2\pi)^2}{4\pi} = \frac{\text{Länge}(\Gamma)^2}{4\pi}.$$

Schritt 2: Es gilt $|A(\Gamma)| = \pi \Leftrightarrow \widehat{\gamma}(k) = 0$ für alle $k \notin \{-1, 0, 1\}$. Also ist in dem Fall

$$\gamma(t) = \widehat{\gamma}(0) + \widehat{\gamma}(-1)e^{-it} + \widehat{\gamma}(1)e^{it},$$

d.h. $||\widehat{\gamma}(-1)|^2 - |\widehat{\gamma}(1)|^2| = 1$ nach $(**)$ und $||\widehat{\gamma}(-1)|^2 + |\widehat{\gamma}(1)|^2| = 1$ nach $(*)$.
Also ist $(|\widehat{\gamma}(-1)|, |\widehat{\gamma}(1)|) = (0, 1)$ oder $(|\widehat{\gamma}(-1)|, |\widehat{\gamma}(1)|) = (1, 0)$, d.h. Γ ein Kreis um $\widehat{\gamma}(0)$.

Schritt 3: Im Allgemeinen betrachte die Kurve $\tilde{\Gamma} := [\tilde{\gamma}]$ mit

$$\tilde{\gamma} := \frac{2\pi}{\text{Länge}(\Gamma)}\gamma,$$

dann $\text{Länge}(\tilde{\Gamma}) = 2\pi$ und

$$A(\tilde{\Gamma}) = \left(\frac{2\pi}{\text{Länge}(\Gamma)}\right)^2 A(\Gamma).$$ ■

1.7 Raumkurven

Sprechweise 1.55

Ist γ eine Parametrisierung im $\mathbb{R}^3$, so heißt $\Gamma := [\gamma]$ eine *Raumkurve*.

Lemma 1.56

Sei γ eine reguläre $\mathcal{C}^2$-Parametrisierung im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle t:

$$\vec{\varkappa}_\gamma(t) \neq 0 \Leftrightarrow \dot\gamma(t) \text{ und } \ddot\gamma(t) \text{ sind linear unabhängig.}$$

Diese Eigenschaft bleibt bei Umparametrisierung erhalten.

Beweis

(1) Sei zunächst $\{\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\}$ linear abhängig, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda\dot\gamma(t) = \ddot\gamma(t)$. Dann ist

$$\vec{\varkappa}(t) = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||^2}\ddot\gamma(t) - \frac{\langle\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\rangle}{||\dot\gamma(t)||^4}\dot\gamma(t) = \mu\dot\gamma(t) \text{ für ein } \mu \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Wegen $\vec{\varkappa}(t) \perp \dot\gamma(t)$ folgt $\vec{\varkappa}(t) = 0$.

(2) Ist $\vec{\varkappa}(t) = 0$, dann sind wegen $(*)$ $\dot\gamma(t)$ und $\ddot\gamma(t)$ linear abhängig.

(3) Dies ist invariant unter einer Umparametrisierung φ, da $\vec{\varkappa}_{\gamma\circ\varphi} = \vec{\varkappa}_\gamma \circ \varphi$.

Definition 1.57

Eine $\mathcal{C}^2$-Raumkurve Γ heißt *Frenet-Raumkurve*, falls für eine (und damit jede) Parametrisierung γ von Γ gilt: $\forall t \in I(\gamma) : \dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)$ sind linear unabhängig.

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Frenet-Raumkurve. Definiere

$$\kappa_\gamma(t) := ||\vec{\varkappa}_\gamma(t)|| \qquad \vec{\eta}_\gamma(t) := \frac{\vec{\varkappa}_\gamma(t)}{||\vec{\varkappa}_\gamma(t)||} = \frac{\vec{\varkappa}_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} \qquad (t \in I(\gamma))$$

Dann heißt κ_γ die *skalare Krümmung von γ* und $\kappa_\Gamma := [\kappa_\gamma]$ die *skalare Krümmung von Γ*.

$\vec{\eta}_\gamma$ heißt das *Hauptnormalenfeld von γ* und $\vec{\eta}_\Gamma := [\vec{\eta}_\gamma]$ das *Hauptnormalenfeld von Γ*.

Bemerkung 1.58

(1) κ_Γ und $\vec{\eta}_\Gamma$ sind wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Parametrisierung γ.

(2) κ_γ berechnet sich durch die Formel

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||^3}\sqrt{||\dot\gamma(t)||^2||\ddot\gamma(t)||^2 - \langle\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\rangle^2}.$$

(3) Sei γ eine ebene Parametrisierung. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann gelten $\kappa_\gamma = |\varkappa_\gamma|$ und $\vec{\varkappa}_\gamma = \varkappa_\gamma\vec{\nu}_\gamma = \kappa_\gamma\vec{\eta}_\gamma$, d.h. $\vec{\eta}_\gamma = \frac{\varkappa_\gamma}{||\vec{\varkappa}_\gamma||}\vec{\nu}_\gamma$.

Die skalare Krümmung $\varkappa$ einer ebenen Kurve muss also nicht mit der skalaren Krümmung κ der zugehörigen Raumkurve übereinstimmen!

Wiederholung 1.59

Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2b_2 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; \qquad \langle\vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}\rangle = 0 = \langle\vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\rangle.$$

Sind $\vec{a}, \vec{b}$ orthonormal, dann ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ eine *Orthonormalbasis*.
Diese ist *positiv orientiert*, d.h. $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) = +1$.

Definition 1.60
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine orientierte Frenet-Raumkurve. Definiere für $t \in I(\gamma)$

$$\vec{t}_\gamma(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||}, \qquad \vec{b}_\gamma(t) := \vec{t}_\gamma(t) \times \vec{\eta}_\gamma(t).$$

$\vec{t}_\gamma$ heißt das *Tangenteneinheitsvektorfeld von γ* und $\vec{t}_\Gamma := [\vec{t}_\gamma]$ das *Tangenteneinheitsvektorfeld von Γ*.
$\vec{b}_\gamma$ heißt das *Binormalenvektorfeld von γ* und $\vec{b}_\Gamma := [\vec{b}_\gamma]$ das *Binormalenvektorfeld von Γ*.

Bemerkung 1.61
(1) $\vec{t}_\Gamma$ und $\vec{b}_\Gamma$ sind wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Parametrisierung γ.
(2) $\{\vec{t}_\gamma, \vec{\eta}_\gamma, \vec{b}_\gamma\}$ bildet eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, das *begleitende Dreibein* von γ.

Lemma 1.62
Der Binormalenvektor $\vec{b}_\gamma$ einer orientierten Frenet-Raumkurve $\Gamma = [\gamma]$ lässt sich berechnen durch

$$\vec{b}_\gamma(t) = \frac{1}{\kappa_\gamma(t)} \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||^3}.$$

Beweis
Sei $t \in I(\gamma)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{b}(t) &= \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} \times \frac{\dot{\vec{\varkappa}}(t)}{\kappa(t)} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} \times \frac{1}{\kappa(t)} \left(\frac{\ddot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||^2} - \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle \dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||^2} \right) \\ &= \frac{1}{||\dot{\gamma}(t)||^3} \frac{1}{\kappa(t)} (\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)). \end{aligned}$$

■

Definition 1.63
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine $\mathcal{C}^3$-Frenet-Raumkurve. Definiere für $t \in I(\gamma)$

$$\tau_\gamma(t) := \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{\kappa_\gamma(t)^2 ||\dot{\gamma}(t)||^6}.$$

τ_γ heißt die *Torsion (Windung) von γ* und $\tau_\Gamma := [\tau_\gamma]$ die *Torsion (Windung) von Γ*.

Bemerkung 1.64
τ_Γ ist wohldefiniert: Seien φ eine Parametertransformation, $s \in I(\gamma)$, $t = \varphi(s)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \dot{\varphi}(s)\dot{\gamma}(t); \\ \ddot{\sigma}(t) &= (\dot{\varphi}(s))^2 \ddot{\gamma}(t) + \ddot{\varphi}(s)\dot{\gamma}(t); \\ \dddot{\sigma}(t) &= (\dot{\varphi}(s))^3 \dddot{\gamma}(t) + 3\dot{\varphi}(s)\ddot{\varphi}(s)\ddot{\gamma}(t) + \dddot{\varphi}(s)\dot{\gamma}(t). \end{aligned}$$

Durch geschickte Zeilenadditionen erhalten wir

$$\det(\dot{\sigma}(t), \ddot{\sigma}(t), \dddot{\sigma}(t)) \overset{\dot{\varphi}(s) \neq 0}{=} \det(\dot{\varphi}(s)\dot{\gamma}(t), \dot{\varphi}(s)^2 \ddot{\gamma}(t), \dot{\varphi}(s)^3 \dddot{\gamma}(t)) = \dot{\varphi}(s)^6 \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t)).$$

Weiter ist $||\dot{\sigma}(t)||^6 = \dot{\varphi}(s)^6 ||\dot{\gamma}(t)||^6$, wegen $\kappa_\sigma(s) = \kappa_\gamma(t)$ also $\tau_{\gamma \circ \varphi}(s) = \tau_\gamma(t)$, d.h. $\tau_{\gamma\circ\varphi} = \tau_\gamma \circ \varphi$.

Lemma 1.65
Ist γ eine Bogenlängenparametrisierung der $\mathcal{C}^3$-Frenet-Raumkurve Γ, so gilt für alle $t \in I(\gamma)$:

$$\tau_\gamma(t) = \langle \vec{\eta}^{\,\cdot}_\gamma(t), \vec{b}_\gamma(t) \rangle.$$

Beweis
Wegen $\vec{\varkappa}(t) = \ddot{\gamma}(t)$ und $\kappa(t) = ||\ddot{\gamma}(t)||$ ($t \in I(\gamma)$) ist

$$\vec{\eta}^{\,\cdot}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\ddot{\gamma}(t)}{||\ddot{\gamma}(t)||} = \frac{||\ddot{\gamma}(t)||\dddot{\gamma}(t) - \frac{\ddot{\gamma}(t)\langle\ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t)\rangle}{||\ddot{\gamma}(t)||}}{||\ddot{\gamma}(t)||},$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\eta}^{\,\cdot}(t), \vec{b}(t) \rangle &= \left\langle \frac{||\ddot{\gamma}(t)||\dddot{\gamma}(t) - \frac{\ddot{\gamma}(t)\langle\ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t)\rangle}{||\ddot{\gamma}(t)||}}{||\ddot{\gamma}(t)||}, \frac{1}{\kappa(t)} \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||^3} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\dddot{\gamma}(t)}{||\ddot{\gamma}(t)||} - \frac{\langle\ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t)\rangle\ddot{\gamma}(t)}{||\ddot{\gamma}(t)||^3}, \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\kappa(t)} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\kappa(t)} \langle \dddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) - \ddot{\gamma}(t) \rangle \\
&= \frac{1}{\kappa(t)^2} \det(\dddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) \\
&= \frac{1}{\kappa(t)^2} \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t)).
\end{aligned}$$

■

Beispiel 1.66
Eine Bogenlängenparametrisierung der Helix mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $2\pi\alpha$ ($\alpha > 0$) ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\beta t) \\ r\sin(\beta t) \\ \alpha\beta t \end{pmatrix} \qquad \beta := \frac{1}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}.$$

Wir zeigen, dass die Helix konstante Krümmung und konstante Tosion hat:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= (-r\beta\sin(\beta t), r\beta\cos(\beta t), \alpha\beta); \\
\ddot{\gamma}(t) &= (-r\beta^2\sin(\beta t), -r\beta^2\cos(\beta t), 0); \\
\kappa(t) &= ||\ddot{\gamma}(t)|| = r\beta^2; \\
\vec{\eta}(t) &= \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\kappa(t)} = (-\cos(\beta t), -\sin(\beta t), 0); \\
\vec{b}(t) &= \dot{\gamma}(t) \times \vec{\eta}(t) = (\alpha\beta\sin(\beta t), -\alpha\beta\cos(\beta t), \beta r); \\
\vec{\eta}^{\,\cdot}(t) &= (\beta\sin(\beta t), -\beta\cos(\beta t), 0); \\
\tau(t) &= \langle \vec{\eta}^{\,\cdot}(t), \vec{b}(t) \rangle = \alpha\beta^2.
\end{aligned}$$

Satz 1.67 (Frenet-Gleichungen)
Seien Γ eine $\mathcal{C}^3$-Frenet-Raumkurve, γ eine Bogenlängenparametrisierung von Γ. Dann gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{t}_\gamma = \kappa_\gamma\vec{\eta}_\gamma, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\eta}_\gamma = -\kappa_\gamma\vec{t}_\gamma + \tau_\gamma\vec{b}_\gamma, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}_\gamma = -\tau_\gamma\vec{\eta}_\gamma.$$

Beweis
Da γ Bogenlängenparametrisierung, ist $\vec{t} = \dot{\gamma}$, d.h. $\vec{t}^{\,\cdot} = \ddot{\gamma} = \vec{\varkappa} = \kappa\vec{\eta}$.

Weiter gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{||\vec{\eta}(t)||^2}_{\equiv 1} = 2\langle \vec{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}}(t), \vec{\eta}(t)\rangle \qquad \text{(d.h. } \vec{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}} \perp \vec{\eta}\text{);} \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\langle \vec{\eta}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle}_{=0} = \langle \vec{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle + \underbrace{\langle \vec{\eta}(t), \ddot{\gamma}(t)\rangle}_{=\kappa(t)}. \end{aligned}$$

Da $\{\vec{t}_\gamma, \vec{\eta}_\gamma, \vec{b}_\gamma\}$ Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, gilt nach Fourier

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\eta}(t) &= \langle \vec{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle \dot{\gamma}(t) + \underbrace{\langle \vec{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}}(t), \vec{\eta}(t)\rangle}_{=0} \vec{\eta}(t) + \underbrace{\langle \vec{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}}(t), \vec{b}(t)\rangle \vec{b}(t)}_{=\tau(t)} \\ &= -\kappa(t)\dot{\gamma}(t) + \tau(t)\vec{b}(t). \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir für die Ableitung des Binormalenvektors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\gamma}(t) \times \vec{\eta}(t)) \\ &= \ddot{\gamma}(t) \times \vec{\eta}(t) + \dot{\gamma}(t) \times \vec{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}}(t) \\ &= \kappa(t)\vec{\eta}(t) \times \vec{\eta}(t) + \dot{\gamma}(t) \times (-\kappa(t)\vec{t}(t) + \tau(t)\vec{b}(t)) \\ &= \dot{\gamma}(t) \times \tau(t)\vec{b}(t) \\ &= \tau(t)(\dot{\gamma}(t) \times \vec{b}(t)) \\ &= \tau(t)\vec{\eta}(t). \end{aligned}$$

■

Satz 1.68

Sei Γ eine $\mathcal{C}^3$-Frenet-Raumkurve. Dann gilt: Γ ist eben $\Leftrightarrow$ Γ ist torsionsfrei.

Beweis

Seien γ eine Bogenlängenparametrisierung von Γ und $t_0 \in I(\gamma)$.

$\Rightarrow$: Sei Γ eben. Dann gibt es einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^3$, so dass für alle $t \in I(\gamma)$ gilt:

$$\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\gamma}(t), v\rangle = \langle \ddot{\gamma}(t), v\rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{\varkappa}(t), v\rangle = 0.$$

Wegen $\vec{\varkappa}(t) = \varkappa(t)\vec{\eta}(t)$ und $\varkappa > 0$ folgt

$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\varkappa(t)} = \pm v \equiv \text{konstant},$$

d.h. $|\tau(t)| = ||\tau(t)\vec{\eta}(t)|| = ||\vec{b}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)|| = 0$, d.h. Γ torsionsfrei.

$\Leftarrow$: Sei Γ torsionsfrei, d.h. $\tau \equiv 0$. Dann $\vec{b}^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv 0$, d.h. $\vec{b} \equiv v \in \mathbb{R}^3$, d.h.

$$\forall t \in I(\gamma): \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v\rangle = \langle \dot{\gamma}(t)\vec{b}(t)\rangle = 0 \Rightarrow \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v\rangle = \langle \gamma(t_0) - \gamma(t_0), v\rangle = 0,$$

d.h. $\mathrm{Spur}(\Gamma) \subseteq \gamma(t_0) + \mathrm{span}\{v\}^\perp$. ■

1.8 Der Hauptsatz der Raumkurventheorie

Wiederholung 1.69 (Satz von Picard-Lindelöf)

Sei $f = f(t,x) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und Lipschitz-stetig in x gleichmäßig in t, d.h. es gibt $L > 0$ mit

$$\forall t \in [a,b],\ x,y \in \mathbb{R} : |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

Dann existiert zu jedem $(t_0, x_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ genau eine Lösung von

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& f(t,x(t)) \quad t \in [a,b] \\ x(t_0) &=& x_0 \end{cases}.$$

Satz 1.70 (Hauptsatz der Raumkurventheorie)

Seien I ein Intervall und $l \in \mathbb{N}_0,\ \tau \in \mathcal{C}^l(I),\ 0 < \kappa < \mathcal{C}^{l+1}(I)$.

(1) Dann existiert eine $\mathcal{C}^{l+3}$-Parametrisierung $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge mit $\kappa_\gamma = \kappa$ und $\tau_\gamma = \tau$.

(2) Haben $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^3$ die Eigenschaften $\kappa_\gamma = \kappa$ und $\tau_\gamma = \tau$, so gibt es $A \in \mathrm{SO}(3)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $\forall t \in I : \gamma_1(t) = A\gamma_2(t) + x_0$, d.h. bis auf Rotation und Translation ist die Kurve eindeutig bestimmt.

Beweis

(1) Für γ gilt nach den Frenet-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{pmatrix} \gamma \\ \vec{t} \\ \vec{\eta} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \vec{t} \\ \vec{\eta} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \gamma(t_0) &=& 0 \\ \vec{t}(t_0) &=& \vec{e}_1 \\ \vec{\eta}(t_0) &=& \vec{e}_2 \\ \vec{b}(t_0) &=& \vec{e}_3 \end{cases}.$$

Nach Picard-Lindelöf existiert genau eine Lösung $(\gamma, \vec{t}, \vec{\eta}, \vec{b}) \in \mathcal{C}^1$. Es gelten sogar $\gamma \in \mathcal{C}^{l+3}$ und $\vec{t} \in \mathcal{C}^{l+2}, \vec{\eta} \in \mathcal{C}^{l+1}, \vec{b} \in \mathcal{C}^{l+1}$. Wir zeigen, dass γ die gewünschten Eigenschaften hat.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||\vec{t}(t)||^2 &= 2\langle \vec{t}(t), \vec{t}^{\cdot}(t)\rangle \overset{\mathrm{Dgl}}{=} 2\langle \vec{t}(t), \kappa\vec{\eta}(t)\rangle = 2\kappa\langle \vec{t}(t), \vec{\eta}(t)\rangle; \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||\vec{\eta}(t)||^2 &= 2\langle \vec{\eta}(t), \vec{\eta}^{\cdot}(t)\rangle \overset{\mathrm{Dgl}}{=} 2\langle \vec{\eta}(t), -\kappa\vec{t}(t) + \tau\vec{b}(t)\rangle = -2\kappa\langle \vec{\eta}(t), \vec{t}(t)\rangle + 2\tau\langle \vec{\eta}(t), \vec{b}(t)\rangle \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||\vec{b}(t)||^2 &= 2\langle \vec{b}(t), \vec{b}^{\cdot}(t)\rangle \overset{\mathrm{Dgl}}{=} 2\langle \vec{b}(t), -\tau\vec{\eta}(t)\rangle = -2\tau\langle \vec{b}(t), \vec{\eta}(t)\rangle; \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle \vec{t}(t), \vec{\eta}(t)\rangle &= \langle \underbrace{\kappa\vec{\eta}(t)}_{=\vec{t}^{\cdot}(t)}, \vec{\eta}(t)\rangle + \langle \vec{t}(t), \underbrace{-\kappa\vec{t}(t) + \tau\vec{b}(t)}_{=\vec{\eta}^{\cdot}(t)}\rangle = \kappa||\vec{\eta}(t)||^2 - \kappa||\vec{t}(t)||^2 + \tau\langle \vec{t}(t), \vec{b}(t)\rangle \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle \vec{t}(t), \vec{b}(t)\rangle &= \langle \underbrace{\kappa\vec{\eta}(t)}_{\vec{t}^{\cdot}(t)}, \vec{b}(t)\rangle + \langle \vec{t}(t), \underbrace{-\tau\vec{\eta}(t)}_{=\vec{b}^{\cdot}(t)}\rangle = \kappa\langle \vec{\eta}(t), \vec{b}(t)\rangle - \tau\langle \vec{t}(t), \vec{\eta}(t)\rangle \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle \vec{\eta}(t), \vec{b}(t)\rangle &= \langle \underbrace{-\kappa\vec{t}(t) + \tau\vec{b}(t)}_{=\vec{\eta}^{\cdot}(t)}, \vec{b}(t)\rangle + \langle \vec{\eta}(t), \underbrace{-\tau\vec{\eta}(t)}_{=\vec{b}^{\cdot}(t)}\rangle = -\kappa\langle \vec{t}(t), \vec{b}(t)\rangle + \tau||\vec{b}(t)||^2 - \tau||\vec{\eta}(t)||^2.
\end{aligned}$$

In Matrix-Vektor-Form:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{pmatrix} ||\vec{t}(t)||^2 \\ ||\vec{\eta}(t)||^2 \\ ||\vec{b}(t)||^2 \\ \langle \vec{t}(t), \vec{\eta}(t)\rangle \\ \langle \vec{t}(t), \vec{b}(t)\rangle \\ \langle \vec{\eta}(t), \vec{b}(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\kappa & 0 & 2\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\tau \\ -\kappa & \kappa & 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & \kappa \\ 0 & -\tau & \tau & 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||\vec{t}(t)||^2 \\ ||\vec{\eta}(t)||^2 \\ ||\vec{b}(t)||^2 \\ \langle \vec{t}(t), \vec{\eta}(t)\rangle \\ \langle \vec{t}(t), \vec{b}(t)\rangle \\ \langle \vec{\eta}(t), \vec{b}(t)\rangle \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ||\vec{t}(t_0)||^2 \\ ||\vec{\eta}(t_0)||^2 \\ ||\vec{b}(t_0)||^2 \\ \langle \vec{t}(t_0), \vec{\eta}(t_0)\rangle \\ \langle \vec{t}(t_0), \vec{b}(t_0)\rangle \\ \langle \vec{\eta}(t_0), \vec{b}(t_0)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht, dass $(1,1,1,0,0,0)^T$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist, d.h. nach dem Eindeutigkeitssatz:

$$\forall t \in I(\gamma) : \begin{pmatrix} ||\vec{t}(t)||^2 \\ ||\vec{\eta}(t)||^2 \\ ||\vec{b}(t)||^2 \\ \langle \vec{t}(t), \vec{\eta}(t)\rangle \\ \langle \vec{t}(t), \vec{b}(t)\rangle \\ \langle \vec{\eta}(t), \vec{b}(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\{\vec{t}(t), \vec{\eta}(t), \vec{b}(t)\}$ für alle Zeiten $t \in I(\gamma)$ eine Orthonormalbasis. Weiter gelten:

(a) $\vec{b}(t_0) = \vec{t}(t_0) \times \vec{\eta}(t_0)$, also $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{\eta}$ (andernfalls müsste $\vec{b}(t) = -\vec{t}(t) \times \vec{\eta}(t)$ sein für ein $t \geq 0$; ein stetiger Vorzeichenwechsel ist aber nicht möglich, da die Vektoren normiert sind.).

(b) γ ist eine Bogenlängenparametrisierung: Nach der Dgl. ist $\dot{\gamma}(t) = \vec{t}(t)$, d.h. $||\dot{\gamma}(t)|| = ||\vec{t}(t)|| = 1$ für alle t.

(c) $\vec{\eta} = \vec{\eta}_\gamma$ und $\kappa = \kappa_\gamma$, denn $\ddot{\gamma}(t) = \dot{\vec{t}}(t) = \kappa\vec{\eta}(t)$ $(\kappa > 0)$. Damit auch $\vec{b} = \vec{b}_\gamma$ wegen $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{\eta}$.

(d) $\tau = \tau_\gamma$, denn nach der Dgl gilt

$$\tau_\gamma = \langle \dot{\vec{\eta}}_\gamma, \vec{b}_\gamma \rangle = \langle -\kappa\vec{t}_\gamma + \tau\vec{b}_\gamma, \vec{b}_\gamma \rangle = \tau \langle \vec{b}_\gamma, \vec{b}_\gamma \rangle = \tau.$$

(2) Seien $\gamma_1 = \gamma$ aus (1) und $A \in \mathrm{SO}(3)$ mit

$$A\vec{t}_{\gamma_2}(t_0) = \vec{e}_1 \qquad A\vec{\eta}_{\gamma_2}(t_0) = \vec{e}_2 \qquad A\vec{b}_{\gamma_2}(t_0) = \vec{e}_3.$$

Setze $\sigma(t) := A(\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0))$, dann

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) &= A(\dot{\gamma}_2(t)) & \vec{t}_\sigma(t_0) &= \dot{\sigma}(t_0) = \vec{e}_1 \\ \ddot{\sigma}(t) &= A(\ddot{\gamma}_2(t)) & \vec{\eta}_\sigma(t_0) &= \vec{e}_2 \\ \sigma(t_0) &= 0 & \vec{b}_\sigma(t_0) &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \end{cases}.$$

Damit ist σ eine Lösung der Dgl.; nach dem Eindeutigkeitssatz also $\sigma \equiv \gamma$, d.h.

$$\forall t \in I : \gamma(t) = A^{-1}\gamma(t) + \gamma_2(t_0).$$ ∎

Bemerkung 1.71

SO(3), die „spezielle Gruppe der orthogonalen Matrizen", ist die Menge aller $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = 1$ und $A^T = A^{-1}$. Die Elemente von SO(3) beschreiben die Drehungen im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 1.72

Seien $\gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t))$ und $\gamma_2(t) := (\cos(t), -\sin(t))$. Dann $\varkappa_{\gamma_1} \equiv +1$, $\varkappa_{\gamma_2} \equiv -1$ und $\gamma_2 \equiv A\gamma_1$ mit $A := \left(\begin{smallmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Wegen $\det(A) = -1$ ist $A \notin \mathrm{SO}(2)$.

Aufgefasst als Raumkurve sind dagegen $\kappa_{\gamma_1} \equiv 1 \equiv \kappa_{\gamma_2}$ und $\tau_{\gamma_1} \equiv 0 \equiv \tau_{\gamma_2}$ sowie

$$\begin{pmatrix} \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\det(A) = +1$ und $A^T = A^{-1}$, d.h. $A \in \mathrm{SO}(3)$.

Korollar 1.73

Eine $\mathcal{C}^3$-Frenet-Raumkurve mit konstanter Krümmung $\kappa > 0$ und konstanter Torsion τ geht durch Verschiebung und Anwendung einer Abbildung aus SO(3) hervor aus einem Teil der Schraubenlinie

$$\gamma(t) := \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \cos(t), \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \sin(t), \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} t \right).$$

1.9 Der Satz von Fenchel

Definition 1.74

Sei Γ eine $\mathcal{C}^2$-Kurve im $\mathbb{R}^n$ mit Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

$$\kappa_{\text{tot}}(\Gamma) := \int_a^b \kappa_\gamma(t) ||\dot{\gamma}(t)|| \ \mathrm{d}t$$

heißt die *Raumkrümmung* von Γ.

Die *Indikatrix* einer $\mathcal{C}^1$-Parametrisierung γ im $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\gamma_{\text{ind}} : I(\gamma) \to \mathbb{S}^{n-1},\ t \mapsto \gamma_{\text{ind}}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||} = \vec{t}_\gamma(t).$$

Bemerkung 1.75

$\kappa_{\text{tot}}(\Gamma)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Lemma 1.76

Seien Γ eine geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^n$ und γ eine L-periodische Parametrisierung. Dann gelten:

(1) Spur(γ_{ind}) ist in keiner offenen Hemisphäre (d.h. Halbkugelschale ohne „Äquator“) von $\mathbb{S}^{n-1}$ enthalten.

(2) Spur(γ_{ind}) ist genau dann in einer abgeschlossenen Hemisphäre von $\mathbb{S}^{n-1}$ enthalten, wenn Spur(γ) $\subseteq \{x_0\} + V$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Beweis

Œ sei γ Parametrisierung nach der Bogenlänge mit Periode L. Nehmen wir an, dass Spur(γ_{ind}) $\subseteq \mathbb{S}^{n-1}$, Œ in der oberen Hemisphäre, d.h. Spur(γ_{ind}) $\subseteq \mathbb{S}^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Dann ist $\dot{\gamma}_n \geq 0$ auf ganz $I(\gamma)$. Wegen $\int_0^L \dot{\gamma}_n(t)\ \mathrm{d}t = \gamma_n(L) - \gamma_n(0) = 0$ folgt dann, dass sogar $\dot{\gamma}_n \equiv 0$. Damit sind (1) und „$\Rightarrow$“ in (2) gezeigt.

Sei nun Spur(γ) $\subseteq \{x_0\} + V$, dann gilt für $\nu \in \mathbb{S}^{n-1} \cap V^\perp$, dass $\langle \gamma(t), \nu \rangle = \text{const.}$, d.h. $\langle \dot{\gamma}(t), \nu \rangle = 0$ für alle t. Also ist Spur(γ_{ind}) $\subseteq \mathbb{S}^{n-1} \cap \{\nu\}^\perp = \mathbb{S}^{n-1} \cap V$, insbesondere also in einer abgeschlossenen Hemisphäre enthalten. ■

Lemma 1.77

Sei γ eine L-periodische $\mathcal{C}^1$-Parametrisierung nach der Bogenlänge im $\mathbb{R}^3$ mit Spur(γ) $\subseteq \mathbb{S}^2$.

Ist $L < 2\pi$ (bzw. $L = 2\pi$), so ist Spur(γ) in einer offenen (abgeschlossenen) Hemisphäre enthalten.

Beweis

Seien $\vec{p} := \gamma(0)$ und $\vec{q} := \gamma(\frac{L}{2})$. Œ (nach eventueller Drehung) seien $\vec{p}, \vec{q}, \vec{N} \in \{x \in \mathbb{S}^2 \mid x_2 = 0\}$, wobei $\vec{N} := (0,0,1)$ (der „Nordpol“). Weiter gelte $||\vec{p} - \vec{N}|| = ||\vec{q} - \vec{N}||$, d.h. $\vec{p} = (a,0,b)$ und $\vec{q} = (-a,0,b)$ für gew. $a,b \in \mathbb{R}$. Œ sei $\gamma([0,\frac{L}{2}]) \cap \{x \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 = 0\} \neq \emptyset$ (sonst ist nichts zu zeigen). Definiere $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1,x_2,x_3) \mapsto (-x_1,-x_2,x_3)$. Dann sind $A\vec{p} = \vec{q}$ und $A\vec{q} = \vec{p}$, d.h.

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq \frac{L}{2} \\ A\gamma(t - \frac{L}{2}) & \frac{L}{2} \leq t \leq L \end{cases}$$

definiert eine L-periodische, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve mit $L(\tilde{\gamma}|_{[0,L]}) = L$, $[\tilde{\gamma}]$ geschlossen und Spur($\tilde{\gamma}$) invariant unter A, es gibt daher zwei Punkte $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in$ Spur($\tilde{\gamma}$) $\cap \{x \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 = 0\}$ mit $A\vec{p}_1 = \vec{p}_2$.

Wir verwenden jetzt, dass die kürzeste Verbindung zweier diagonal gegenüber liegender Punkte die Länge π hat. Da $\tilde{\gamma}|_{[0,L]}$ sich zusammensetzt aus der Verbindung von $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ und der von $\vec{p}_1$ nach $\vec{p}_2$, folgt $L = L(\tilde{\gamma}|_{[0,L]}) \geq \pi + \pi = 2\pi$, wobei „$=$“ nur gilt, wenn Spur($\tilde{\gamma}$) auf einem Großkreis liegt. Dann liegt Spur(γ) aber auf dem selben Großkreis, d.h. Rand einer Hemisphäre. ■

Satz 1.78 (Fenchel)
Seien Γ eine geschlossene $\mathcal{C}^2$-Frenet-Raumkurve und γ eine L-periodische Parametrisierung von Γ.
Dann ist $\kappa_{\text{tot}} \geq 2\pi$ und es gilt „=“ genau dann, wenn Γ eben, einfach geschlossen (und konvex) ist.

Beweis

Œ sei γ eine Bogenlängenparametrisierung. Nach Lemma 1.76 (1) ist $\text{Spur}(\gamma_{\text{ind}})$ nicht Teilmenge einer offenen Hemisphäre. Mit Lemma 1.77 folgt: $L(\gamma_{\text{ind}}|_{[0,L]}) \geq 2\pi$, d.h.

$$2\pi \leq \int_0^L ||\dot{\gamma}_{\text{ind}}(t)||\ \mathrm{d}t = \int_0^L ||\ddot{\gamma}(t)||\ \mathrm{d}t = \int_0^L \kappa_\gamma(t)\ \mathrm{d}t = \kappa_{\text{tot}}(\Gamma).$$

Dabei gilt „=“ genau dann, wenn γ_{ind} ein einfach durchlaufener Großkreis ist.

Also ist $\text{Spur}(\gamma_{\text{ind}})$ in einer abgeschlossenen Hemisphäre von $\mathbb{S}^{n-1}$ enthalten; mit Lemma 1.76 (2) folgt, dass $\text{Spur}(\gamma) \subseteq \{x_0\} + V$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und einen 2-dimensionalen Unterraum V des $\mathbb{R}^3$.

Damit ist γ eben und einfach geschlossen.

Für Frenet-Raumkurven gilt außerdem $\kappa_\gamma > 0$, d.h. $|\varkappa_\gamma| \equiv \kappa_\gamma > 0$; nach Satz 1.42 ist Γ also konvex. ■

1.10 Frenetkurven in höheren Dimensionen

Definition 1.79

Eine $\mathcal{C}^{n-1}$-Kurve Γ im $\mathbb{R}^n$ heißt *Frenetkurve*, falls für eine Parametrisierung γ von Γ und alle $t \in I(\gamma)$ gilt: $\{\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t), ..., \gamma^{(n-1)}(t)\}$ ist linear unabhängig.

Bemerkung 1.80

Nach Satz 1.54 ist diese Eigenschaft unabhängig von der Parametrisierung γ.

Satz 1.81

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Frenetkurve. Dann gibt es Funktionen $\vec{e}^1_\gamma, ..., \vec{e}^n_\gamma : I(\gamma) \to \mathbb{R}^n$ mit:

(1) $\vec{e}^j_\gamma \in \mathcal{C}^1(I(\gamma), \mathbb{R}^n),\ j = 1, ..., n;$
(2) $\langle \vec{e}^i_\gamma, \vec{e}^j_\gamma \rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, ..., n;$
(3) $\gamma^{(j)}(t) \in \operatorname{span}(\vec{e}^1_\gamma(t), ..., \vec{e}^j_\gamma(t)),\ j = 1, ..., n-1,\ t \in I(\gamma);$
(4) die Basen $(\dot\gamma(t), ..., \gamma^{(j)}(t))$ und $(\vec{e}^1_\gamma(t), ..., \vec{e}^j_\gamma(t))$ sind gleich orientiert, $j = 1, ..., n-1;$
(5) die Basis $(\vec{e}^1_\gamma(t), ..., \vec{e}^n_\gamma(t))$ ist positiv orientiert.

Die $\vec{e}^1_\gamma, ..., \vec{e}^n_\gamma$ sind durch (1)-(5) eindeutig bestimmt. $(\vec{e}^1_\gamma, ..., \vec{e}^n_\gamma)$ heißt *begleitendes Dreibein*.

Ist φ eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so ist $\vec{e}^j_{\gamma\circ\varphi} = \vec{e}^j_\gamma \circ \varphi,\ j = 1, ..., n.$

Beweis (Orthonormalisierungsverfahren von Gram und Schmidt)

Definiere $\vec{e}^1_\gamma(t) := \frac{\dot\gamma(t)}{||\dot\gamma(t)||}$ und $\vec{e}^j_\gamma(t) := \frac{e^j(t)}{||e^j(t)||}$ mit

$$e^j(t) := \gamma^{(j)}(t) - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \gamma^{(j)}(t), \vec{e}^i_\gamma(t) \rangle \vec{e}^i_\gamma(t)$$

die Orthogonalprojektion auf den von $\{\vec{e}^1_\gamma(t), ..., \vec{e}^{j-1}_\gamma(t)\}$ aufgespannten Unterraum. Dies liefert $\vec{e}^1_\gamma, ...\vec{e}^{n-1}_\gamma$. Die letzte Funktion erhält man als Lösung von

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \langle \vec{e}^j_\gamma(t), x \rangle & = & 0 & j = 1, ..., n-1 \\ \det(\vec{e}^1_\gamma(t), ..., \vec{e}^{n-1}_\gamma(t), x) & = & 1 & \end{array} \right. .$$

■

Satz 1.82 (Frenet-Gleichungen)

Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Frenetkurve im $\mathbb{R}^n$. Dann gelten:

$$\begin{array}{rcl} (\vec{e}^j_\gamma)^\cdot(t) & = & \sum_{i=1}^{n} \langle (\vec{e}^j_\gamma)^\cdot(t), \vec{e}^i_\gamma(t) \rangle \vec{e}^i_\gamma(t),\ j = 1, ..., n \\ \langle (\vec{e}^j_\gamma)^\cdot(t), \vec{e}^i_\gamma(t) \rangle & = & -\langle \vec{e}^j_\gamma(t), (\vec{e}^i_\gamma)^\cdot(t) \rangle,\ i, j = 1, ..., n; \\ \langle (\vec{e}^j_\gamma)^\cdot(t), \vec{e}^i_\gamma(t) \rangle & = & 0 \text{ für } |i - j| \geq 2. \end{array}$$

Beweis

Zur ersten Gleichung: Dies folgt direkt aus der Basisdarstellung.

Zur zweiten Gleichung: Leite $\langle \vec{e}^i_\gamma(t), \vec{e}^j_\gamma(t) \rangle = \delta_{ij}$ ab:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \vec{e}^i_\gamma(t), \vec{e}^j_\gamma(t) \rangle = \langle (\vec{e}^i_\gamma)^\cdot(t), \vec{e}^j_\gamma(t) \rangle + \langle \vec{e}^i_\gamma(t), (\vec{e}^j_\gamma)^\cdot(t) \rangle.$$

Zur dritten Gleichung: Wegen $\vec{e}^j_\gamma(t) \in \operatorname{span}\{\dot\gamma(t), ..., \gamma^{(j)}(t)\}$ gilt:

$$(\vec{e}^j_\gamma)^\cdot(t) \in \operatorname{span}\{\dot\gamma(t), ..., \gamma^{j+1}(t)\} = \operatorname{span}\{\vec{e}^1_\gamma(t), ..., \vec{e}^{j+1}_\gamma(t)\}.$$

Mit (2) folgt „=“. ■

Definition 1.83
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Frenetkurve im $\mathbb{R}^n$. Für $j = 1, ..., n-1$ heißt $\kappa_\gamma^j : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ mit

$$\kappa_\gamma^j(t) := \frac{\langle (\vec{e}_\gamma^{\,j})^\cdot(t), \vec{e}_\gamma^{\,j+1}(t) \rangle}{||\dot{\gamma}(t)||}$$

die *j-te Krümmungsfunktion von γ* und $\kappa_\Gamma^j := [\kappa_\gamma^j]$ die *j-te Krümmungsfunktion von Γ*.

Bemerkung 1.84
κ_Γ^j ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Parametrisierung γ ($j = 1, ..., n-1$).

Lemma 1.85
Seien $\Gamma = [\gamma]$ eine Frenetkurve im $\mathbb{R}^n$ und $j \in \{1, ..., n-2\}$. Dann ist $\kappa_\gamma^j > 0$.

Beweis
Nach Konstruktion der $\vec{e}_\gamma^{\,i}$ existieren a_{ij}, b_{ij} mit $a_{ij} = \frac{1}{b_{ij}} > 0$ und

$$\begin{aligned} \gamma^{(i)}(t) &= \sum_{k=1}^{i} a_{ki}(t)\vec{e}_\gamma^{\,k}(t), \\ \vec{e}_\gamma^{\,j}(t) &= \sum_{i=1}^{j} b_{ij}(t)\gamma^{(i)}(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in I(\gamma)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma^j(t)||\dot{\gamma}(t)|| &= \langle (\vec{e}_\gamma^{\,j})^\cdot(t), \vec{e}_\gamma^{\,j+1}(t) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{j} \dot{b}_{ij}(t)\gamma^{(i)}(t) + b_{ij}(t)\gamma^{(i+1)}(t), \vec{e}_\gamma^{\,j+1}(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{j} \left(\dot{b}_{ij}(t) \sum_{k=1}^{i} a_{ki}(t)\vec{e}_\gamma^{\,k}(t) + b_{ij}(t) \sum_{k=1}^{i+1} a_{k,i+1}(t)\vec{e}_\gamma^{\,k}(t) \right), \vec{e}_\gamma^{\,j+1}(t) \right\rangle \\ &\overset{\text{ONB}}{=} b_{jj}(t)a_{j+1,j+1}(t) \underbrace{\langle \vec{e}_\gamma^{\,j+1}(t), \vec{e}_\gamma^{\,j+1}(t) \rangle}_{=1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.86
Für Frenet-Raumkurven sind $\kappa_\gamma^1 \equiv \kappa_\gamma$ und $\kappa_\gamma^2 \equiv \tau_\gamma$.

2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

2.1 Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten

Wiederholung 2.1

Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt *differenzierbar* im Punkt $x_0 \in U$, falls ein $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und ein $\epsilon > 0$ existieren mit

$$\forall ||x|| < \epsilon : f(x_0 + x) - f(x_0) = Ax + \mathcal{O}(||x||),$$

d,h,

$$\frac{||f(x_0 + x) - f(x_0) - Ax||}{||x||} \overset{||x|| \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Wir schreiben $f'(x_0) := \mathrm{d}f(x_0) := A$ und nennen $f'(x_0)$ die *Ableitung* bzw. das *Differenzial* von f in x_0.

f heißt *stetig differenzierbar* auf $U \subseteq X$ („$f \in \mathcal{C}^1(U,Y)$“), wenn f für alle $x_0 \in U$ differenzierbar ist und $f' : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ stetig ist. Iterativ erhält man die Räume $\mathcal{C}^k(U,Y)$, $k \in \mathbb{N} \subseteq \{\infty\}$. Die $f \in \mathcal{C}^\infty(U,Y)$ heißen *glatte Funktionen*.

Für $X = \mathbb{R}^m$ und $Y = \mathbb{R}^n$ ist $f \in \mathcal{C}^k(U,Y)$ genau dann, wenn f k-mal stetig partiell differenzierbar ist. Das Differenzial $\mathrm{d}f(x_0)$ $(x_0 \in U)$ hat bzgl. der kanonischen Basen die Matrixdarstellung

$$\mathcal{J}_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

mit $f = (f_1, ..., f_n)$, $f_1, ..., f_n : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $\mathcal{J}_f(x_0)$ heißt die *Jacobimatrix* von f in x_0.

Definition 2.2

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt M eine *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$, falls zu jedem $p \in M$ offene $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $\chi : V \to W$ existieren mit $p \in V$ und $\chi(V \cap M) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}) \cap W = \{(x, 0) \in W \mid x \in \mathbb{R}^m\}$.

Jedes solche χ (bzw. Tripel (χ, V, W)) heißt eine *Karte* von M und $V \cap M$ ihr *Kartengebiet*.

Für $m = n - 1$ spricht man von *Hyperflächen* des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.3

Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten.

(2) Seien Ω offen, $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ glatt $\Rightarrow$ $\mathrm{Graph}(u) := \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega\}$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.

Setze dazu $V = W = \Omega \times \mathbb{R}^n$ und $\chi : V \to W$, $(x, y) \mapsto (x, u(x) - y)$. In dem Fall ist das Kartengebiet $\chi(V \cap M)$ die Projektion des Graphen auf das Definitionsgebiet.

Definition 2.4

Seien $f : U \subseteq X \to Y$ differenzierbar und $x \in X$, $y \in Y$.

x heißt ein *regulärer Punkt* von f, falls $\mathrm{d}f(x)$ surjektiv ist.

y heißt ein *regulärer Wert* von f, falls alle $x \in f^{-1}(\{y\})$ reguläre Punkte von f sind.

Satz 2.5

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $d \leq n$. Dann sind äquivalent:

(1) M ist eine $(n-d)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(2) Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und ein $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^d)$ mit $M \cap U = f^{-1}(\{y\})$ für einen reg. Wert y.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei χ wie in Definition 2.2. Setze $f := (\chi_{n-d+1}, ..., \chi_n) : V \to \mathbb{R}^d$, dann sind die Zeilen von f' in jedem Punkt $x_0 \in V$ linear unabhängig, d.h. $\forall x_0 \in V : f'(x_0)$ surjektiv. Weiter ist $M \cap V = f^{-1}(\{0\})$.

$\Leftarrow$: Seien $f = (f_1, ..., f_d)$ und Œ $y = 0$ vorgegeben. Wähle $v_1, ..., v_{n-d} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass für ein $a \in V$ $(v_1, ..., v_{n-d}, \nabla f_1(a), ..., \nabla f_d(a))$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet. Setze

$$\chi(x) := (\langle v_1, x\rangle, ..., \langle v_{n-d}, x\rangle, f_1(x), ..., f_d(x)) \quad \Rightarrow \quad \chi'(x) = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \cdots \\ v_{n-d}^T \\ \nabla f_1(x) \\ \cdots \\ \nabla f_d(x) \end{pmatrix},$$

d.h. $\chi'(a)$ ist invertierbar. Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es ein offenes $V \subseteq U$, so dass $\chi : V \to W := \chi(V)$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus ist. ■

Beispiel 2.6

(1) $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ ist eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$, denn $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(\{1\})$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := ||x||^2$; $(\nabla f)(x) = 2x^T \neq 0$ für alle $x \neq 0$.

(2) Sei $g : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ glatt mit regulärem Wert 0. Dann ist

$$M := \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n \mid a < x_1 < b,\ x' \neq 0,\ g(x_1, ||x'||) = 0\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ (eine *Rotationsfläche*). Konkretes Beispiel: Der Torus.

(3) Die orthogonale Gruppe $\mathcal{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Setze dazu $X := \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = A\}$, d.h. Y hat die Dimension $1+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Definiere $f : X \to Y$ durch $f(A) := A^T A$, dann ist f stetig differenzierbar mit Ableitung $\mathrm{d}f(A) : X \to Y,\ H \mapsto A^T H + H^T A$. I ist ein regulärer Wert von f, denn für $A \in f^{-1}(\{I\}) = \mathcal{O}(n)$ gilt

$$\forall S \in Y : \mathrm{d}f(A)\left(\frac{1}{2}AS\right) = A^T\left(\frac{1}{2}AS\right) + \frac{1}{2}(AS)^T A = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S^T \overset{S=S^T}{=} S.$$

Also hat M die Dimension $n^2 - (\frac{1}{2}(n^2+n)) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Satz 2.7

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m \leq n$. Dann sind äquivalent:

(1) M ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(2) Für alle $p \in M$ existiert ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und ein $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$ mit $p \in \varphi(U)$ und

 (i) $\varphi : U \to \varphi(U)$ ist ein Homöomorphismus (in der Spurtopologie);
 (ii) $\mathrm{d}\varphi(x)$ ist injektiv für alle $x \in U$.

(i) ist äquivalent zu (i') Für alle $U' \subseteq U$ existiert ein offenes $O \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U') = M \cap O$.

Jedes solche φ (bzw. Paar (U, φ)) heißt eine *lokale Parametrisierung* oder auch ein *lokales Koordinatensystem* von M bei p. $\varphi(U)$ heißt eine *Koordinatenumgebung* von p und $x = (x_1, ..., x_n)$ heißt der *Koordinatenvektor* des Punktes $\varphi(x)$ bzgl. φ.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei (χ, V, W) wie in Definition 2.2. Setze $U := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, 0) \in W\}$, $\varphi(x) := \chi^{-1}(\{(x, 0)\})$.

$\Leftarrow$: Seien $x^* \in U$ mit $p = \varphi(x^*)$ und Œ (gegebenenfalls nach Umnummerierung der Variablen) $(\nabla\varphi_1(x^*), ..., \nabla\varphi_m(x^*))$ linear unabhängig.

Definiere $\psi : U \times \mathbb{R}^{n-m} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\psi(x_1, ..., x_n) := \varphi(x_1, ..., x_m) + (0, ..., 0, x_{m+1}, ..., x_n).$$

Dann

$$\psi'(x^*,0) = \left(\begin{array}{c|ccc} \nabla\varphi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nabla\varphi_m & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & 1 & & \\ * & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right),$$

d.h. es gibt $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x^* \in W$ und $\psi : V \to U$ $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Setze $\chi := \psi^{-1}$. ■

Bemerkung 2.8

Zu jeder lokalen Parametrisierung (U,φ) und jedem $p \in \varphi(U)$ existiert also eine Karte (χ, V, W) mit $p \in V$ und $\varphi(x) = \chi^{-1}(x,0)$ auf $\{x \in U \mid (x,0) \in W\}$.

Beispiel 2.9

Für alle $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $p \in \mathbb{S}^{n-1} \cap H_i^+$ oder $p \in \mathbb{S}^{n-1} \cap H_i^-$, wobei $H_i^\pm := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \pm y_i > 0\}$.
Setze $U := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid ||x|| < 1\}$ und definiere $\varphi_i^\pm : U \to \mathbb{S}^{n-1} \cap H_i^\pm$ durch

$$\varphi_i^\pm(x) := (x_1, ..., x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - ||x||^2}, x_i, ..., x_{n-1}).$$

Dann sind die $\varphi_i^\pm$, $i = 1, ..., n-1$, lokale Parametrisierungen.

Beispiel 2.10

Weder der Kegel K noch der Doppelkegel K', gegeben durch

$$\begin{aligned} K &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid ||x'|| = x_n\} \\ K' &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid ||x'|| = |x_n|\} \end{aligned}$$

sind Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.11

Seien M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und (U,φ) eine lokale Parametrisierung. Weiter seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : O \to \mathbb{R}^n$ mit $F(O) \subseteq \varphi(U)$ und $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gilt

$$F \in \mathcal{C}^l(O, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ F \in \mathcal{C}^l(O, \mathbb{R}^m).$$

Beweis

$\Leftarrow$: Klar: $F = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ F) \in \mathcal{C}^l(O, \mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow$: Seien $z^* \in O$ und $x^* \in U$ mit $F(z^*) = p = \varphi(x^*)$. Nach Bemerkung 2.8 gibt es dann eine Karte (χ, V, W) mit $p \in V$ und $\varphi(x) = \chi^{-1}((x,0))$ für alle $x \in U$ mit $||x - x^*|| < \epsilon$ (ϵ passend), d.h.

$$\exists \delta > 0 : \forall w \in O, \ ||w - z^*|| < \delta : ((\varphi^{-1} \circ F)(w), 0) = (\chi \circ F)(w);$$

da $z^* \in O$ beliebig und $\chi \circ F \in \mathcal{C}^l$, also auch $\varphi^{-1} \circ F \in \mathcal{C}^l$. ■

Korollar 2.12

Seien M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und (U,φ), $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ lokale Parametrisierungen.
Dann ist $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})) \to \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus.

Beweis

Setze in Lemma 2.11 $F := \varphi^{-1}$. ■

Korollar 2.13

Für $i = 1,2$ seien M_i Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n_i}$, $f : M_1 \to M_2$ stetig und $p_i \in M_i$ mit $p_2 = f(p_1)$. Dann sind äquivalent:

(1) Es existieren lokale Parametrisierungen (U_i, φ_i) nahe p_i, so dass

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(f^{-1}(\varphi_2(U_2)) \cap \varphi_1(U_1)) \to U_2$$

in einer offenen Umgebung von $\varphi_1^{-1}(p_1)$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist.

(2) Für alle lokalen Parametrisierungen $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$ nahe p_i ist

$$\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\varphi}_1 : \tilde{\varphi}_1^{-1}(f^{-1}(\tilde{\varphi}_2(\tilde{U}_2)) \cap \tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_1)) \to \tilde{U}_2$$

in einer offenen Umgebung von $\tilde{\varphi}_1^{-1}(p_1)$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung.

In diesem Fall nennen wir f *$\mathcal{C}^k$ bei p_1*. Ist f $\mathcal{C}^k$ bei jedem $p \in M$, dann heißt f *$\mathcal{C}^k$ auf M_1*. Ist $k = \infty$, dann heißt f *glatt*.

Beweis

Nur (1) $\Rightarrow$ (2) ist zu zeigen. Schreibe dazu mit passendem Definitionsbereich

$$\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\varphi}_1 = \underbrace{(\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \varphi_2)}_{\in \mathcal{C}^\infty} \circ \underbrace{(\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1)}_{\in \mathcal{C}^k} \circ \underbrace{(\varphi_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1)}_{\in \mathcal{C}^\infty}. \qquad \blacksquare$$

Korollar 2.14

Seien $f : M_1 \to M_2$ eine Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten und $p_1 \in M_1$.

Dann sind äquivalent:

(1) f ist $\mathcal{C}^k$ bei p_1.

(2) Es gibt offenes $O \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $F \in \mathcal{C}^k(O, M_2)$ mit $p_1 \in O$ und $F|_{M_1 \cap O} = f|_{M_1 \cap O}$.

Beweis

Seien (χ, V, W) eine Karte von M_1 und $p \in V$. Dann ist nach Satz 2.7

$$\varphi(x_1, ..., x_{m_1}) := \chi^{-1}(x_1, ..., x_{m_1}, 0, ..., 0)$$

eine lokale Parametrisierung auf $U := \{x \in \mathbb{R}^{m_1} \mid (x, 0, ..., 0)\} \in W$.

$\Rightarrow$: Für $x \in V$ definiere

$$F(x) := (f \circ \varphi_1)(\chi_1(x), ..., \chi_m(x)).$$

Da f $\mathcal{C}^k$ bei p, ist $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 \in \mathcal{C}^k$ bei $\varphi_1^{-1}(p)$. Nach Lemma 2.11 gibt es damit offenes $O \subseteq V$ mit $p \in O$, so dass $F : O \to M_2$ $\mathcal{C}^k$ ist.

$\Leftarrow$: Nach Lemma 2.11 gilt

$$(\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1)(x_1, ..., x_m) = (\underbrace{(\varphi_2^{-1} \circ F)}_{\in \mathcal{C}^k} \circ \underbrace{\chi^{-1}}_{\in \mathcal{C}^\infty})(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0). \qquad \blacksquare$$

Folgerung 2.15

Die Dimension einer Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis

Sei M eine m- und eine $\tilde{m}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Seien (U, φ) und $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ zugehörige Parametrisierungen und $O := \varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Wir setzen $W := \varphi^{-1}(O) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(O) \subseteq \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, dann sind $g := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{W} \to W$ und $g^{-1} := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde{W}$ glatt. Außerdem ist $\mathrm{d}g(\tilde{x}) : \mathbb{R}^{\tilde{m}} \to \mathbb{R}^m$ für $\tilde{x} \in \tilde{W}$ ein Isomorphismus, d.h. $m = \tilde{m}$. $\blacksquare$

2.2 Tangentialebenen und Differenzial

Konvention 2.16

Im Folgenden seien M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$.

Mit der durch

$$(p, v_1) + (p, v_2) := (p, v_1 + v_2), \qquad \lambda(p, v) := (p, \lambda v)$$

erklärten Addition und Skalarmultiplikation und dem Skalarprodukt

$$\langle (p, v_1), (p, v_2) \rangle := \langle v_1, v_2 \rangle$$

versehen wird der Vektorraum $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ zu einem Hilbertraum.

Definition 2.17

Die Menge

$$T_pM := \{(p, v) \mid v = \dot\alpha(0) \text{ für eine Kurve } \alpha \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n),\ \alpha(I) \subseteq M,\ \alpha(0) = p\}$$

heißt der *Tangentialraum* an M in p.

Die Elemente von T_pM heißen *Tangentialvektoren* an M in p.

Bemerkung 2.18

Die Definition ist unabhängig von $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Insbesondere kann man sich auf glatte Kurven beschränken.

Satz 2.19

Sei (U, φ) eine lokale Parametrisierung bei $p = \varphi(x_0)$. Dann ist

$$T_pM = \{p\} \times \text{Bild}(\mathrm{d}\varphi(x_0)) = \{p\} \times \mathrm{d}\varphi(x_0)(\mathbb{R}^m).$$

Insbesondere ist T_pM ein m-dimensionaler Untervektorraum. Eine kanonische Basis des T_pM ist

$$((p, \mathrm{d}\varphi(x_0)e_1), ..., (p, \mathrm{d}\varphi(x_0)e_m)) = ((p, \partial_1\varphi(x_0)), ..., (p, \partial_m\varphi(x_0))).$$

Beweis

Für $\alpha_i(t) := \varphi(x_0 + te_i)$ ist $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$ mit $\dot\alpha_i(0) = \partial_i\varphi(x_0)$ $(i = 1, ..., m)$, d.h. $(p, \partial_i\varphi(x_0)) \in T_pM$.

Sei nun α $\mathcal{C}^k$ mit $\alpha(I) \subseteq M$ und $\alpha(0) = p$, dann ist nach Lemma 2.11 $\beta := \varphi^{-1} \circ \alpha$ in einer offenen Umgebung von 0 definiert und ebenfalls $\mathcal{C}^k$. Damit

$$\dot\alpha(0) = (\varphi \circ \beta)^\cdot(0) = \mathrm{d}\varphi(x_0)\dot\beta(0) = \sum_{i=1}^m \dot\beta_i(0)\partial_i\varphi(x_0),$$

d.h. $T_pM \subseteq \text{span}\{(p, \partial_i\varphi(x_0) \mid i = 1, ..., m)\}$. Die $\partial_i\varphi(x_0)$ sind nach Satz 2.7 2 (ii) linear unabhängig. Also ist $\dim(T_pM) = m$. ■

Beispiel 2.20

Sei $M = \text{graph}(u)$ mit $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ glatt. Dann definiert $\varphi(x) := (x, u(x))$ eine lokale Parametrisierung um beliebiges $p := (x, u(x))$. Also ist eine Basis des T_pM gegeben durch

$$(((x, u(x)), (e_1, \partial_1 u(x))), ..., ((x, u(x)), (e_m, \partial_m u(x)))).$$

Satz 2.21

Sei $p \in U \cap M = f^{-1}(\{y\})$ mit y regulärer Wert von $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^{n-m})$.

Dann ist $T_pM = \{p\} \times \text{Kern}(\mathrm{d}f(p))$; insbesondere bildet $((p, \nabla f_1(p)), ..., (p, \nabla f_{n-m}(p)))$ eine Basis des orthogonalen Komplements $T_pM^\perp$ von T_pM in $\{p\} \times \mathbb{R}^n$.

Beweis

Sei $(p, \dot\alpha(0)) \in T_pM$, dann ist $f \circ \alpha \equiv y$ nahe $t = 0$, d.h.

$$0 = (f \circ \alpha)^{\cdot}(0) = \mathrm{d}f(p)\dot\alpha(0) \Leftrightarrow \dot\alpha(0) \perp \nabla f_i(p), \ i = 1, ..., m-n.$$

Da $\dim(T_pM^\perp) = n - m$ und die $\nabla f_i(p)$ linear unabhängig, folgt die Behauptung. ∎

Beispiel 2.22

Sei $M = \mathrm{graph}(u)$ mit $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ glatt. Es ist $M = f^{-1}(0)$ für

$$f(x) := (x_{m+1}, ..., x_n) - u(x_1, ..., x_m).$$

Also ist mit $p := (x, u(x))$ eine Basis von $T_pM^\perp$ gegegen durch

$$(((x, u(x)), (e_{m+1} - \nabla u_1(x_1, ..., x_m))), ..., ((x, u(x)), (e_n - \nabla u_{n-m}(x_1, ..., x_m)))).$$

Beispiel 2.23

(1) Für die orthogonale Gruppe $\mathcal{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid f(A) := AA^T = I\}$ gilt $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(I)$ und $\mathrm{d}f(I) : A \mapsto A + A^*$, vgl. Beispiel 2.6. Damit ist

$$T_I\mathcal{O}(n) = \{I\} \times \underbrace{\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A + A^* = 0\}}_{\text{Menge der schiefsymm. Matrizen}}.$$

(2) $\exp : T_I\mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(n), \ A \mapsto e^A$ ist wohldefiniert, da $e^A(e^A)^* = e^Ae^{A^*} = e^{A+A^*} = e^0 = I$. Also hat jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A + A^* = 0$ die Gestalt $A = \dot\alpha(0)$ mit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathcal{O}(n), \ \alpha(t) := \exp(tA)$.

Satz 2.24

Das *Tangentialbündel* $T(M) := \bigcup_{p\in M} T_pM$ ist eine $2m$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$.
Das *Normalenbündel* $T(M)^\perp := \bigcup_{p\in M} T_pM^\perp$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$.

Beweis

Sei (χ, V, W) eine Karte. Dann ist (U, φ) mit $\varphi(x) := \chi^{-1}(x, 0), \ x \in U := W \cap \mathbb{R}^m \times \{0\}$ eine lokale Parametrisierung von M. Setze

$$\psi : U \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ \psi(x, y) := (\varphi(x), \mathrm{d}\varphi(x)y).$$

Wir zeigen, dass $(U \times \mathbb{R}^m, \psi)$ eine lokale Paramerisierung von $T(M)$ ist.
ψ ist glatt mit Jacobimatrix

$$\mathrm{d}\psi(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\varphi(x) & 0 \\ * & \mathrm{d}\varphi(x) \end{pmatrix},$$

ergo ist $\mathrm{d}\psi(x, y)$ für alle (x, y) injektiv. Nach Satz 2.19 ist $\psi : U \times \mathbb{R}^m \to T(M \cap V) = \bigcup_{p\in V} T_pM$ bijektiv und außerdem stetig.
Auch ψ^{-1} ist stetig: Definiere $\theta : (V \cap M) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ durch

$$\theta(y, v) := (\chi(y), \mathrm{d}\chi(y)v),$$

dann ist θ stetig, also auch $\theta|_{T(V\cap M)}$ in der Spurtopologie. Außerdem ist

$$(\theta \circ \psi)(x, y) = (\chi(\varphi(x)), \mathrm{d}\chi(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)) = ((x, 0), \mathrm{d}(\chi \circ \varphi)(x)y) = ((x, 0), (y, 0)).$$

Mit der Projektion $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{2m}, \ (x, u, y, v) \mapsto (x, y)$ sieht man schließlich ein, dass $\psi^{-1} = \pi \circ \theta : T(V \cap M) \to \mathbb{R}^{2m}$ stetig ist. Somit wird $T(M)$ parametrisiert durch $(U \times \mathbb{R}^m, \psi)$.
Beim Normalenbündel geht man analog vor. ∎

Definition 2.25

Seien M_1, M_2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ und $f : M_1 \to M_2$ $\mathcal{C}^1$ bei $p \in M_1$.

Dann ist das *Differenzial von f in p* gegeben durch

$$\mathrm{d}_p f : T_p M_1 \to T_{f(p)} M_2, \ (p, \dot\alpha(0)) \mapsto (f(p), (f \circ \alpha)^{\cdot}(0)).$$

Bemerkung 2.26

(1) $\mathrm{d}_p f(p, \dot\alpha(0))$ hängt nur von $\dot\alpha(0)$ ab: Nach Korollar 2.14 gibt es ein offenes $O \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ mit $p \in O$ und ein $F \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R}^{n_2})$ mit $F = f$ auf $O \cap M_1$, also

$$(f \circ \alpha)^{\cdot}(0) = (F \circ \alpha)^{\cdot}(0) = \mathrm{d}F(p)\dot\alpha(0).$$

(2) Ist zusätzlich $g : M_2 \to M_3$ $\mathcal{C}^1$ bei $f(p)$, so gilt

$$\boxed{\mathrm{d}_p(g \circ f) = \mathrm{d}_{f(p)} g \circ \mathrm{d}_p f}$$

Denn:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p(g \circ f)(\dot\alpha(0)) &= (g(f(p)), ((g \circ f) \circ \alpha)^{\cdot}(0)) \\ &= \mathrm{d}_{f(p)} g(f(p), (f \circ \alpha)^{\cdot}(0)) \\ &= (\mathrm{d}_{f(p)} g \circ \mathrm{d}_p f)(p, \dot\alpha(0)). \end{aligned}$$

(3) Sind $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ offen, so sind $TM_1 = M_1 \times \mathbb{R}^{n_1}, TM_2 = M_2 \times \mathbb{R}^{n_2}$. Ist dann $f : M_1 \to M_2$ glatt bei p, so folgt

$$\mathrm{d}_p f : \{p\} \times \mathbb{R}^{n_1} \to \{f(p)\} \times \mathbb{R}^{n_2}, \ (p, v) \mapsto (f(p), \mathrm{d}f(p)v)$$

mit dem üblichen Differenzial $\mathrm{d}f$ von f.

Lemma 2.27

Seien M_1, M_2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n_1, \mathbb{R}^{n_2}$ und $f : M_1 \to M_2$ $\mathcal{C}^1$ bei $p \in M_1$.

Seien $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ lokale Parametrisierungen von M_1, M_2 bei $p, f(p)$. Dann hat $\mathrm{d}_p f$ bzgl. der natürlichen Basen von $T_p M_1, T_{f(p)} M_2$ die Matrixdarstellung

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{d}_p f) = \mathrm{d}(\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1)(\varphi_1^{-1}(p)).$$

Beweis

Seien $p = \varphi_1(x), \ f(p) = \varphi_2(y)$ und $g := \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ mit $\mathrm{d}g(x) = (g_{ij})_{1 \leq i \leq m_2}^{1 \leq j \leq m_1} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_1}$.

Für die kanonischen Basisvektoren $(\partial_i \varphi_1(x))$ von $T_p M$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p f(p, \partial_i \varphi_1(x)) &= \mathrm{d}_p f(p, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_1(x + te_i)|_{t=0}) \\ &= (f(p), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_1)(x + te_i)|_{t=0}) \\ &= (f(p), \partial_i(\varphi_2 \circ g)(x)) \\ &= (f(p), \mathrm{d}\varphi_2(g(x)) \partial_i g(x)) \\ &= (f(p), \sum_{j=1}^{m_2} g_{ij} \partial_j \varphi_2(y) \ ) \end{aligned}$$

■

Definition 2.28

Ein *Vektorfeld* auf M ist eine Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ der Form $X : p \mapsto (p, \tilde X(p))$.

Falls $X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$, heißt X *tangential*; falls $X(p) \in T_p M^{\perp}$ für alle p, heißt X *normal*.

Wegen $\{p\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ identifiziert man X häufig mit $\tilde X : M \to \mathbb{R}^n$.

2.3 Immersionen und Einbettungen

Definition 2.29

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Funktion.

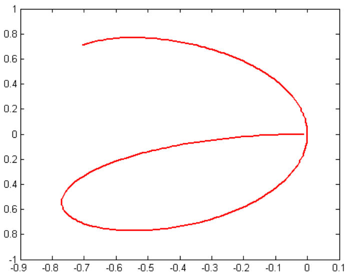
f heißt eine *Immersion*, falls $\mathrm{d}f(x)$ injektiv ist für jedes $x \in \Omega$ (insbesondere $m \leq n$).

f heißt eine *Einbettung*, falls $f : \Omega \to f(\Omega)$ zusätzlich ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 2.30

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine Immersion, wenn $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt, d.h. γ eine reguläre Parametrisierung ist.

Beispiel 2.31 (Kleeblatt)



Durch

$$\gamma(t) := \sin(2t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in (-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}))$$

wird eine injektive Immersion definiert.

Allerdings ist γ keine Einbettung.

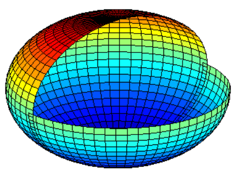
Insbesondere ist $\mathrm{Spur}(\gamma)$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

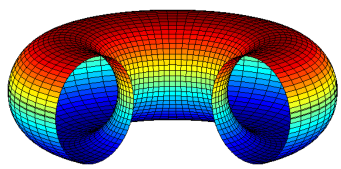
Beispiel 2.32 (Kugel, Torus)

Die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(s,t) := \begin{pmatrix} \cos(s)\cos(t) \\ \sin(s)\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad g(s,t) := \begin{pmatrix} (2+\cos(s))\cos(t) \\ (2+\cos(s))\sin(t) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$$

sind in s, t 2π-periodische Immersionen. Ihre Bilder sind die Einheitssphäre und der Torus. Dies sind Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$.





Bemerkung 2.33

(1) Sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Analog zum Beweis von Satz 2.7 zeigt man, dass zu jedem $x \in \Omega$ ein offenes $U \subseteq \Omega$ mit $x \in U$ existiert, so dass $f|_U : U \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung ist.

(2) Sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Wir setzen

$$T_x f := \mathrm{d}_x f(T_x\Omega) := (f(x), \mathrm{d}f(x)(\mathbb{R}^m)) \subseteq T_{f(x)}(\mathbb{R}^n) = \{f(x)\} \times \mathbb{R}^n.$$

Ein *Vektorfeld längs f* ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$ mit $X(x) \in T_x f$ für alle $x \in \Omega$.

(3) Für Immersionen $f_1, f_2 : \Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definiert

$$f_1 \sim f_2 :\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Diff}^\infty(\Omega_1, \Omega_2) : f_1 = f_2 \circ \varphi$$

eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse heißt eine *reguläre Fläche*.

Verlangt man zusätzlich $\det \mathrm{d}\varphi(x) > 0$ für alle $x \in \Omega_1$, so erhält man durch $\sim$ wieder eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen dann *orientierte reguläre Flächen*.

3 Erste und zweite Fundamentalform

3.1 Allgemeines zu Bilinearformen

Konvention 3.1

In diesem Kapitel sei M stets eine Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$, d.h. eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ der Dimension n.

Wiederholung 3.2

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *symmetrische Bilinearform* auf V ist eine Abbildung $B : V \times V \to \mathbb{R}$, so dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V$ gelten

$$\begin{aligned} B(u,v) &= B(v,u) \\ B(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha B(u,w) + \beta B(v,w). \end{aligned}$$

B heißt *positiv definit* oder ein *Skalarprodukt*, falls zusätzlich $B(v,v) > 0$ für alle $v \in V \backslash \{0\}$.

Ist $E = (e_1, ..., e_n)$ eine Basis von V, so ist B eindeutig bestimmt durch die *Gramsche Matrix*

$$G := (g_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le n} := (B(e_i, e_j))_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}.$$

Da B symmetrisch, ist auch G symmetrisch.
Seien $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i,\ \ v = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j e_j$, dann

$$B(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j g_{ij} = b^T G a.$$

Seien $F = (f_1, ..., f_n)$ eine weitere Basis von V mit $f_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$ $(i = 1, ..., n)$ und $A := (a_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}$, dann

$$G^F = A^T G^E A \qquad \text{bzw.} \qquad g_{ij}^F = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} g_{kl}^E a_{lj}. \qquad \text{(Transformationsformel)}$$

Insbesondere ist $\det(G) > 0$ ($\Rightarrow G$ invertierbar), falls B positiv definit, denn nach dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren findet man stets eine Orthonormalbasis von V, bzgl. der $G = I_n$ ist. Wir setzen $G^{-1} := (g^{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}$.
Jeder Vektor $v \in V$ erfüllt die Entwicklungsformel

$$v = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} B(v, e_i) e_j.$$

Ist $T : W \to V$ ein Vektorraumhomomorphismus, dann definiert

$$T^* B(x,y) := B(Tx, Ty) \qquad (x, y \in W)$$

eine symmetrische Bilinearform auf W. Diese ist genau dann positiv definit, wenn B positiv definit und T injektiv.

3.2 Die erste Fundamentalform

Definition 3.3

Die *erste Fundamentalform* von M ist die Zuordnung

$$p \mapsto g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_pM \times T_pM},$$

d.h. g_p ist die Einschränkung des Skalarprodukts von $\{p\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ auf T_pM.

Bemerkung 3.4 (lokale Darstellung der ersten Fundamentalform)

Ist (U, φ) eine lokale Parametrisierung von M, so ist g auf U eindeutig bestimmt durch

$$g_{ij}^{\varphi} = g_{\varphi(x)}(\mathrm{d}_x\varphi(e_i), \mathrm{d}_x\varphi(e_j)) = \langle \partial_i\varphi(x), \partial_j\varphi(x) \rangle \qquad (x \in U).$$

Die Funktion $g^{\varphi} := (g_{ij}^{\varphi})_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le n} : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt die *lokale Darstellung* der ersten Fundamentalform bzgl. (U, φ).

Satz 3.5

Ist $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ ein weiteres Koordinatensystem mit $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$, so gilt

$$g_{ij}^{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}^{\varphi} \partial_i(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_k(\tilde{x}) \partial_j(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_l(\tilde{x})$$

bzw.

$$g^{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}) = \mathrm{d}(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x})^T g^{\varphi}(x) \mathrm{d}(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x}).$$

Insbesondere gilt

$$\sqrt{\det(g^{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}))} = |\det(\mathrm{d}(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x}))| \sqrt{\det(g^{\varphi}(x))}.$$

Beweis

Setze $\phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ (nahe $\tilde{x}$) bzw. $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi$, dann liefert die Kettenregel

$$\underbrace{\partial_i\tilde{\varphi}(\tilde{x})}_{f_i} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\partial_i\phi_k(\tilde{x})}_{a_{ki}} \underbrace{\partial_k\varphi(x)}_{e_k} \qquad „(Ax = \Sigma x_k A^{(k)})“$$

und die Transformationsformel für die Gramsche Matrix liefert die Behauptung. ∎

Bemerkung 3.6

Bezeichne $e_1, ..., e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$g_{ij}^{\varphi}(x) = ((\mathrm{d}_x\varphi)^* g_{\varphi(x)})(e_i, e_j).$$

Häufig schreiben wir g_{ij} statt g_{ij}^{φ}.

Beispiel 3.7

Sind M der Graph von $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\varphi(x) := (x, u(x))$ die kanonische Parametrisierung, dann ist

$$g_{ij}^{\varphi}(x) = \delta_{ij} + \partial_i u(x) \partial_j u(x) \quad \text{bzw.} \quad g^{\varphi}(x) = I_n + \nabla u(x)^T \nabla u(x).$$

3.3 Orientierbarkeit und Normalenfelder

Definition 3.8

Ein normales Vektorfeld N auf M heißt *Einheitsnormalenfeld*, falls $||N(p)|| = 1$ für alle $p \in M$.

Beachte: $||\cdot||$ ist die Norm auf $\{p\} \times \mathbb{R}^{n+1}$, d.h. $||N(p)|| = ||\tilde{N}(p)||_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

M heißt *orientierbar*, falls es ein glattes Einheitsnormalenfeld auf M gibt. Die Wahl eines solchen heißt eine *Orientierung* von M.

Bemerkung 3.9

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ und $M \cap U = f^{-1}(\{y\})$ für einen regulären Wert y von f. Dann wird ein glattes Einheitsnormalenfeld N auf $M \cap U$ definiert durch

$$N(p) := \left(p, \tfrac{\nabla f(p)}{||\nabla f(p)||}\right) \qquad (p \in M).$$

Beispiel 3.10

(1) Sei $f(x) := ||x||^2$ $(x \in \mathbb{R}^3)$, dann ist $M(r) := f^{-1}(r^2)$ die Oberfläche der Kugel mit Radius $r > 0$, also

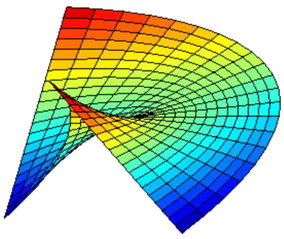
$$N(p) := \left(p, \tfrac{p}{||p||}\right) = \left(p, \tfrac{p}{r}\right) \qquad (p \in M(r))$$

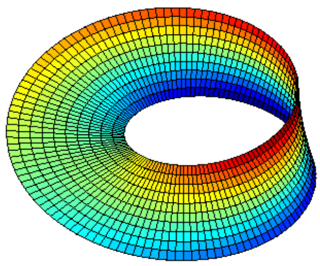
eine Orientierung von $M(r)$.

(2) Das *Möbiusband* ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$, gegeben als Bild der Immersion $f : (-1, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(s,t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t) + s\cos(\frac{t}{2})\cos(t) \\ 2\sin(t) + s\cos(\frac{t}{2})\sin(t) \\ s\sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$$

besitzt kein stetiges Einheitsnormalenfeld, ist also insbesondere nicht orientierbar.





Satz 3.11

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) M ist orientierbar.

(2) Es gibt ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M.

(3) Es gibt eine Familie $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ lokaler Koordinatensysteme von M, so dass M von $(\varphi_\alpha(U_\alpha))_{\alpha \in I}$ überdeckt wird und $\det(\mathrm{d}(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)) > 0$ für alle $\alpha, \beta \in I$ ist (auf den Definitionsbereichen der Koordinatenwechsel).

Beweis

(1)$\Rightarrow$(2):

Klar.

(2)$\Rightarrow$(3):

Sei $N(\cdot) = (\cdot, \tilde{N}(\cdot))$ ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M. Zu jedem $p \in M$ wählen wir ein lokales

Koordinatensystem (U_p, φ_p) derart, dass $\varphi_p(0) = p$ und dass für alle $x \in U_p$ gilt

$$\det\left(\partial_1\varphi_p(x), ..., \partial_n\varphi_p(x), \tilde{N}(\varphi_p(x))\right) > 0. \qquad (*)$$

Dies ist immer möglich: Gilt $(*)$ in $x = 0$, so auch in einer Umgebung von 0; ist $\det(...) < 0$, so ersetze φ_p durch $\tilde{\varphi}_p$, gegeben durch $\tilde{\varphi}_p(x_1, x_2, ..., x_n) := \varphi_p(x_2, x_1, ..., x_n)$.

Offenbar gilt dann $M = \bigcup\{\varphi_p(U_p) \mid p \in M\}$. Seien nun (U_q, φ_q) und (U_p, φ_p) zwei Koordinatensysteme und $m \in M$ mit $\varphi_q(x_q) = m = \varphi_p(x_p)$. Dann ist $A := \mathrm{d}(\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p)(m)$ die Matrixdarstellung von $\mathrm{id} = \mathrm{d}_m\mathrm{id} : T_mM \to T_mM$ bzgl. der Basen $(\partial_1\varphi_q(x_q), ..., \partial_n\varphi_q(x_q))$ und $(\partial_1\varphi_p(x_p), ..., \partial_n\varphi_p(x_p))$. Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &< \det(\mathrm{d}\varphi_p(x_p), \tilde{N}(\varphi_p(x_p))) \\
&= \det(\mathrm{d}(\varphi_q \circ (\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p))(x_p), \tilde{N}(m)) \\
&= \det(\mathrm{d}\varphi_q(\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x_p))\mathrm{d}(\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p)(x_p), \tilde{N}(m)) \\
&= \det(\mathrm{d}\varphi_q(x_q) \cdot A, \tilde{N}(m)) \\
&= \underbrace{\det(\mathrm{d}\varphi_q(x_q))}_{>0}\underbrace{\det\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}_{=\det(A)},
\end{aligned}$$

also auch $\det(A) > 0$ und das war zu zeigen.

(3)⇒(1):

Seien $p \in M$ und $M = f^{-1}\{(0)\}$ nahe p. Sei $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ eine lokale Parametrisierung. Wir definieren $\tilde{N}(p)$ über

$$\tilde{N}(p) := \pm\frac{\nabla f(p)}{||\nabla f(p)||}, \qquad \det(\partial_1\varphi_\alpha(x), ..., \partial_n\varphi_\alpha(x), \tilde{N}(\varphi_\alpha(x))) > 0 \qquad (x = \varphi_\alpha^{-1}(p))$$

und erhalten ein glattes $\tilde{N} : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Nach Bemerkung 3.9 definiert $\tilde{N}$ eine Orientierung von M. ■

Beispiel 3.12

Den Graph einer glatten Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ orientiert man kanonisch durch

$$\tilde{N}(x, u(x)) := \frac{(-\nabla u(x), 1)}{\sqrt{1 + ||\nabla u(x)||^2}}.$$

Definition 3.13

Sei M orientiert durch $N(\cdot) = (\cdot, \tilde{N}(\cdot))$. Dann heißt die Abbildung $\tilde{N} : M \to \mathbb{S}^n$ die *Gaußabbildung* von M.

3.4 Die Weingartenabbildung

Definition 3.14

Seien $v := (p, \tilde{v}) \in T_pM$ für ein $p \in M$, und $f : M \to \mathbb{R}$ eine bei p glatte Funktion auf M. Dann heißt

$$\nabla_v f := (f \circ \alpha)^{\cdot}(0)$$

die *Ableitung von f in Richtung v*, wobei $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ mit $\alpha(0) = p$ und $\dot{\alpha}(0) = \tilde{v}$.

Sei $X(\cdot) := (\cdot, \tilde{X}(\cdot))$ ein bei p glattes Vektorfeld auf M, dann heißt

$$\nabla_v X := (p, (\tilde{X} \circ \alpha)^{\cdot}(0))$$

die *Ableitung von X in Richtung v*.

Bemerkung 3.15

(1) Für ein glattes Vektorfeld $X : M \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ auf M definieren wir $\mathrm{d}_pX : T_pM \to T_pM$, $(p, \dot{\alpha}(0)) \mapsto (p, (X \circ \alpha)^{\cdot}(0))$.

(2) Wegen $\mathrm{d}_pf(v) = (f(p), \nabla_v f)$ und $\nabla_v X = \mathrm{d}_p\tilde{X}(v) = (p, \nabla_v\tilde{X}_1, ..., \nabla_v\tilde{X}_n)$ sind die Definitionen unabhängig von der Wahl von α.

Bemerkung 3.16

Seien $v = (p, \tilde{v}) \in T_pM$, $X, Y : M \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ bei p glatte Vektorfelder auf M und $f : M \to \mathbb{R}$ glatt bei p. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\nabla_v(X + Y) &= \nabla_v X + \nabla_v Y;\\
\nabla_v(f \cdot X) &= (\nabla_v f)X(p) + f(p)\nabla_v X;\\
\nabla_v\langle X, Y\rangle &= \langle\nabla_v X, Y(p)\rangle + \langle X(p), \nabla_v Y\rangle.
\end{aligned}$$

Lemma 3.17

Seien M durch N bei p orientiert und $v \in T_pM$. Dann ist $\nabla_v N \in T_pM$.

Beweis

Wegen $0 = \nabla_v 1 = \nabla_v\langle N, N\rangle = 2\langle\nabla_v N, N(p)\rangle$ ist $N(p) \perp \nabla_v N$, also $\nabla_v N \in T_pM$. ■

Definition 3.18

Sei N eine Orientierung von M. Die *Weingartenabbildung* $\mathscr{L}_p$ von M in p ist definiert durch

$$\mathscr{L}_p : T_pM \to T_pM, \qquad v \mapsto -\nabla_v N = -\mathrm{d}_p\tilde{N}(v).$$

Beispiel 3.19

Wir orientieren den Zylinder $Z := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ durch die äußere Normale N, d.h.

$$N(x) := (x, \tilde{N}(x)) := ((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, 0)).$$

Für den Tangentialraum T_xZ in $x \in Z$ gilt dann

$$T_xZ = \mathrm{span}\{v_1(x), v_2(x)\},\ v_1(x) := ((x_1, x_2, x_3), (-x_2, x_1, 0)),\ v_2(x) := ((x_1, x_2, x_3), (0, 0, 1)).$$

$\tilde{N}$ lässt sich auf ganz $\mathbb{R}^3$ fortsetzen und wir erhalten für die Fortsetzung

$$\begin{aligned}
-\nabla_{v_1(x)}N &= ((x_1, x_2, x_3), -\mathrm{d}\tilde{N}(x_1, x_2, x_3)(-x_2, x_1, 0)) &&= -v_1(x) \in \mathbb{R}^6,\\
-\nabla_{v_2(x)}N &= ((x_1, x_2, x_3), -\mathrm{d}\tilde{N}(x_1, x_2, x_3), (0, 0, 1)) &&= (x, 0) \in \mathbb{R}^6.
\end{aligned}$$

Bezüglich der Basis $(v_1(x), v_2(x))$ von T_xZ hat $\mathscr{L}_x$ also die Matrixdarstellung

$$\mathrm{Mat}(\mathscr{L}_x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Beispiel 3.20

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eindimensional mit Orientierung N, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann ist

$$\mathscr{L}_p(v) \overset{\text{Frenet}}{=} \varkappa_\gamma(t_0)v = \varkappa_\gamma(t_0)(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0))$$

für jede reguläre Parametrisierung $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Spur}(\gamma) \subseteq M,\ \gamma(t_0) = p$ und $\vec{\nu}_\gamma(t_0) = \tilde{N}(p)$.

Satz 3.21

Die Weingartenabbildung ist selbstadjungiert bzgl. der ersten Fundamentalform, d.h.

$$\forall v, w \in T_pM : g_p(\mathscr{L}_p(v), w) = g_p(v, \mathscr{L}_p(w)).$$

Beweis

Sei $N(\cdot) = (\cdot, \tilde{N}(\cdot))$ eine Orientierung von M und (U, φ) ein lokales Koordinatensystem bei p. Wir zeigen, dass die Gleichung für v, w aus der kanonischen Basis von T_pM erfüllt ist. Es gilt

$$0 = \partial_j \underbrace{\langle \tilde{N}(\varphi(x)), \partial_i\varphi(x)\rangle}_{\equiv 0} = \langle \underbrace{\mathrm{d}_x(\tilde{N}\circ\varphi)(e_j)}_{\substack{=(\mathrm{d}_{\varphi(x)}\tilde{N}\circ \mathrm{d}_x\varphi)(e_j) \\ =-\mathscr{L}_{\varphi(x)}(\mathrm{d}_x\varphi(e_j)) \\ =-\mathscr{L}_{\varphi(x)}\partial_j\varphi(x)}}, \mathrm{d}_x\varphi(e_i)\rangle + \langle \tilde{N}(\varphi(x)), \partial_j\partial_i\varphi(x)\rangle$$

Mit $p = \varphi(x)$ und $\partial_j\partial_i\varphi(x) = \partial_i\partial_j\varphi(x)$ folgt damit

$$\langle \mathscr{L}_p\partial_j\varphi(x), \partial_i\varphi(x)\rangle = \langle \tilde{N}(p), \partial_i\partial_j\varphi(x)\rangle = \langle \tilde{N}(p), \partial_j\partial_i\varphi(x)\rangle = \langle \mathscr{L}_p\partial_i\varphi(x), \partial_j\varphi(x)\rangle.$$

Da $(\mathrm{d}_x\varphi(e_1), ..., \mathrm{d}_x\varphi(e_n)) = (\partial_1\varphi(x), ..., \partial_n\varphi(x))$ eine Basis von T_pM ist, folgt die Behauptung. ■

Definition 3.22

Die Eigenwerte $\lambda_1(p) \le ... \le \lambda_n(p)$ von $\mathscr{L}_p$ heißen die *Hauptkrümmungen* von M in p.

Jeder normierte Eigenvektor von $\mathscr{L}_p$ heißt eine *Hauptkrümmungsrichtung*.

Die *mittlere Krümmung* von M in p ist definiert als

$$H(p) := \frac{1}{n}\mathrm{Spur}(\mathscr{L}_p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p).$$

Die *Gauß-Kronecker-Krümmung* von M in p ist

$$K(p) := \det(\mathscr{L}_p) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k(p).$$

Bemerkung 3.23

Bei Änderung der Orientierung von M nahe p auf $-N$ geht $\mathscr{L}_p$ über in $-\mathscr{L}_p$. Das *mittlere Krümmungsfeld*

$$\vec{H}(p) := H(p)N(p) = (p, H(p)\tilde{N}(p))$$

ist also auch für nicht orientierte bzw. nicht orientierbare Hyperflächen wohldefiniert.

Dies gilt auch für die Gauß-Kronecker-Krümmung, falls n gerade.

3.5 Die Normalkrümmung

Definition 3.24

Seien M orientiert und $v \in T_pM$ mit $||v|| = 1$. Dann heißt $\varkappa(v) := g_p(\mathscr{L}_p(v), v)$ die *Normalkrümmung von M in Richtung v*.

Bemerkung 3.25

Sind M orientiert durch N, $p \in M$, $v \in T_pM$ und $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ glatt mit $v = (\alpha(0), \dot\alpha(0))$, so ist $g_p(\mathscr{L}_p(v), v) = \langle \ddot\alpha(0), \tilde N(p)\rangle$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \dot\alpha, \tilde N \circ \alpha\rangle^{\cdot}(0) \\ &= \langle \ddot\alpha(0), \tilde N(p)\rangle + \langle \dot\alpha(0), (\tilde N \circ \alpha)^{\cdot}(0)\rangle \\ &= \langle \ddot\alpha(0), \tilde N(p)\rangle + g_p((p, \dot\alpha(0)), (p, (\tilde N \circ \alpha)^{\cdot}(0))) \\ &= \langle \ddot\alpha(0), \tilde N(p)\rangle + g_p(-\nabla_v N, v) \\ &= \langle \ddot\alpha(0), \tilde N(p)\rangle - g_p(\mathscr{L}_p(v), v). \end{aligned}$$

Satz 3.26

Seien M orientiert durch N und $v = (p, \tilde v) \in T_pM$ mit $||v|| = 1$. Setze

$$E(p) := \{p + s\tilde v + t\tilde N(p) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{p\} + \operatorname{span}\{\tilde v, \tilde N(p)\} \cong \mathbb{R}^2. \qquad \text{(normaler Schnitt)}$$

Dann gibt es ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p \in U$ und eine ebene $\mathcal{C}^\infty$-Kurve Γ in $E(p)$ derart, dass $p \in \operatorname{Spur}(\Gamma) \subseteq U \cap M \cap E(p)$ und $\varkappa(v) = \varkappa_\gamma(t_0)$ für jeden Repräsentanten γ von Γ mit $\gamma(t_0) = p$.

Beweis

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ mit $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und 0 regulärer Wert von f. Wegen $\langle \nabla f(p), \tilde N(p)\rangle \neq 0$ können wir Œ annehmen, dass $\langle \nabla f(x), \tilde N(p)\rangle \neq 0$ für alle $x \in M \cap U$. Parametrisiere $E(p)$ durch

$$\iota : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \iota(s,t) := p + s\tilde v + t\tilde N(p)$$

und setze $\tilde U := \iota^{-1}(U)$, $g := f \circ \iota : \tilde U \to \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde M := \iota^{-1}(M \cap U) = g^{-1}(0)$ und für alle $s, t \in \tilde M$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla g(s,t) &= ((\nabla f)(\iota(s,t))\partial_s\iota(s,t), (\nabla f)(\iota(s,t))\partial_t\iota(s,t)) \\ &= ((\nabla f)(\iota(s,t))\tilde v, (\nabla f)(\iota(s,t))\tilde N(p)) \\ &= \langle 0, \pm||(\nabla f)(\iota(s,t))||\rangle \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

d.h. $\tilde M$ ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^2$. Werde diese bei $(0,0) = \iota^{-1}(p)$ durch $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ lokal parametrisiert mit $\gamma(t_0) = 0$, $||\dot\gamma|| \equiv 1$ und $\dot\gamma(t_0) = (1,0)$ (wegen $\nabla g(0,0) = (0, \pm *)$ ist $(1,0)$ tangential an $\tilde M$). Dann sind $\vec\nu_\gamma(t_0) = (0,1)$ und

$$\varkappa_\gamma(t_0) = \langle \ddot\gamma(t_0), \vec\nu_\gamma(t_0)\rangle = \ddot\gamma_2(t_0).$$

Andererseits gilt für $\alpha := \iota \circ \gamma$, dass $\alpha(t_0) = p$ und $\dot\alpha(t) = \dot\gamma_1(t)\tilde v + \dot\gamma_2(t)\tilde N(p)$, also $\dot\alpha(t_0) = \tilde v$ und nach Bem. 3.25

$$\varkappa(v) = \langle \ddot\alpha(t_0), \tilde N(p)\rangle = \ddot\gamma_2(t_0).$$

Für die Kurve $\Gamma := [\iota \circ \gamma] = [\alpha]$ folgt also die Behauptung. ∎

3.6 Die zweite Fundamentalform

Definition 3.27

Sei M orientiert. Die *zweite Fundamentalform* von M im Punkt $p \in M$ ist die Bilinearform

$$h_p(v, w) := g_p(\mathscr{L}_p(v), w) \qquad (v, w \in T_pM).$$

Bemerkung 3.28

Die mit $\mathscr{L}_p$ assoziierte *quadratische Form*

$$\mathscr{S}_p(v) := h_p(v, v) = g_p(\mathscr{L}_p(v), v) \qquad (v \in T_pM)$$

enthält genau so viel Information wie die zweite Fundamentalform h_p:

$$h_p(v, w) = \frac{1}{2}(\mathscr{S}_p(v + w) - \mathscr{S}_p(v) - \mathscr{S}_p(w)).$$

Man bezeichnet daher auch $\mathscr{S}_p$ als die zweite Fundamentalform von M in p.

Satz 3.29

Sei M eine kompakte, orientierte Hyperfläche, dann gibt es ein $p \in M$, so dass h_p positiv oder negativ definit ist.

Insbesondere sind alle Normalkrümmungen in p positiv oder negativ.

Beweis

Setze $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ||x||^2$. Da M kompakt, gibt es $p \in M$ mit $g(p) = \max\{g(q) \mid q \in M\}$.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Umgebung von p, $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f mit $M \cap U = f^{-1}(y)$. Nach dem Multiplikatorensatz von Lagrange existiert dann ein $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ derart, dass $\nabla g(p) = \tilde{\mu} \nabla f(p)$, wegen $N(p) = (p, \frac{\nabla f(p)}{||\nabla f(p)||})$ also auch ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\mu \tilde{N}(p) = \nabla g(p) = 2p$, insbesondere $|\mu| = 2||p||$.

Ist $\mu = 0$, dann auch $p = 0$; wegen $g(0) = \min\{g(q) \mid q \in M\}$ können wir also Œ annehmen, dass $\mu > 0$ oder $\mu < 0$.

Ist $\mu > 0$, dann $\tilde{N}(p) = \frac{p}{||p||}$. Sei $v \in T_pM$, dargestellt durch $v = (p, \dot{\alpha}(0))$, normiert, dann besitzt $g \circ \alpha$ ein (lokales) Maximum in $t = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &\geq (g \circ \alpha)^{\cdot\cdot}(0) \\ &= (((\nabla g) \circ \alpha) \cdot \dot{\alpha})^{\cdot}(0) \\ &= \langle 2\alpha, \dot{\alpha}\rangle^{\cdot}(0) \\ &= 2(||\dot{\alpha}(0)||^2 + \langle \alpha(0), \ddot{\alpha}(0)\rangle) \\ &= 2(1 + ||p||\langle \tilde{N}(p), \ddot{\alpha}(0)\rangle) \\ &= 2(1 + ||p||\varkappa(v)), \end{aligned}$$

also $\varkappa(v) \leq -\frac{1}{||p||} < 0$, d.h. h_p ist negativ definit.

Ist $\mu > 0$, so erhalten wir durch analoge Rechnung $\varkappa(v) > 0$, d.h. h_p ist dann positiv definit. ■

Bemerkung 3.30 (lokale Darstellung der zweiten Fundamentalform)

Ist (U, φ) ein lokales Koordinatensystem von M, so ist h auf $\varphi(U)$ eindeutig bestimmt durch

$$h_{ij}^\varphi(x) := h_{\varphi(x)}(\mathrm{d}_x\varphi(e_i), \mathrm{d}_x\varphi(e_j)) \overset{(3.21)}{=} \langle \tilde{N}(\varphi(x)), \partial_i\partial_j\varphi(x)\rangle \qquad (x \in U).$$

Die Funktion $h^\varphi := (h_{ij}^\varphi)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n} : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt die *lokale Darstellung* der zweiten Fundamentalform bzgl. (U, φ). Die Hauptkrümmungen sind die Eigenwerte von $(h_{ij}^\varphi(x)) = \mathrm{Mat}(\mathscr{L}_{\varphi(x)})$.

Satz 3.31

Ist $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ ein weiteres lokales Koordinatensystem mit $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$, so gelten

$$h_{ij}^{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}) = \sum_{k,l=1}^{n} h_{kl}^{\varphi}(x)\partial_i(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_k(\tilde{x})\partial_j(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_l(\tilde{x})$$

bzw.

$$h^{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}) = \mathrm{d}(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x})^T h^{\varphi}(x)\mathrm{d}(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x}).$$

Beweis

Folgt wie Satz 3.5 aus der Transformationsformel für die Gramsche Matrix der symmetrischen Bilinearform $(h_{ij}(x))_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n}$. ∎

Beispiel 3.32

Sei M der Graph von $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, parametrisiert durch $\varphi : x \mapsto (x, u(x))$. Dann ist

$$h_{ij}^{\varphi}(x) \overset{(3.12)}{=} \left\langle \frac{(-\nabla u(x), 1)}{\sqrt{1 + ||\nabla u(x)||^2}}, \partial_i\partial_j\varphi(x) \right\rangle = \frac{\partial_i\partial_j u(x)}{\sqrt{1 + ||\nabla u(x)||^2}} \qquad (x \in \Omega).$$

Definition 3.33

Sei (U, φ) eine lokale Parametrisierung von M. Dann heißen

$$\Gamma_{ij}^{k} := \Gamma_{ij}^{k\varphi} := \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) : U \to \mathbb{R}$$

die *Christoffel-Symbole* der ersten Fundamentalform (bzgl. (U, φ)).

Satz 3.34 (Gauß-Formel)

Seien $N(\cdot) = (\cdot, \tilde{N}(\cdot))$ eine Orientierung von M und (U, φ) eine lokale Parametrisierung. Dann gilt

$$h_{ij}^{\varphi}(x)\tilde{N}(\varphi(x)) = \partial_i\partial_j\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k\varphi}(x)\partial_k\varphi(x) \qquad (x \in U).$$

Beweis

Jedes $w = w_1 + w_2 \in T_pM \oplus T_pM^{\perp} = \mathbb{R}^{n+1}$ hat nach (3.2) eine Darstellung

$$w = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}(x)\langle w, \partial_l\varphi(x)\rangle\partial_k\varphi(x) + \langle w, \tilde{N}(\varphi(x))\rangle\tilde{N}(\varphi(x)) \qquad (x \in U \text{ bel.}).$$

Setze $w := \partial_i\partial_j\varphi(x)$, dann

$$\partial_i\partial_j\varphi(x) \overset{(3.30)}{=} \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}(x)\langle\partial_i\partial_j\varphi(x), \partial_l\varphi(x)\rangle\partial_k\varphi(x) + h_{ij}(x)\tilde{N}(\varphi(x)).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{k}(x) &= \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}g^{kl}(x)(\partial_i g_{jl}(x) + \partial_j g_{il}(x) - \partial_l g_{ij}(x)) \\
&= \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}g^{kl}(x)(\partial_i\langle\partial_j\varphi(x), \partial_l\varphi(x)\rangle + \partial_j\langle\partial_i\varphi(x), \partial_l\varphi(x)\rangle - \partial_l\langle\partial_i\varphi(x), \partial_j\varphi(x)\rangle) \\
&= \sum_{l=1}^{n} g^{kl}\langle\partial_i\partial_j\varphi(x), \partial_l\varphi(x)\rangle.
\end{aligned}$$

∎

3.7 Mittlere Krümmung und Gauß-Kronecker-Krümmung

Satz 3.35 (lokale Darstellung der mittleren Krümmung und der Gauß-Kronecker-Krümmung)
Seien (U, φ) ein lokales Koordinatensystem von M und $x \in U$.
Dann besitzen die mittlere Krümmung H und die Gauß-Kronecker-Krümmung K lokale Darstellungen

$$\begin{aligned} H(\varphi(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} g_{\varphi}^{ij}(x) h_{ij}^{\varphi}(x); \\ K(\varphi(x)) &= \frac{\det(h^{\varphi}(x))}{\det(g^{\varphi}(x))}. \end{aligned}$$

Insbesondere sind $H, K : M \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen.

Beweis
Sei $p = \varphi(x)$. Da $\mathscr{L}_p$ selbstadjungiert ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{E} := (e_1, ..., e_n)$ von T_pM aus Hauptkrümmungsrichtungen. Insbesondere ist

$$h_p(e_i, e_j) = g_p(\mathscr{L}_p(e_i), e_j) = \lambda_i(p) g_p(e_i, e_j) = \lambda_i(p)\delta_{ij}.$$

Bezeichne $\mathcal{F} := (f_1, ..., f_n) := (\partial_1 \varphi(x), ..., \partial_n \varphi(x))$ die kanonische Basis von $\tilde{T}_pM$ und $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le n}$ die Transformationsmatrix von $(\tilde{T}_pM, \mathcal{E})$ nach $(\tilde{T}_pM, \mathcal{F})$, d.h.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E} & \tilde{T}_pM & \xrightarrow{\text{id}} & \tilde{T}_pM & \mathcal{F} & \qquad & \Psi_{\mathcal{E}} : e_i \mapsto e^{(i)} \\ \Psi_{\mathcal{E}} & \downarrow & & \downarrow & \Psi_{\mathcal{F}} & & \Psi_{\mathcal{F}} : f_i \mapsto e^{(i)} \\ E_n & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{Lin}(A)} & \mathbb{R}^n & E_n & & \boxed{e_i = \sum a_{ki} f_k} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lin}(A)(e^{(i)}) = (\Psi_{\mathcal{F}} \circ \Psi_{\mathcal{E}}^{-1})(e^{(i)}) = \Psi_{\mathcal{F}}(e_i) = \Psi_{\mathcal{F}}(\sum a_{ki} f_k) = \sum a_{ki} \Psi_{\mathcal{F}}(f_k) = \sum a_{ki} e^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt nach der Transformationsformel (3.2)

$$g^{\varphi}(x) = (A^{-1})^T \text{Id}(A^{-1}) \qquad \text{bzw.} \qquad (g^{\varphi})^{-1}(x) =: g_{\varphi}(x) = AA^T$$

und wir erhalten

$$nH(p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p) = \sum_{i,j=1}^{n} h_p(e_i, e_j) = \sum_{i,k,l=1}^{n} a_{ki} a_{li} h_p(f_k, f_l) = \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} a_{li} \right) h_{kl}^{\varphi}(x) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{\varphi}^{kl}(x) h_{kl}^{\varphi}(x).$$

Weiter hat $K(p)$ wegen $(h_p(e_i, e_j))_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le n} = \text{diag}(\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)) = A^T h^{\varphi}(x) A$ die Darstellung

$$K(p) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k(p) = \frac{\det(h_p(e_i, e_j))_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le n}}{\det(\text{Id})} = \frac{\det(A^T h^{\varphi}(x) A)}{\det(A^T g^{\varphi}(x) A)} = \frac{\det h^{\varphi}(x)}{\det g^{\varphi}(x)}.$$

■

Theorem 3.36
Seien M orientiert durch N und $p \in M$.
Ist Z nahe p ein glattes Vektorfeld mit $N = \frac{Z}{||Z||}$ und ist $\mathcal{V} := (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von T_pM, so gilt

$$K(p) = \frac{(-1)^n}{||Z(p)||^n} \frac{\det(\nabla_{v_1} Z, ..., \nabla_{v_n} Z, Z(p))}{\det(v_1, ..., v_n, Z(p))}.$$

Bemerkung 3.37
Die mittlere Krümmung ist das arithmetische Mittel der Normalkrümmungen in Richtung der Hauptkrümmungen.

3.8 Integration auf Hyperflächen

Definition 3.38

Seien $f : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und (U, φ) ein lokales Koordinatensystem von M derart, dass für den Träger $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$ von f gilt $\operatorname{supp}(f) \subseteq \varphi(U)$.

Wir nennen f *integrierbar über M*, falls

$$\int_M f(x)\ \mathrm{d}\sigma(x) := \int_U f(\varphi(x))\sqrt{\det(g^\varphi(x))}\ \mathrm{d}x < \infty$$

(insbesondere $(f \circ \varphi)\sqrt{\det(g^\varphi)} \in L^1(U)$).

Der formale Ausdruck $\sqrt{\det(g^\varphi)}$ heißt *Flächenelement* (bzgl. (U, φ)).

Bemerkung 3.39

Der Wert $\int_M f(x)\ \mathrm{d}\sigma(x)$ hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung (U, φ) ab: Sei dazu $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ ein weiteres lokales Koordinatensystem mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Nach Satz 3.5 gilt mit $W := \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))$ und $\phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{W} \to W$, dass

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{W} : \sqrt{\det(g^{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}))} = |\det(\mathrm{d}\phi(\tilde{x}))| \sqrt{\det(g^\varphi(\phi(\tilde{x})))}.$$

Nach dem Transformationssatz für Integrale folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{U}} f(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))\sqrt{\det(g^{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}))}\ \mathrm{d}\tilde{x} \\
=& \int_{\tilde{W}} (f \circ \varphi)(\phi(\tilde{x}))\sqrt{\det(g^\varphi(\phi(\tilde{x})))} |\det(\mathrm{d}\phi(\tilde{x}))|\ \mathrm{d}\tilde{x} \\
=& \int_W (f \circ \varphi)(x)\sqrt{\det(g^\varphi(x))}\ \mathrm{d}x \\
=& \int_U f(\varphi(x))\sqrt{\det(g^\varphi(x))}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wir nehmen ab jetzt an, dass f obigen Voraussetzungen genügt.

Beispiel 3.40

(1) Seien M eindimensional und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine lokale Parametrisierung von M, dann ist

$$\int_M f(t)\ \mathrm{d}\sigma(t) = \int_I f(\gamma(t))||\dot{\gamma}(t)||\ \mathrm{d}t.$$

(2) Sei M der Graph von $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, parametrisiert durch $\varphi : x \mapsto (x, u(x))$, dann gilt

$$\int_M f(x)\ \mathrm{d}\sigma(x) = \int_\Omega f(x, u(x))\sqrt{1 + ||\nabla u(x)||^2}\ \mathrm{d}x.$$

Bemerkung 3.41 (Zerlegung der Eins)

Sei $\mathcal{V} := (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M, d.h. alle V_α offen und $M = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Dann gibt es stetige Funktionen $\psi_i : M \to [0, 1],\ i \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq V$ für ein $V \in \mathcal{V}$;

(2) Für jedes Kompaktum $K \subseteq M$ gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\psi_j|_K \equiv 0$ für alle $j \geq i$;

(3) Für jedes $p \in M$ gilt $\sum_{i=1}^\infty \psi_i(p) = 1$.

Man nennt $\Psi := (\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine (der Überdeckung $\mathcal{V}$ untergeordnete) *Zerlegung der Eins*.

Definition 3.42

Seien $\mathcal{V} = (\varphi_\alpha(U_\alpha))_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von M mit lokalen Koordinatensystemen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ und $\Psi = (\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{V}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *integrierbar über M*, falls gelten:

(1) alle $f \cdot \psi_i$ sind über M integrierbar, d.h. $\int_M f(x)\psi_i(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) < \infty$ für alle i und

(2) $\sum_{i=1}^\infty \int_M |f(x)|\psi_i(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) < \infty$.

Wir nennen

$$\int_M f(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) := \sum_{i=1}^\infty \int_M f(x)\psi_i(x)\, \mathrm{d}\sigma(x)$$

dann das *Integral von f über M*.

Bemerkung 3.43

Die Definition ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{V}$, d.h. ist f integrierbar über M für eine Überdeckung $\mathcal{V}$, dann für jede beliebige.

Auch der Wert des Integrals ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{V}$.

Definition 3.44

Seien $A \subseteq M$ und $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. f heißt *integrierbar über A*, falls die Funktion

$$f_A : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

über M integrierbar ist.

A heißt *messbar*, falls die Einsfunktion 1 über A integrierbar ist.

Wir schreiben

$$\int_A f(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) := \int_M f_A(x)\, \mathrm{d}\sigma(x), \qquad \mathrm{vol}(A) := \int_A 1\, \mathrm{d}\sigma(x).$$

$\mathrm{vol}(A)$ heißt das *Volumen* bzw. der *Flächeninhalt* von A.

Ist $A \subseteq M$ messbar mit $\mathrm{vol}(A) = 0$, so heißt A eine *Nullmenge*.

Bemerkung 3.45

Genau dann ist ein messbares $A \subseteq M$ eine Nullmenge, wenn $\varphi^{-1}(A \cap \varphi(U))$ in U eine Lebesgue-Nullmenge ist für jedes lokale Koordinatensystem (U, φ) von M.

Theorem 3.46

(1) Seien $f, g : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei f integrierbar über M. Stimmen f, g außerhalb einer Nullmenge überein, so ist auch g integrierbar und liefert den gleichen Integralwert über M wie f.

(2) Ist $A \subseteq M$ eine Nullmenge, so gilt $\int_M f(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) = \int_{M \setminus A} f(x)\, \mathrm{d}\sigma(x)$.

3.9 Minimalflächen

DEFINITION 3.47

Eine Hyperfläche M heißt eine *Minimalfläche*, falls $\vec{H} \equiv 0$ auf M.

BEMERKUNG 3.48

(1) Bei orientierten Hyperflächen ist dies äquivalent dazu, dass $H \equiv 0$ auf M.

(2) Nach Satz 3.29 gibt es keine kompakten Minimalflächen.

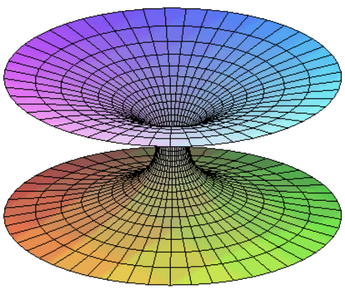
BEISPIEL 3.49

Sei M eine Rotationsfläche, gegeben durch

$$\varphi(s,t) := \begin{pmatrix} r(s)\cos(t) \\ r(s)\sin(t) \\ s \end{pmatrix} \qquad ((s,t) \in (a,b) \times (-\pi,\pi))$$

mit glattem, positivem $r : (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann ist M genau dann eine Minimalfläche, wenn

$$\frac{\dot{r}(s)\ddot{r}(s)}{1+\dot{r}(s)^2} = \frac{\dot{r}(s)}{r(s)} \qquad (s \in (a,b)) \qquad \text{(Übungen)}.$$



Integration liefert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\ln(1+\dot{r}(s)^2) = \ln(r(s)) + \ln(c) \\ \Leftrightarrow\quad & 1+\dot{r}(s)^2 = cr \\ \Leftrightarrow\quad & \dot{r}(s) = \pm(c^2 r(s)^2 - 1) \\ \Leftrightarrow\quad & r(s) = \frac{1}{|c|}\cosh(cs+d),\ c,d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die resultierende Fkäche wird dann ein *Katenoid* genannt.

BEISPIEL 3.50

Sei M der Graph von $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parametrisiert durch $\varphi : x \mapsto (x, u(x))$. Dann ist

$$g^{\varphi}(x) \overset{(3.7)}{=} \mathrm{Id} + \nabla u(x)^T \nabla u(x) \ \Rightarrow\ g_{\varphi}^{-1}(x) = \mathrm{Id} - \frac{\nabla u(x)^T \nabla u(x)}{1+||\nabla u(x)||^2}.$$

Zusammen mit

$$h_{ij}^{\varphi}(x) \overset{(3.32)}{=} \frac{\partial_i \partial_j u(x)}{\sqrt{1+||\nabla u(x)||^2}}, \qquad H(\varphi(x)) \overset{(3.35)}{=} \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} g_{\varphi}^{ij}(x) h_{ij}^{\varphi}(x)$$

ergibt sich für die mittlere Krümmung bzgl. (Ω, φ), dass

$$H \circ \varphi = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial_i \partial_j u}{\sqrt{1+||\nabla u||^2}} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+||\nabla u||^2}\right).$$

Somit ist M genau dann eine Minimalfläche, wenn u folgende quasilineare PDE auf Ω erfüllt:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{1+||\nabla u||^2}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i u \partial_j u \partial_i \partial_j u.$$

SATZ 3.51

Seien M eine Hyperfläche mit endlichem Flächeninhalt und $X = (\cdot, \tilde{X}(\cdot))$ ein glattes Normalenvektorfeld auf M mit kompaktem Träger. Dann ist $M(t) := M(t)(X) := \{p + t\tilde{X}(p) \mid p \in M\}$ für hinreichend kleine t eine Hyperfläche, die *eigentliche, normale Variation* von M, und es gilt

$$(\mathrm{vol}(M))^{\cdot}(0) = -n \int_M \langle X(p), \vec{H}(p)\rangle \, \mathrm{d}\sigma(p).$$

Beweis

Wir nehmen zunächst an, dass es ein Koordinatensystem (U, φ) gibt mit $\operatorname{supp}(X) \subseteq \varphi(U)$. Wir orientieren $\varphi(U)$ wie in (3.11) durch ein glattes Einheitsnormalenfeld N derart, dass

$$\forall x \in U : \det\Big(\partial_1\varphi(x), ..., \partial_n\varphi(x), \tilde{N}(\varphi(x))\Big) > 0. \qquad (*)$$

Weiter definiert $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x) + t\tilde{X}(\varphi(x))$ $(x \in U)$ für hinreichend kleines t eine lokale Parametrisierung von M_t (Störungsresultat) und mit $f(p) := \langle X(p), N(p)\rangle$ $(p \in \varphi(U))$ gilt

$$\tilde{X}(p) = \langle X(p), N(p)\rangle \tilde{N}(p) = f(p)\tilde{N}(p).$$

Differenziation nach Produktregel ergibt mit $p = \varphi(x)$ also

$$\partial_i\varphi_t(x) = \partial_i\varphi(x) + t\partial_i(f \circ \varphi)(x)(\tilde{N}(\varphi(x))) + tf(\varphi(x))\partial_i(\tilde{N} \circ \varphi)(x).$$

Sei $A := (a_{ij}(x))_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n} = \operatorname{Mat}(\mathscr{L}_p)$ die zu $\mathscr{L}_{\varphi(x)}$ gehörige Matrix bzgl. der zu φ gehörigen, kanonischen Basis von T_pM, dann ist

$$\partial_i(\tilde{N} \circ \varphi)(x) = -\mathscr{L}_{\varphi(x)}(\partial_i\varphi(x)) = -\sum_{j=1}^n a_{ji}(x)\partial_j\varphi(x).$$

Sei N_t ein Normalenfeld zu φ_t vom Typ $(*)$, dann

$$\begin{aligned}
(\operatorname{vol}(M))^{\cdot}(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{M_t} 1 \,\mathrm{d}\sigma(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_U \sqrt{\det(g^{\varphi_t}(x))}}_{=\sqrt{\det(\langle\partial_i\varphi_t(x),\partial_j\varphi_t(x)\rangle)}} \,\mathrm{d}x\Big|_{t=0} \\
&= \int_U \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\partial_1\varphi_t(x), ..., \partial_n\varphi_t(x), \tilde{N}_t(\varphi_t(x))) \,\mathrm{d}x\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Da det multilinear, gilt „$(\det(\varphi_1(t), \varphi_2(t)))^{\cdot} = \det(\dot{\varphi}_1(t), \varphi_2(t)) + \det(\varphi_1(t), \dot{\varphi}_2(t))$“, d.h.

$$\begin{aligned}
&\int_U \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\partial_1\varphi_t(x), ..., \partial_n\varphi_t(x), (\tilde{N}_t \circ \varphi_t)(x))\Big|_{t=0} \,\mathrm{d}x \\
=\ &\int_U \sum_{i=1}^n \det\Big(\partial_1\varphi(x), ..., \underbrace{\partial_i(f \circ \varphi)(x)(\tilde{N} \circ \varphi)(x)}_{=0} - f(\varphi(x))\sum_{j=1}^n a_{ji}\partial_j\varphi(x), ..., \partial_n\varphi(x)\Big) \\
&\underbrace{+\det\Big(\partial_1\varphi(x), ..., \partial_n\varphi(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{N}_t \circ \varphi_t)\Big|_{t=0}\Big)}_{=0,\text{ siehe } (**)} \,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Lin.}}{=}\ &\int_U f(\varphi(x))\sum_{i,j=1}^n a_{ji}\det(\partial_1\varphi(x), ..., \underbrace{\partial_j\varphi(x)}_{\text{Stelle } i}, ..., \partial_n\varphi(x), \tilde{N}(\varphi(x))) \,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Alt.}}{=}\ &-\int_U f(\varphi(x))\sum_{i=1}^n a_{ii}\sqrt{\det(g^{\varphi}(x))} \,\mathrm{d}x \\
=\ &-n\int_U f(\varphi(x))H(\varphi(x))\sqrt{\det(g^{\varphi}(x))} \,\mathrm{d}x \\
=\ &-n\int_U \langle X(\varphi(x)), \vec{H}(\varphi(x))\rangle\sqrt{\det(g^{\varphi}(x))} \,\mathrm{d}x \\
=\ &-n\int_M \langle X(p), \vec{H}(p)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(p).
\end{aligned}$$

Noch zu $(**)$: Wegen

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\langle(\tilde{N}_t \circ \varphi_t)(x), (\tilde{N}_t \circ \varphi_t)(x)\rangle}_{=1}\Big|_{t=0} = 2\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{N}_t \circ \varphi_t)\Big|_{t=0}, (\tilde{N} \circ \varphi)(x)\right\rangle$$

ist $(\varphi(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{N}_t \circ \varphi_t)(x)|_{t=0}) \in T_{\varphi(x)}M$, d.h. Linearkombination aus $\partial_1\varphi(x), ..., \partial_n\varphi(x)$. Damit verschwindet die Determinante.

Nun zum allgemeinen Fall: Seien $\mathcal{V} = (\varphi_\alpha(U_\alpha))_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung von M mit lokalen Koordinatensystemen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ und $\Psi = (\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{V}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Da $\operatorname{supp}(X)$ kompakt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{X} = \sum_{i=1}^N \tilde{X}^{(i)} := \sum_{i=1}^N \psi_i \cdot \tilde{X}$. Alle $X^{(i)}$ haben dann einen kompakten Träger in einer Koordinatenumgebung. Setze

$$M(t_1, ..., t_N) := \left\{ p + \sum_{i=1}^N t_i \tilde{X}^{(i)}(p) \;\middle|\; p \in M \right\},$$

dann gilt mit eben Gezeigtem

$$\begin{aligned}
(\operatorname{vol}(M))^{\cdot}(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{vol}(M(t, ..., t))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i}\operatorname{vol}(M(0, ..., t_i, ..., 0))\Big|_{t_i=0} \\
&= -n \sum_{i=1}^N \int_M \langle X^{(i)}(p), \vec{H}(p)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(p) \\
&= -n \int_M \langle X(p), \vec{H}(p)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(p).
\end{aligned}$$

■

Korollar 3.52

Genau dann ist M eine Minimalfläche, wenn M ein kritischer Punkt des Volumenfunktionals bzgl. aller eigentlichen, normalen Variationen von M ist.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei M eine Minimalfläche, dann gilt nach eben Gezeigtem

$$(\operatorname{vol}(M))^{\cdot}(0) = -n \int_M \langle X(p), \underbrace{\vec{H}(p)}_{=0}\rangle \,\mathrm{d}\sigma(p) = 0.$$

$\Leftarrow$: Gebe es ein $p \in M$ mit $\vec{H}(p) \neq 0$. Wähle ein glattes $f : M \to [0, 1]$ mit kompaktem Träger und $f(p) > 0$. Für $X := f \cdot \vec{H}$ gilt dann

$$(\operatorname{vol}(M))^{\cdot}(0) = -n \int_M \langle f(p)\vec{H}(p), \vec{H}(p)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(p) = -n \int_M f(p)||\vec{H}(p)||^2 \,\mathrm{d}\sigma(p) < 0,$$

d.h. M ist kein kritischer Punkt von vol. ■

Definition 3.53

Eine Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *isotherm*, falls zu jedem Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinsystem (U, φ) existiert mit $p \in U$ und $g^\varphi = f \cdot \mathrm{Id}$ für eine glatte Funktion $f = f_\varphi : U \to \mathbb{R}$ (insbes. $f > 0$).

Satz 3.54

Seien M isotherm, $p \in M$ und (U, φ) eine lokale Parametrisierung von M um p. Dann gilt

$$\forall x \in U : (\varphi(x), \Delta\varphi(x)) = 2f(x)\vec{H}(\varphi(x)).$$

Insbesondere ist M genau dann eine Minimalfläche, wenn die Koordinatenfunktionen $\varphi : U \to \mathbb{R}$ harmonisch sind für alle solchen (U, φ).

Beweis

Sei $(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}$, dann gilt

$$\langle \partial_i^2\varphi, \partial_i\varphi\rangle = \frac{1}{2}\partial_i g_{ii}^{\varphi} = \frac{1}{2}\partial_i g_{jj}^{\varphi} = \langle \partial_i\partial_j\varphi, \partial_j\varphi\rangle = \partial_j \underbrace{\langle \partial_i\varphi, \partial_j\varphi\rangle}_{=g_{ij}=0} - \langle \partial_i\varphi, \partial_j^2\varphi\rangle = -\langle \partial_i\varphi, \partial_j^2\varphi\rangle,$$

also $\langle \Delta\varphi, \partial_1\varphi\rangle \equiv \langle \Delta\varphi, \partial_2\varphi\rangle \equiv 0$, d.h. $(\varphi(x), \Delta\varphi(x)) \in T_{\varphi(x)}M^{\perp}$.

Sei nun $\varphi(U)$ orientiert durch ein Einheitsnormalenfeld N, dann

$$\begin{aligned} 2H(\varphi(x)) &\overset{(3.35)}{=} \sum_{i,j=1}^{2} g_{\varphi}^{ij}(x) h_{ij}^{\varphi}(x) \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} \frac{(h_{11}^{\varphi}(x) + h_{22}^{\varphi}(x))}{f(x)} \\ &\overset{(3.30)}{=} \frac{\langle \tilde{N}(\varphi(x)), \Delta\varphi(x)\rangle}{f(x)}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wie gewünscht

$$\Delta\varphi(x) = \langle \Delta\varphi(x), \tilde{N}(\varphi(x))\rangle \tilde{N}(\varphi(x)) = 2f(x)H(\varphi(x))\tilde{N}(\varphi(x)).$$ ■

Beispiel 3.55 (Young-Laplace-Gleichung, 1805)

In einem kugelförmigen Wassertropfen vom Radius r herrscht aufgrund der Oberflächenspannung σ an der Grenzfläche zwischen der Flüssigkeit und der umgebenden Luft ein erhöhter Druck. Es gilt für den durch die Oberflächenspannung hervorgerufenen Druck $p = p(x)$ in einem Punkt x, der auf der Sphäre liegt:

$$\boxed{p(x) = -2\sigma H(x)}$$

Herleitung: Für die Kugeloberfläche $A = 4\pi r^2$ und das Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ gilt bei infinitesimaler Änderung $\mathrm{d}r$ des Radius:

$$\mathrm{d}A = 8\pi r\ \mathrm{d}r, \qquad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\ \mathrm{d}r.$$

Die infinitesimale Änderung $\mathrm{d}W$ der Energie muss bei den Vorgängen identisch sein, d.h.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \sigma\ \mathrm{d}A = 8\pi\sigma r\ \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}W &= p\ \mathrm{d}V = 4\pi p r^2\ \mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = \frac{2\sigma}{r}.$$

Nun ist das (äußere) Einheitsnormalenfeld N der Kugel gegeben durch $N : x \mapsto (x, \frac{x}{r})$, für die mittlere Krümmung H erhalten wir also

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(\mathscr{L}_x) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(-\mathrm{d}\tilde{N}(x)) = -\frac{1}{2r}\mathrm{Spur}(\mathrm{Id}) = -\frac{1}{2r}.$$

4 Innere Geometrie von Hyperflächen

4.1 Kovariante Ableitung

Definition 4.1

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \to M$ glatt. Ein *Vektorfeld längs α* ist eine glatte Funktion $X : I \to \mathbb{R}^{2(n+1)}$ mit $X(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^{n+1})$ für alle $t \in I$.

Für $t \in I$ gibt es also ein glattes $\tilde{X} : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(t) = (\alpha(t), \tilde{X}(t)) \in T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^{n+1})$.

X heißt *tangential*, falls sogar $X(t) \in T_{\alpha(t)}M$ für jedes $t \in I$.

Wir schreiben im Folgenden $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) := (\alpha(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{X}(t))$.

Beispiel 4.2

(1) Ist Y ein Vektorfeld, dann ist $X := Y \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^{2(n+1)}$ ein tangentiales Vektorfeld längs α.

(2) Das *Geschwindigkeitsvektorfeld* $\alpha'(t) := (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$ von α ist ein tangentiales Vektorfeld längs α.

Definition 4.3

Sei X ein tangentiales Vektorfeld längs α. Die *kovariante Ableitung* $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t)$ von X in $t \in I$ ist die orthogonale Projektion von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)$ auf $T_{\alpha(t)}M$ (im Raum $T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{\alpha(t)\} \times \mathbb{R}^{n+1}$).

Damit ist $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X$ wieder ein tangentiales Vektorfeld längs α.

Bemerkung 4.4

Ist $N(t_0)$ ein Normalenvektor in $\alpha(t_0)$, so gilt

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t_0) - \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t_0), N(t_0) \right\rangle N(t_0).$$

Lemma 4.5

Seien X, Y tangentiale Vektorfelder längs α und $f : I \to \mathbb{R}$ glatt. Dann gelten:

(1) $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(X + Y) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}Y$;

(2) $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(f \cdot X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f \cdot X + f \cdot \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{\alpha(\cdot)}(X, Y) = g_{\alpha(\cdot)}(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X, Y) + g_{\alpha(\cdot)}(X, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}Y)$.

Beweis

(1) und (2) folgen sofort aus der Darstellung der kovarianten Ableitung in Bemerkung 4.4.

Zu (3): Da X, Y tangential, gilt für alle $t \in I$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{\alpha(t)}(X(t), Y(t)) &= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) \right\rangle \\ = \left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}Y(t) \right\rangle &= g_{\alpha(t)}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t), Y(t)\right) + g_{\alpha(t)}\left(X(t), \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}Y(t)\right). \end{aligned}$$ ■

Satz 4.6 (lokale Darstellung der kovarianten Ableitung)

Seien $\alpha : I \to M$ ein Weg (d.h. $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und α glatt), (U, φ) ein lokales Koordinatensystem von M mit $\alpha(I) \subseteq \varphi(U)$ und X ein tangentiales Vektorfeld längs α.

Setze $u : I \to U \subseteq \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \varphi^{-1}(\alpha(t))$ und wähle $X_1, ..., X_n : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha(t), X_k(t)\partial_k\varphi(u(t))) \qquad (t \in I),$$

d.h. $(X_1(t), ..., X_n(t))^T$ ist der Koordinatenvektor von $(\alpha(t), X(t))$ bzgl. der kanonischen Basis $\{(\alpha(t), \partial_k\varphi(u(t))) \mid k = 1, ..., n\}$ von $T_{\alpha(t)}M$.

Dann sind die $X_1, ..., X_n$ glatte Funktionen und die kovariante Ableitung von X besitzt die lokale Darstellung

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha(t), \left(\dot{X}_k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} X_i(t)\dot{u}_j(t)\Gamma_{ij}^{\varphi k}(u(t))\right)\partial_k\varphi(u(t))\right).$$

Beweis

Mit der Gauß-Formel gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha(t), \dot{X}_k(t)\partial_k\varphi(u(t)) + X_k(t)\sum_{j=1}^{n}\partial_j\partial_k\varphi(u(t))\dot{u}_j(t)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha(t), \dot{X}_k(t)\partial_k\varphi(u(t)) + X_k(t)\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jk}^{\varphi}(u(t))\cdot\underbrace{(\tilde{N}\circ\varphi)(u(t))}_{=\tilde{N}(\alpha(t))} + \sum_{i=1}^{n}\Gamma_{jk}^{i\varphi}(u(t))\partial_i\varphi(u(t))\right)\dot{u}_j(t)\right),\end{aligned}$$

Projektion auf den Tangentialraum $T_{\alpha(t)}M$ ergibt also

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha(t), \dot{X}_k(t)\partial_k\varphi(u(t)) + X_k(t)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{jk}^{i\varphi}(u(t))\partial_i\varphi(u(t))\right)\dot{u}_j(t)\right).$$

Nach allfälliger Umnummerierung der Indizes folgt die Behauptung. ■

Definition 4.7

Sei X ein tangentiales Vektorfeld auf M, $v \in TM$ und α ein Weg in M mit $\alpha'(0) = v$.

Die *kovariante Ableitung von X in Richtung v* ist $\mathrm{D}_v X := \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(X\circ\alpha)(0)$.

Bemerkung 4.8 (lokale Darstellung der kovarianten Richtungsableitung)

(1) Sei $N \in \{v\}^\perp$ ein Normalenvektor an M, dann ist $\mathrm{D}_v X = \nabla_v X - \langle\nabla_v X, N\rangle N$ nach Bem. 3.15 unabhängig von der Wahl von α, d.h. $\mathrm{D}_v X$ wohldefiniert.

(2) Sei (U, φ) ein lokales Koordinatensystem bei $p = \varphi(x_0)$. Seien $(X_1(x), ..., X_n(x))^T$ der Koordinatenvektor von $X(\varphi(x))$ bzgl. der kanonischen Basis $\{(\varphi(x), \partial_k\varphi(x)) \mid k = 1, ..., n\}$ von $\tilde{T}_{\varphi(x)}M$ und $(v_1, ..., v_n)^T$ derjenige von v, d.h.

$$X(\varphi(x)) = \left(\varphi(x), \sum_{k=1}^{n} X_k(x)\partial_k\varphi(x)\right), \qquad v = \left(p, \sum_{k=1}^{n} v_k\partial_k\varphi(x_0)\right).$$

Dann besitzt $\mathrm{D}_v X$ die lokale Darstellung

$$\mathrm{D}_v X = \left(\varphi(x_0), \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\partial_l X_k(x_0)\cdot v_l + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{\varphi k}(x_0)X_i(x_0)\cdot v_j\right)\partial_k\varphi(x_0)\right).$$

(3) Sei Y ein tangentiales Vektorfeld auf M, dann definiert $(\mathrm{D}_Y X)(p) := \mathrm{D}_{Y(p)}X$ $(p \in M)$ ein tangentiales Vektorfeld $\mathrm{D}_Y X$ auf M.

(4) Seien X, Y und X_1, X_2, Y_1, Y_2 tangentiale Vektorfelder auf M, $f : M \to \mathbb{R}$ glatt und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) $\mathrm{D}_Y(aX_1 + bX_2) = a\mathrm{D}_Y X_1 + b\mathrm{D}_Y X_2$.

(b) $\mathrm{D}_Y(f\cdot X) = \mathrm{d}_{Y(\cdot)}f\cdot X + f\cdot\mathrm{D}_Y X$.

(c) $\mathrm{d}g(X_1, X_2)(Y) = g(\mathrm{D}_Y X_1, X_2) + g(X_1, \mathrm{D}_Y X_2)$.

Genauer: $u(p) := g_p(X_1(p), X_2(p))$ definiert glattes $u : M \to \mathbb{R}$, analog für die Summanden auf der rechten Seite. $\mathrm{d}u(Y)$ bezeichnet die Funktion $p \mapsto \pi_2(\mathrm{d}_p u Y(p)) : M \to \mathbb{R}$, wobei $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Projektion auf die zweite Komponente.

(d) $\mathrm{D}_{aY_1+bY_2}X = a\mathrm{D}_{Y_1}X + b\mathrm{D}_{Y_2}X$.

(e) $\mathrm{D}_{f\cdot Y}X = f\cdot\mathrm{D}_Y X$.

4.2 Paralleltransport

Definition 4.9

Ein tangentiales Vektorfeld X längs α heißt *(Levi-Civita-)parallel*, falls $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X \equiv 0$.

Bemerkung 4.10

Seien X, Y zwei parallele Vektorfelder längs α. Dann gelten:

(1) $g_{\alpha(\cdot)}(X, Y)$ ist konstant auf I; insbesondere haben parallele Vektorfelder konstante Länge.

(2) Der Winkel $\arccos\left(\frac{g_{\alpha(\cdot)}(X,Y)}{\sqrt{g_{\alpha(\cdot)}(X,X)\cdot g_{\alpha(\cdot)}(Y,Y)}}\right)$ ist konstant auf I.

(3) $X + Y$ und $c \cdot X$ $(c \in \mathbb{R})$ sind parallel längs α.

Satz 4.11

Seien $\alpha : I \to M$ ein Weg, $t_0 \in I$ und $v \in T_{\alpha(t)}M$.

Dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld längs α mit $X(t_0) = v$.

Beweis

Sei (U, φ) ein lokales Koordinatensystem bei $\alpha(t_0)$. Dann besitzt v eine Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k \partial_k \varphi(\alpha(t_0))$$

für gewisse $v_k \in \mathbb{R}$. Sei $J \subseteq I$ Intervall mit $t_0 \in J$ und $\alpha(J) \subseteq \varphi(U)$, dann setze $u(t) := \varphi^{-1}(\alpha(t))$ $(t \in J)$.

Das System gewöhnlicher Differenzialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{X}_k(t) &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\Gamma_{ij}^{\varphi k}(u(t))\right)X_i(t) =: -\sum_{i=1}^{n} a_{ki}(t)X_i(t), \qquad k = 1, ..., n \\ X_k(t_0) &= v_k \end{cases}$$

bzw. mit $X(t) := (X_1(t), ..., X_n(t))$, $A(t) := (a_{ik}(t))_{i=1,\dots,n}^{k=1,\dots,n}$ und $v := (v_1, ..., v_n)$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= -A(t)X(t) \\ X(t_0) &= v \end{cases}$$

besitzt nach Picard-Lindelöf genau eine Lösung X auf J. Nach Satz 4.6 definiert

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha(t), X_k(t)\partial_k\varphi(u(t))) \qquad (t \in J)$$

das eindeutig bestimmte, parallele Vektorfeld X längs $\alpha|_J$ mit $X(t_0) = v$.

Seien nun $b := \sup(I)$ und $b_0 := \sup\{\tilde{b} \mid \exists \text{ paralleles Vektorfeld längs } \alpha|_{[t_0,\tilde{b})} \text{ mit } X(t_0) = v\}$. Angenommen, es wäre $b_0 < b$, dann wähle $(t_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (t_0, b_0)$ mit $t_j \to b_0$. Nach Bem. 4.10 hat X konstante Länge, d.h. $(\tilde{X}(t_j))_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}^n$, etwa gegen $\tilde{w}$.

Aus Stetigkeitsgründen ist dann $w := (\alpha(b_0), \tilde{w}) \in T_{\alpha(b_0)}M$ und wir finden ein Intervall $J \subseteq I$ um t_0 sowie ein (eindeutiges) paralleles Vektorfeld Y längs $\alpha|_J$ mit $Y(b_0) = w$. Folglich ist $X \equiv Y$ auf $J \cap [t_0, b_0)$, d.h. X lässt sich auf $[t_0, b_0) \cup J$ fortsetzen zu einem Vektorfeld längs α, was im Widerspruch zur Maximalität von b_0 steht. ■

Definition 4.12

Seien $\alpha : [a, b] \to M$ ein Weg, $p := \alpha(a)$, $q := \alpha(b)$. Dann heißt $P_\alpha : T_pM \to T_qM$, $v \mapsto X_v(b)$, wobei X_v das (eindeutig bestimmte) parallele Vektorfeld längs α mit $X_v(a) = v$ bezeichnet, *Paralleltransport längs α*.

Folgerung 4.13

Der Paralleltransport längs α ist ein isometrischer Vektorraum-Isomorphismus (insbes. $g_p(v, w) = g_q(P_\alpha v, P_\alpha w)$).

4.3 Geodätische

Definition 4.14

Ein glatter Weg $\alpha : I \to M$ heißt *Geodätische*, falls $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Bemerkung 4.15

(1) Genau dann ist ein Weg $\alpha : I \to M$ eine Geodätische, wenn $\alpha''(t) := (\alpha(t), \ddot{\alpha}(t)) \in T_{\alpha(t)}M^{\perp}$ für alle $t \in I$.

(2) Geodätische sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert, d.h. $g_{\alpha(\cdot)}(\alpha', \alpha') = \text{const.}$.

(3) Physikalisch: Die „Beschleunigung" $\ddot{\alpha}$ dient nur dazu, dass die Kurve in der Mannigfaltigkeit bleibt.

Beispiel 4.16

Seien $Z := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder in $\mathbb{R}^3$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $\alpha : \mathbb{R} \to Z$ mit

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} \cos(at+b) \\ \sin(at+b) \\ ct+d \end{pmatrix}$$

eine Geodätische, denn ist N eine der beiden Orientierungen von Z, dann ist

$$\ddot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} -a^2\cos(at+b) \\ -a^2\sin(at+b) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm a^2 \tilde{N}(\alpha(t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Satz 4.17

Seien $p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine Geodätische $\alpha : I \to M$ mit $\alpha'(0) = v$ und I maximal, d.h. für jede Geodätische $\beta : J \to M$ mit $\beta'(0) = v$ gilt $J \subseteq I$ und $\alpha \equiv \beta$ auf J.

$\alpha_v := \alpha$ heißt die *maximale Geodätische* durch p mit Anfangsgeschwindigkeit v.

Beweis

Sei (U, φ) ein lokales Koordinatensystem von M mit $\alpha(I) \subseteq \varphi(U)$. Dann ist $u := \varphi^{-1} \circ \alpha$ glatt mit $\alpha'(t) = (\alpha(t), \dot{u}_k(t)\partial_k\varphi(u(t)))$. Nach Satz 4.6 ist $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha' \equiv 0$ nahe t_0 genau dann, wenn u das System gewöhnlicher Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{u}_k(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} \dot{u}_i(t)\dot{u}_j(t)\Gamma_{ij}^{k\varphi}(u(t)) = -\langle \Gamma^{k\varphi}(u(t))\dot{u}(t), \dot{u}(t)\rangle, \qquad k = 1, ..., n$$

mit $\Gamma^{k\varphi} := (\Gamma_{ij}^{k\varphi})_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}$ löst. Unter Vorgabe von $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ hat dieses System genau eine Lösung nahe t_0 auf einem maximalen Existenzintervall I. ■

Bemerkung 4.18

Sei M kompakt, dann ist jede maximale Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Satz 4.19

Seien M eine durch N orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ und $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine Bogenlängenparametrisierung einer Frenet-Raumkurve mit $\mathrm{Spur}(\gamma) \subseteq M$.

Dann definiert $V_\gamma(t) := -\gamma'(t) \times (N \circ \gamma)(t)$ ein längs γ tangentiales Vektorfeld und es gibt genau eine Funktion $\varkappa_\gamma^g : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall t \in I : \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\gamma'(t) = \varkappa_\gamma^g(t) \cdot V_\gamma(t).$$

$\varkappa_\gamma^g$ heißt die *geodätische Krümmung* von γ bzgl. M.

γ ist genau dann eine Geodätische in M, wenn $\varkappa_\gamma^g \equiv 0$.

Ist $\psi_\gamma(t) := \arccos(\langle \vec{\eta}_\gamma(t), (\tilde{N} \circ \gamma)(t) \rangle)$ $(t \in I)$ der Winkel zwischen $\vec{\eta}_\gamma(t)$ und $\tilde{N}(\gamma(t))$, so gelten

$$\varkappa_\gamma^g(t) = \pm \kappa_\gamma(t) \sin(\psi_\gamma(t)), \qquad \varkappa(\gamma'(t)) = \kappa_\gamma(t) \cos(\psi_\gamma(t)),$$

wobei $\varkappa(\gamma'(t))$ die Normalkrümmung von M in Richtung $\gamma'(t)$ ist und κ_γ die Krümmung von γ als Raumkurve.

Beweis

Sei $t \in I$, dann ist

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 2 g_{\gamma(t)} \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} \gamma'(t), \gamma'(t) \right),$$

d.h. $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ steht senkrecht auf $\gamma'(t)$. Also ist $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\gamma'(t) = \varkappa_\gamma^g(t) V_\gamma(t)$, wenn wir setzen

$$\varkappa_\gamma^g(t) := g_{\gamma(t)}(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\gamma'(t), V_\gamma(t)) = \langle \ddot{\gamma}(t), \tilde{V}_\gamma(t) \rangle.$$

Wegen $\vec{\eta}_\gamma(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ ist mit $\sin(\arccos(\cdot)) = \pm\sqrt{1 - (\cdot)^2}$

$$\begin{aligned} \vec{\eta}_\gamma(t) &= \langle \vec{\eta}_\gamma(t), (\tilde{N} \circ \gamma)(t) \rangle (\tilde{N} \circ \gamma)(t) + \langle \vec{\eta}_\gamma(t), \tilde{V}_\gamma(t) \rangle \tilde{V}_\gamma(t) + \underbrace{\langle \vec{\eta}_\gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}_{=0} \dot{\gamma}(t) \\ &= \cos(\psi_\gamma(t)) \cdot (\tilde{N} \circ \gamma)(t) \pm \sin(\psi_\gamma(t)) \cdot \tilde{V}_\gamma(t). \end{aligned}$$

Nach den Frenet-Gleichungen ist zugleich $\ddot{\gamma}(t) = \kappa_\gamma(t) \sin(\psi_\gamma(t))$, d.h.

$$\varkappa_\gamma^g(t) = \langle \kappa_\gamma(t) \vec{\eta}_\gamma(t), \tilde{V}_\gamma(t) \rangle = \pm \kappa_\gamma(t) \sin(\psi_\gamma(t)).$$

Schließlich ist nach Bem. 3.25

$$\varkappa(\gamma'(t)) = \langle \ddot{\gamma}(t), \tilde{N}(\gamma(t)) \rangle = \kappa_\gamma(t) \cdot \cos(\psi_\gamma(t)).$$

■

Definition 4.20

Sei $\alpha : [a, b] \to M$ ein Weg. Die *Länge* L und die *Energie* E von α sind definiert als

$$L(\alpha) := \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}\ \mathrm{d}t, \qquad E(\alpha) := \frac{1}{2} \int_a^b g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))\ \mathrm{d}t.$$

Bemerkung 4.21

Wir nennen α „proportional zur Bogenlänge parametrisiert“, falls $g_{\alpha(\cdot)}(\alpha', \alpha') \equiv \text{const.}$.

Lemma 4.22

Für einen Weg $\alpha : [a, b] \to M$ ist

$$L(\alpha)^2 \leq 2(b - a) E(\alpha)$$

und „=“ gilt genau dann, wenn α proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis

Definiere $f(t) := g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))$ $(t \in [a, b])$, dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$L(\alpha)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \cdot 1 \right)^2 \leq \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \cdot \int_a^b 1\ \mathrm{d}t = 2(b - a) E(\alpha),$$

wobei „=“ genau dann der Fall ist, wenn f und 1 linear abhängig sind. ■

Lemma 4.23

Seien I, J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $c : I \times J \to M$ glatt. Dann gilt

$$\forall (s,t) \in I \times J : \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(s,t) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} c(s,t),$$

wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c$ das Geschwindigkeitsvektorfeld von $t \mapsto c(s,t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} c$ dasjenige von $s \mapsto c(s,t)$ bezeichnet.

Beweis

Da dies ein lokales Problem ist, sei Œ $c(I \times J) \subseteq \varphi(U)$ für ein lokales Koordinatensystem (U, φ) von M. Setze $u := \varphi^{-1} \circ c : I \times J \to U$, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(s,t) = \left(c(s,t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ u)(s,t)\right) = \left(c(s,t), \sum_{k=1}^{n} \partial_t u_k(s,t) \partial_k \varphi(u(s,t))\right).$$

Nach Satz 4.6 gilt dann

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(s,t) = \left(c(s,t), \sum_{k=1}^{n}\left(\partial_s \partial_t u_k(s,t) + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_t u_i(s,t) \partial_s u_j(s,t) \Gamma_{ij}^{k\varphi}(u(s,t)) \partial_k \varphi(u(s,t))\right)\right).$$

Wegen $\Gamma_{ij}^{k\varphi} = \Gamma_{ji}^{k\varphi}$ $(i,j = 1, ..., n)$ nach Definition der Christoffelsymbole ist dieser Ausdruck symmetrisch in s, t, woraus die Behauptung folgt. ■

Bemerkung 4.24

Seien $p, q \in M$ und $c : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ glatt mit $c(s,a) = p$ und $c(s,b) = q$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Dann ist das *Variationsvektorfeld* $V : [a,b] \to \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} c(0,t)$ von c ein tangentiales Vektorfeld längs $t \mapsto c(0,t)$.

Ist $\alpha : [a,b] \to M$ ein Weg, dann heißt c eine *Variation mit festen Randpunkten* von α, falls $c(0, \cdot) = \alpha$.

Satz 4.25 (Variation der Energie)

Seien $p, q \in M$ und $c : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ glatt mit $c(s,a) = p$ und $c(s,b) = q$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} E(c(s,\cdot))\Big|_{s=0} = -\int_a^b g_{c(0,t)}\left(V(t), \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t.$$

Beweis

Wegen $V(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} c(s,a)|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} p = (p, 0)$ und analog $V(b) = (q, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= g_q\left(V(b), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,b)\right) - g_p\left(V(a), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,a)\right) \\
&\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{c(0,t)}\left(V(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t + \int_a^b g_{c(0,t)}\left(V(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} V(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t + \int_a^b g_{c(0,t)}\left(V(t), \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

gilt hier „partielle Integration ohne Rand“:

$$\int_a^b g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} V(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t = -\int_a^b g_{c(0,t)}\left(V(t), \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(0,t)\right) \mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(c(s,\cdot))\Big|_{s=0} &\overset{(4.20)}{=} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s,t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s,t)\right)\,\mathrm{d}t\Big|_{s=0}\\
&\overset{\text{param. Int.}}{=} \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s,t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s,t)\right)\,\mathrm{d}t\Big|_{s=0}\\
&\overset{(4.5)}{=} \int_a^b g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s,t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s,t)\right)\,\mathrm{d}t\Big|_{s=0}\\
&\overset{(4.23)}{=} \int_a^b g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(s,t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s,t)\right)\,\mathrm{d}t\Big|_{s=0}\\
&\overset{(4.24)}{=} \int_a^b g_{c(0,t)}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(0,t)\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

■

Satz 4.26

Ist $\alpha : [a,b] \to M$ ein Weg, der minimale Energie bzgl. aller Variationen mit festen Randpunkten hat, so ist α eine Geodätische.

Beweis

Angenommen, es gäbe ein $t_0 \in (a,b)$ mit $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t_0) \neq 0$. Wir wählen ein lokales Koordinatensystem (U,φ) von M und ein offenes Intervall $J \subseteq [a,b]$ mit $t_0 \in J$ und $\alpha(J) \subseteq \varphi(U)$. Definiere $u : J \to U$ durch $t \mapsto \varphi^{-1}(\alpha(t))$ und ein Vektorfeld X längs u durch $X(t) := (\mathrm{d}_{u(t)}\varphi)^{-1}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t) \in T_{u(t)}\mathbb{R}^n$ $(t \in J)$, d.h. $\mathrm{d}_{u(t)}\varphi X(t) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t)$ $(t \in J)$.

Wähle ein $0 \leq \psi \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq J$ und $\psi(t_0) > 0$ und definiere für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ eine Funktion $c : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ durch

$$
c(s,t) := \begin{cases} \varphi(u(t) + s\psi(t)\tilde{X}(t)) & t \in J \\ \alpha(t) & t \notin J \end{cases}.
$$

Dann ist c eine Variation mit festen Randpunkten von α.

Für das Variationsvektorfeld $V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(0,t)$ gilt offenbar $v \equiv 0$ auf $[a,b]\backslash J$ sowie

$$
\forall t \in J : V(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(u(t) + s\psi(t)\tilde{X}(t))\Big|_{s=0} = \mathrm{d}_{u(t)}\varphi(\psi(t)X(t)) = \psi(t)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t),
$$

d.h.

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(c(s,\cdot))\Big|_{s=0} = -\int_J g_{\alpha(t)}\left(V(t),\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t)\right)\,\mathrm{d}t = -\int_J \psi(t)g_{\alpha(t)}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t),\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha'(t)\right)\,\mathrm{d}t < 0,
$$

wegen der Minimalität der Energie müsste aber $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(c(s,\dot{}))|_{s=0} = 0$ gelten, ein Widerspruch.

Damit ist $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\alpha \equiv 0$ auf (a,b) und wegen der Stetigkeit damit auch auf $[a,b]$. ■

Korollar 4.27

Ist $\alpha : [a,b] \to M$ ein proportional zur Bogenlänge parametrisierter Weg, der minimale Länge bzgl. aller Variationen mit festen Randpunkten hat, dann ist α eine Geodätische.

Beweis

Nach Lemma 4.22 hat α genau dann minimale Länge bzgl. aller Variationen mit festen Randpunkten, wenn α minimale Energie bzgl. aller dieser Variationen hat. ■

Bemerkung 4.28

Geodätische sind i.A. nicht Energie- oder Länge-minimierend. Zwei auf einem Großkreis liegende Punkte von $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ können beispielsweise in der Regel mit zwei Geodätischen verschiedener Länge verbunden werden.

4.4 Die Exponenzialabbildung

Definition 4.29

Für $v \in M$ bezeichne $\alpha_v : I(v) \subseteq \mathbb{R} \to M$ die maximale Geodätische mit $\alpha'(0) = v$. Dann heißt exp : $\mathcal{D} \subseteq TM \to M$, $\exp(v) := \alpha_v(1)$ mit $\mathcal{D} := \{v \in TM \mid [0,1] \subseteq I(v)\}$ die *Exponenzialabbildung* von M.

Für $p \in M$ setzen wir $\mathcal{D}_p := \mathcal{D} \cap T_pM$ und definieren $\exp_p : \mathcal{D}_p := \mathcal{D} \cap T_pM \to M$, $\exp_p(v) := \exp(v)$.

Beispiel 4.30

Sei $M = \mathbb{S}^2$. Für $v \in T_pM$ ist dann der Großkreis

$$\alpha_v : \mathbb{R} \to M,\ t \mapsto \cos(||v||t)p + \sin(||v||t)\frac{\tilde{v}}{||\tilde{v}||}$$

die maximale Geodätische. Also sind $\mathcal{D} = TM$ und $\exp : T_pM \to M$ ist gegeben durch

$$\exp : v \mapsto \cos(||v||)p + \sin(||v||)\frac{\tilde{v}}{||\tilde{v}||}.$$ ♦

Bemerkung 4.31

Nach Bem. 4.18 ist $\mathcal{D} = TM$, falls M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist. ♦

Definition 4.32

Sei X ein tangentiales Vektorfeld auf M. Die *maximale Integralkurve* von X durch $p \in M$ ist diejenige Kurve $\gamma_p : I(p) \subseteq \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma_p'(t) = X(\gamma_p(t))$ $(t \in I(p))$ und $\gamma_p(0) = p$, wobei $I(p)$ maximal gewählt.

Lemma 4.33

Seien X ein glattes, tangentiales Vektorfeld auf M und $K \subseteq M$ kompakt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung V von K mit $\forall p \in V : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq I(p)$ und $\psi : V \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $\psi(p,t) := \gamma_p(t)$ ist glatt.

Beweis

Da K kompakt, genügt es, für fest gewähltes $p_0 \in K$ ein passendes ϵ und V zu finden. Wähle also ein lokales Koordinatensystem (U, φ) bei p_0, dann definiert $Y(x) := (\mathrm{d}_x\varphi)^{-1}X(\varphi(x))$ $(x \in U)$ ein glattes Vektorfeld auf U und es ist $\alpha : I \to \varphi(U)$ eine Integralkurve von $X \Leftrightarrow \beta := \varphi^{-1} \circ \alpha : I \to U$ ist eine Integralkurve auf Y.

Nach der „Differenzierbarkeit bzgl. den Daten“ aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen existieren daher zu $x_0 := \varphi^{-1}(p_0)$ ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von x_0 und dazu ein $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times W \to U$ mit den geforderten Eigenschaften. Dann hat $\tilde{\psi} := \varphi \circ \psi$ die verlangten Eigenschaften. ■

Satz 4.34

Der Definitionsbereich $\mathcal{D}$ von exp ist offen in TM und $\exp : \mathcal{D} \to M$ ist glatt.

Beweis

Wir fassen TM als $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ auf und definieren auf TM den *Geodäischen Spray* $X : TM \to TM \times \mathbb{R}^{2(n+1)}$ durch

$$X : v = (p, \tilde{v}) \mapsto (v, \tilde{v}, -g(v, \nabla_v N)\tilde{N}(p)),$$

wobei N ein bei p glattes Einheitsnormalenfeld auf M sei. Dann ist X wohldefiniert und ein glattes, tangentiales Vektorfeld an TM. Für dieses gelten:

(1) Ist $\alpha = \alpha_v : I \to M$ eine (maximale) Geodätische, dann definiert $\gamma_v := \alpha_v' : I \to TM$ die (maximale) Integralkurve von X in v und

(2) Ist $\gamma = \gamma_v : I \to TM$ eine (maximale) Integralkurve an X in v, dann definiert $\alpha_v' := \gamma_v$ die (maximale) Geodätische $\alpha_v : I \to M$.

Die Geodätischen auf M entsprechen also umkehrbar eindeutig den Integralkurven an X via $\alpha_v' = \gamma_v$.

Nach Lemma 4.33 existieren zu $v \in \mathcal{D}$ eine offene Umgebung $V \subseteq TM$ des Kompaktums $\alpha_v'([0,1])$ und ein $\epsilon > 0$, so dass zu jedem $w \in V$ die maximale Integralkurve von X auf $(-\epsilon, \epsilon)$ existiert und $\psi_t : V \to TM,\ w \mapsto \gamma_w(t)$ für festes $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ glatt ist. Weiter gilt wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven, dass $\psi_{s+t}(w) = (\psi_s \circ \psi_t)(w)$ für $s, t \in (-\epsilon, \epsilon)$ und $w, \psi_t(w) \in V$. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \epsilon$, dann ist

$$W := \bigcap_{j=1}^{N-1} (\underbrace{\psi_{\frac{1}{k}} \circ \ldots \circ \psi_{\frac{1}{k}}}_{j\text{-mal}})^{-1}(V) \subseteq TM$$

definiert, offen und für alle $w \in W$ ist γ_w und damit auch α_w auf $[0,1]$ definiert. Außerdem ist mit $\psi : [0,1] \times W \to TM,\ (t, w) \mapsto \gamma_w(t)$ auch $\alpha_w : [0,1] \to M$ glatt. Damit besitzt jedes $v \in \mathcal{D}$ eine offene Umgebung $W \subseteq \mathcal{D}$ und $\exp : \mathcal{D} \to M$ ist glatt. ■

Bemerkung 4.35

Für jedes $v = (p, \tilde{v}) \in T_pM$ definiert $t \mapsto \exp(tv)$ die maximale Geodätische $\alpha_v : I(v) \to M$. Wegen $\alpha_{tv}(s) = \alpha_v(ts)$ ist nämlich für $s = 1$ insbesondere $\exp(tv) = \alpha_{tv}(1) = \alpha_v(t)$. Speziell ist mit $v \in \mathcal{D}$ auch $tv \in \mathcal{D}$ für $t \in [0,1]$. ♦

Satz 4.36

Zu jedem $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U_p \subseteq T_pM$ von 0, so dass $\exp_p : U_p \to \exp(U_p) \subseteq M$ ein Diffeomorphismus ist mit $\exp_p(0) = p$.

Beweis

Wir zeigen, dass das Differenzial $\mathrm{d}_0 \exp_p : T_0(T_pM) \to T_pM$ invertierbar ist, dann folgt die Behauptung aus dem Satz von der inversen Funktion.

Sei $(0, v) \in T_0(T_pM)$. Setze $\beta : I \to T_pM,\ \beta(t) := tv$, dann ist $(0, v) = \beta'(0)$, d.h.

$$\mathrm{d}_0 \exp_p(0, v) = (\exp \circ \beta)'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tv)\Big|_{t=0} = \dot{\alpha}_v(0) = v. \qquad ■$$

Definition 4.37

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis des T_pM. Der Isomotphismus $A : \mathbb{R}^n \to T_pM$ sei gegeben durch $x \mapsto Ax := \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Die *Riemannschen Normalkoordinaten* (U, φ) bei p sind definiert als

$$U := A^{-1}(U_p) \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x) := \exp_p(Ax) \in M.$$

Bezeichne $\Psi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)^{n-2} \to \mathbb{R}^n \backslash \{t \leq 0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2},\ (r, \theta) \mapsto \Psi(r, \theta)$ die n-dimensionalen Polarkoordinaten, dann definiert

$$U := (A \circ \Psi)^{-1}(U_p), \qquad \varphi(r, \theta) := \exp_p((A \circ \Psi)(r, \theta))$$

ebenfalls eine lokale Parametrisierung (U, φ) von M bei p, die *Riemannschen Polarkoordinaten*.

Bemerkung 4.38

(1) Für die Riemannschen Normalkoordinaten (U, φ) gelten $g_{ij}^{\varphi}(0) = \delta_{ij}$ und $\partial_k g_{ij}^{\varphi}(0) = 0$.

(2) Für die Riemannschen Polarkoordinaten (U, φ) gelten $g_{rr}^{\varphi}(r, \theta) = 1$ und $g_{r\theta_i}^{\varphi}(r, \theta) = 0$. ♦

4.5 Die Abstandsfunktion

Wiederholung 4.39

(1) $\gamma : [a,b] \to M$ heißt ein *stückweise glatter Weg*, falls γ stetig ist und eine Zerlegung des Intervalls $Z = (t_0, t_1, ..., t_N) \subseteq [a,b]$ existiert mit $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$, so dass $\gamma|_{(t_{i-1},t_i)}$ glatt ist für jedes $i = 1, ..., N$.

(2) Die *Länge* von γ ist definiert als $L(\gamma) := \sum_{i=1}^N L(\gamma|_{(t_{i-1},t_i)})$.

(3) Ist M zusammenhängend, dann lassen sich zwei Punkte $p, q \in M$ durch einen stückweise glatten Weg verbinden, denn jeder Punkt von M besitzt eine wegzusammenhängende Umgebung in M.

(4) Die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ mit $d(p,q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist stückweise glatter Weg von } p \text{ nach } q\}$ definiert eine Metrik auf M. Diese ist äquivalent zur Einschränkung $d_{\text{eukl.}}|_{M\times M}$ der euklidischen Metrik auf M, d.h. die erzeugten Topologien stimmen überein.

(5) Nach Satz 4.36 existiert zu jedem $p \in M$ ein $\epsilon > 0$, so dass auf $B_\epsilon(p) := \{q \in M \mid d(p,q) < \epsilon\}$ Riemannsche Polarkoordinaten eingeführt werden können.

(6) Ist M kompakt, so ist dies mit einem vom betrachteten Punkt $p \in M$ unabhängigen ϵ möglich: Überdecke M mit lokalen Systemen (U_p, φ_p) Riemannscher Polarkoordinaten, wähle eine endliche Teilüberdeckung aus $\{\varphi_p(U_p) \mid p \in M\}$ von M und wähle unter den endlich vielen zugehörigen ϵ_p das kleinste. ♦

Satz 4.40

Seien $p \in M$ und (U, φ) ein System lokaler Riemannscher Polarkoordinaten auf $B_\epsilon(p)$. Dann existiert zu jedem $q \in B_\epsilon(p)$, $d(p,q) = \rho$, (bis auf Umparametrisierung) genau eine Geodätische $\alpha : [a,b] \to M$ in $\overline{B_\rho(p)}$ mit $\alpha(a) = p$ und $\alpha(b) = q$.

Diese ist die kürzeste Verbindung von p und q, d.h. $L(\alpha) = \rho$.

Lokal sind Geodätische also die kürzesten Verbindungskurven auf M zweier Punkte $p, q \in M$.

Beweis

Sei $\gamma : [0,T] \to M$ ein stückweise glatter Weg mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(T) = q$. Dann besitzt γ in Riemannschen Polarkoordinaten eine Darstellung $\gamma(t) = \varphi(r(t), \theta(t))$ mit glattem r und stückweise glattem $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{n-1})$ ($\to$ Bild(Ψ)).

Dann gilt auf den Teilintervallen $I_k := [t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, ..., N)$:

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{I_k}) &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}^\varphi((r,\theta^k)(t))\dot{u}_i(t)\dot{u}_j(t)} \,\mathrm{dt} \geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{g_{rr}^\varphi((r,\theta^k)(t))\dot{r}(t)\dot{r}(t)} \,\mathrm{dt} \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot{r}(t)| \,\mathrm{dt} \geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{r}(t) \,\mathrm{dt} = r(t_k) - r(t_{k-1}), \end{aligned}$$

d.h. $L(\gamma) \geq \rho$, wobei genau dann Gleichheit gilt, wenn

$$\begin{cases} \dot{r} \geq 0 & \text{auf } [0,T] \\ \sum_{ij} g_{\theta_i^k \theta_j^k} \dot{\theta}_i^k \dot{\theta}_j^k \equiv 0 & \text{auf } [t_{k-1}, t_k], \text{ d.h. } \theta^k \text{ konstant auf } [t_{k-1}, t_k] \end{cases}.$$

Also ist γ eine Umparametrisierung von $t \mapsto \varphi(t, \theta_q) : [0, \rho] \to \overline{B(p,q)}$.

Die Geodätischen in Riemannschen Polarkoordinaten haben aber gerade die Gestalt $t \mapsto \varphi(t, \theta)$. ■

4.6 Riemannscher Krümmungstensor und Riccitensor

Notation 4.41

Im Folgenden seien V, W, X, Y glatte tangentiale Vektorfelder auf M und (U, φ) ein lokales Koordinatensystem. Wir definieren die Koordinatenfunktionen von $v_i = v_i^\varphi : U \to \mathbb{R}$ (w_i, x_i, y_i, z_i) von V (W, X, Y, Z) durch

$$V(\varphi(x)) = \Big(\varphi(x), \sum_{i=1}^n v_i(x)\partial_i\varphi(x)\Big). \qquad \blacklozenge$$

Definition 4.42

Die *zweite kovariante Ableitung* von Z nach V, W ist gegeben durch

$$\mathrm{D}^2_{VW}Z := \mathrm{D}_V(\mathrm{D}_W Z) - \mathrm{D}_{\mathrm{D}_V W}Z : M \to TM.$$

Bemerkung 4.43 (lokale Darstellung der zweiten kovarianten Ableitung)

(1) Es gilt $\mathrm{D}^2_{VW}Z(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$.

(2) In lokalen Koordinaten (U, φ) gilt

$$(\mathrm{D}^2_{VW}Z)(\varphi(x)) = \Big(\varphi(x), \sum_{m=1}^n u_m(x)\partial_m\varphi(x)\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_{ij=1}^n (\partial^2_{ij}z_m)v_iw_j + \sum_{ijk=1}^n \Gamma^{\varphi m}_{ij}(\partial_k z_i)(v_iw_k + v_kw_j) - \sum_{ijk=1}^n \Gamma^{\varphi k}_{ij}(\partial_k z_m)v_iw_j \\ &\quad + \sum_{ijk=1}^n \Big((\partial_i\Gamma^{\varphi m}_{ij}) + \sum_{l=1}^n(\Gamma^{\varphi m}_{li}\Gamma^{\varphi l}_{kj} - \Gamma^{\varphi m}_{kl}\Gamma^{\varphi l}_{ij})v_iw_jz_k\Big). \end{aligned}$$

(3) In lokalen Koordinaten hängt $(\mathrm{D}^2_{VW}Z)(\varphi(x))$ also nur von $V(p), W(p)$ und partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von Z in p ab. Wir definieren daher mit $v = V(p),\ w = W(p)$:

$$\mathrm{D}^2_p Z : T_pM \times T_pM \to T_pM, \qquad (\mathrm{D}^2_p Z)(v, w) := (\mathrm{D}^2_{VW}Z)(p). \qquad \blacklozenge$$

Definition 4.44

Der *Riemannsche Krümmungstensor* R ist definiert durch

$$R(V, W)Z := \mathrm{D}^2_{VW}Z - \mathrm{D}^2_{WV}Z : M \to TM.$$

Bemerkung 4.45 (lokale Darstellung des Riemannschen Krümmungstensors)

(1) Es gilt $(R(V, W)Z)(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$.

(2) In lokalen Koordimaten (U, φ) gilt

$$(R(V, W)Z)(\varphi(x)) = \Big(\varphi(x), \sum_{l=1}^n \Big(\sum_{ijk=1}^n R^{\varphi l}_{ijk}(x)v_i(x)w_j(x)z_k(x)\Big)\partial_l\varphi(x)\Big)$$

mit

$$R^{\varphi l}_{ijk} = (\partial_i\Gamma^{\varphi l}_{kj}) - (\partial_j\Gamma^{\varphi l}_{ki}) + \sum_{m=1}^n(\Gamma^{\varphi l}_{mi}\Gamma^{\varphi m}_{kj} - \Gamma^{\varphi l}_{mj} - \Gamma^{\varphi m}_{ki}).$$

(3) Für $p \in M$ hängt $(R(V, W)Z)(p)$ nur von $v = V(p),\ w = W(p)$ und $z = Z(p)$ ab. Wir definieren daher

$$R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM, \qquad R_p(v, w)z := (R(V, W)Z)(p).$$

(4) Der Riemannsche Krümmungstensor hat die Darstellung

$$R(V,W)Z = \mathrm{D}_V(\mathrm{D}_W Z) - \mathrm{D}_W(\mathrm{D}_V Z) - \mathrm{D}_{[V,W]}Z$$

mit der *Lie-Klammer* $[X,Y] := \nabla_X Y - \nabla_Y X : M \to TM$. Diese definiert ein glattes, tangentiales Vektorfeld an M.

(5) Für die *Koordinatenvektorfelder* $E_i := E_i^\varphi : M \to T_pM$, $\varphi(x) \mapsto (\varphi(x), (\partial_i\varphi)(x))$ $(x \in U)$ bzw. $p \mapsto (p, (\partial_i\varphi)(\varphi^{-1}(p)))$ $(p \in \varphi(U))$ gilt $[E_i, E_j] \equiv 0$, d.h. $R(E_i, E_j)$ ist ein Maß dafür, inwieweit D_{E_i} und D_{E_j} miteinander vertauschen. ♦

Satz 4.46 (Gauß-Gleichung)

Seien $p \in M$, N eine Orientierung von M bei p und $v, w, z \in T_pM$. Dann gilt

$$R_p(v,w)z = g_p(\mathscr{L}_p w, z)\mathscr{L}_p v - g_p(\mathscr{L}_p v, z)\mathscr{L}_p w.$$

Beweis

Œ gelten $V = E_i$ und $W = E_j$. Man rechnet nach, dass

$$(\mathrm{D}_{E_i}(\mathrm{D}_{E_j}Z) - \mathrm{D}_{E_j}(\mathrm{D}_{E_i}Z)) - (\langle \mathscr{L}_p E_j, Z\rangle \mathscr{L}_p E_i - \langle \mathscr{L}_p E_i, Z\rangle \mathscr{L}_p E_j) = f \cdot N$$

für eine glatte Funktion $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$. Damit ist

$$(\mathrm{D}_{E_i}(\mathrm{D}_{E_j}Z) - \mathrm{D}_{E_j}(\mathrm{D}_{E_i}Z)) - (\langle \mathscr{L}_p E_j, Z\rangle \mathscr{L}_p E_i - \langle \mathscr{L}_p E_i, Z\rangle \mathscr{L}_p E_j) \in T_pM \cap T_pM^\perp = \{0\},$$

d.h. $\mathrm{D}_{E_i}(\mathrm{D}_{E_j}Z) - \mathrm{D}_{E_j}(\mathrm{D}_{E_i}Z) = \langle \mathscr{L}_p E_j, Z\rangle \mathscr{L}_p E_i - \langle \mathscr{L}_p E_i, Z\rangle \mathscr{L}_p E_j$. ■

Korollar 4.47

(1) Sei $(\omega_{ij}^\varphi(x))_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}$ die Matrixdarstellung der Weingartenabbildung bzgl. einem lokalen Koordinatensystem (U,φ) bei $p = \varphi(x)$ bzgl. der natürlichen Basis von T_pM, dann gilt

$$R_{jkl}^{\varphi i}(x) = h_{jk}^\varphi(x)\omega_{li}^\varphi(x) - h_{ik}^\varphi(x)\omega_{lj}^\varphi(x).$$

(2) Für $v, w, x, y \in T_pM$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} R_p(v,w)x &= -R_p(w,v)x, \\ g_p(R_p(v,w)x, y) &= g_p(R_p(x,y)v, w), \\ g_p(R_p(v,w)x, y) &= -g_p(R_p(v,w)y, x) \end{aligned}$$

sowie die *Erste Bianchi-Identität*

$$R_p(v,w)x + R_p(w,x)v + R_p(x,v)w = 0.$$

(3) Mit $R_{ijkl}^\varphi(x) := g_{\varphi(x)}(R(E_i^\varphi, E_j^\varphi)E_k^\varphi, E_l^\varphi)$ erhalten wir in lokalen Koordinaten

$$R_{ijkl}^\varphi = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^{\varphi s} g_{sl}^\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad R_{ijk}^{\varphi j} = \sum_{l=1}^n R_{ijkl}^\varphi g_\varphi^{lj}.$$

Die Gleichungen in (2) übersetzen sich dann in

$$\begin{aligned} R_{ijkl}^\varphi &= -R_{jikl}^\varphi, \\ R_{ijkl}^\varphi &= R_{klij}^\varphi, \\ R_{ijkl}^\varphi &= -R_{ijlk}^\varphi \end{aligned}$$

sowie

$$R_{ijkl}^\varphi + R_{jkil}^\varphi + R_{kijl}^\varphi = 0.$$

Korollar 4.48 (Theorema egregium)

Seien $e_1, ..., e_n$ die Hauptkrümmungsrichtungen von M in p mit zugehörigen Hauptkrümmungen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, d.h. $\mathscr{L}_p(e_i) = \lambda_i e_i$ $(i = 1, ..., n)$. Dann gilt nach der Gauß-Gleichung für $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$g_p(R_p(e_i, e_j)e_j, e_i) = \lambda_i \lambda_j.$$

Speziell für $\dim(M) = 2$ erhalten wir das *Theorema egregium*

$$K(p) = g_p(R_p(e_i, e_j)e_j, e_i).$$

Bemerkung 4.49

(1) Seien $\dim(M) = 2,\ p \in M$ und $v, w, x \in T_pM$. Dann gilt

$$\boxed{R_p(v, w)x = K(p)(g_p(w, x)v - g_p(v, x)w)}.$$

Sei nämlich $S : (T_pM)^4 \to \mathbb{R}$ eine Multilinearform, die für $v, w, x, y \in T_pM$ die folgenden Symmetrien erfüllt:

$$-S(w, v, x, y) = S(v, w, x, y) = -S(w, v, y, x).$$

Sei (e_1, e_2) eine Basis von T_pM, dann ist S schon durch den Wert $S(e_1, e_2, e_1, e_2)$ eindeutig festgelegt, denn

$$S(v, w, x, y) = (v_1 w_2 - v_2 w_1)S(e_1, e_2, x, y) = (v_1 w_2 - v_2 w_1)(x_1 y_2 - x_2 y_1)S(e_1, e_2, e_1, e_2)$$

mit $v = v_1 e_1 + v_2 e_2,\ w = w_1 e_1 + w_2 e_2,\ x = x_1 e_1 + x_2 e_2,\ y = y_1 e_1 + y_2 e_2$. Nun sind

$$\begin{aligned} S_1(v, w, x, y) &:= g_p(R_p(v, w)x, y), \\ S_2(v, w, x, y) &:= K(p)(g_p(w, x)g_p(v, y) - g_p(v, x)g_p(w, y)) \end{aligned}$$

solche S und nach dem Theorema egregium gilt speziell mit der Basis (e_1, e_2) der Hauptkrümmungsrichtungen:

$$S_1(e_1, e_2, e_1, e_2) = -K(p) = S_2(e_1, e_2, e_1, e_2).$$

Damit ist $S_1 \equiv S_2$.

(2) In lokalen Koordinaten (U, φ) gilt

$$\boxed{R^{\varphi l}_{ijk}(x) = (K \circ \varphi)(x)(g^{\varphi}_{jk}(x)\delta_{li} - g^{\varphi}_{ik}(x)\delta_{lj})}$$ ♦

Definition 4.50

Für $v, w \in T_pM$ definiere $v * w := \sqrt{g_p(v, v)g_p(w, w) - g_p(v, w)^2}$.

Für einen zweidimensionalen Unterraum Σ von T_pM mit Basis (v, w) heißt

$$K_p(\Sigma) := \frac{g_p(R_p(v, w)w, v)}{(v * w)^2}$$

die *Schnittkrümmung* von Σ bei p.

Bemerkung 4.51

(1) $K_p(\Sigma)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der gewählten Basis (v, w). Sei nämlich (e_1, e_2) eine Orthonormalbasis von Σ, dann gilt mit der Multilinearität von R und den Symmetrien aus Kor. 4.47 (2):

$$g_p(R_p(v, w)w, v) = (v_1 w_2 - v_2 w_1)g_p(R_p(e_1, e_2)w, v) = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 g_p(R_p(e_1, e_2)e_1, e_2).$$

Mit $e_1 * e_2 = 1$ und $v * w = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2$ folgt

$$K_p(\Sigma) = \frac{g_p(R_p(v,w)w,v)}{(v_1 w_2 - v_2 w_1)^2} = g_p(R_p(e_1,e_2)e_2,e_1).$$

(2) Mit allen $g_p(R_p(v,w)x,y)$ kennt man auch alle $R_p(v,w)x$, also R_p. Die $g_p(R_p(v,w)x,y)$ wiederum sind durch Kenntnis aller Schnittkrümmungen $K(z_1,z_2) := K(\mathrm{span}(z_1,z_2))$ eindeutig bestimmt. ♦

Definition 4.52
Sei $p \in M$. Die Bilinearform $\mathrm{Ric}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\mathrm{Ric}_p(v,w) := \frac{\mathrm{spur}(y \mapsto R_p(v,y)w)}{n-1}$$

heißt der *Riccitensor* in p.

Bemerkung 4.53

(1) Ric_p ist symmetrisch, d.h. es gibt genau eine lineare, symmetrische Abbildung $Q : T_pM \to T_pM$ mit $g_p(Qv,w) = \mathrm{Ric}_p(v,w)$ $(v,w \in T_pM)$ (Riesz). Die *Skalarkrümmung* von M in p ist gegeben durch

$$\mathrm{Sc}(p) := \frac{\mathrm{spur}(Q)}{n}.$$

(2) Ist $(e_1,...,e_n)$ eine Orthonormalbasis von M, dann gilt

$$\mathrm{Sc}(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(e_i,e_i) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{ij=1}^{n} g_p(R_p(e_i,e_j)e_j,e_i).$$

(3) Speziell im Fall $\dim(M) = 2$ ist nach dem Theorema egregium $\mathrm{Sc}(p) = K(p)$:

$$\mathrm{Sc}(p) = \frac{1}{2}(g_p(R_p(e_1,e_2)e_2,e_1) + g_p(R_p(e_2,e_1)e_1,e_2)) = K(p).$$ ♦

Bemerkung 4.54 (lokale Darstellung von Riccitensor und Skalarkrümmung)
Sei (U,φ) ein lokales Koordinatensystem von M bei $p = \varphi(x)$. Setze $R^\varphi_{ik}(x) := \mathrm{Ric}_p(E^\varphi_i, E^\varphi_k)$, dann

$$R^\varphi_{ik}(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} R^{\varphi j}_{ijk}(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{jl=1}^{n} R^\varphi_{ijkl}(x) g^{lj}_\varphi(x), \qquad \mathrm{Sc}(\varphi(x)) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{ik=1}^{n} R^\varphi_{ik}(x) g^{ik}_\varphi(x).$$ ♦

4.7 Innere Geometrie von Hyperflächen

Vorbemerkung 4.55

Als „Größen der inneren Geometrie" einer Hyperfläche M bezeichnen wir diejenigen Größen, die man durch Kurvenlängenbestimmung und Ableiten beschreiben kann.

(1) Kennt man die erste Fundamentalform, so ist die Länge einer Kurve $\alpha : [0,T] \to M$ gegeben durch $L(\alpha) = \int_0^T ||\alpha'(\tau)||\,\mathrm{d}\tau$.

(2) Kennt man umgekehrt die Länge einer jeden Kurve auf M, dann ist wegen $||\alpha'(0)|| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(\alpha|_{[0,t]})|_{t=0}$ und $g_p(v,w) = \frac{1}{2}(||v+w||^2 - ||v||^2 - |w||^2)$ $(v,w \in T_pM)$ auch die erste Fundamentalform bekannt.

Größen der inneren Geometrie sind also genau diejenigen, die nur von der ersten Fundamentalform abhängen. ♦

Definition 4.56

Seien M, N Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\Phi : M \to N$ ein Diffeomorphismus.

Φ heißt eine *Isometrie*, falls für alle $p \in M$ und alle $v, w \in T_pM$ gilt

$$g_p^M(v,w) = g_{\Phi(p)}^N(\mathrm{d}_p\Phi(v), \mathrm{d}_p\Phi(w)).$$

In diesem Fall heißen M, N *isometrisch*.

M heißt *lokal isometrisch zu N*, falls zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung V und eine Isometrie $\Phi : V \to \Phi(V)$ existieren.

M, N heißen *lokal isometrisch*, falls M lokal isometrisch zu N und N lokal isometrisch zu M.

Bemerkung 4.57

Seien M, N Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$, (U, φ) ein lokales Koordinatemsystem von M und $\Phi : \varphi(U) \to \Phi(\varphi(U))$ eine Isometrie. Dann ist $(U, \Phi \circ \varphi)$ ein lokales Koordinatensystem von N und es gilt $g_{ij}^{\Phi\circ\varphi} = g_{ij}^{\varphi}$ auf U:

Seien $\psi := \Phi \circ \varphi$, $x \in U$ und $p = \varphi(x)$, dann

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\psi}(x) &= g_{\psi(x)}(\mathrm{d}_x\psi(e_i), \mathrm{d}_x\psi(e_j)) &&= g_{\Phi(p)}(\mathrm{d}_p\Phi\mathrm{d}_x\varphi(e_i), \mathrm{d}_p\Phi\mathrm{d}_x\varphi(e_j)) \\ &= g_p(\mathrm{d}_x\varphi(e_i), \mathrm{d}_x\varphi(e_j)) &&= g_{ij}^{\varphi}(x). \end{aligned}$$ ♦

Definition 4.58

Geometrische Größen, die sich unter lokaler Isometrie nicht ändern, heißen die *Größen der inneren Geometrie*.

Bemerkung 4.59

Damit sind alle Größen, die nur von der ersten Fundamentalform abhängen, Größen der inneren Geometrie, zum Beispiel

(1) Flächenelement
(2) Riemannscher Krümmungstensor
(3) Riccitensor
(4) Skalarkrümmung
(5) Gauß-Kronecker-Krümmung für $\dim(M)$ gerade
(6) Kovariante Ableitung.

Keine Größen der inneren Geometrie sind

(1) zweite Fundamentalform
(2) Weingarten-Abbildung
(3) Hauptkrümmungen
(4) mittlere Krümmung ♦

Korollar 4.60

Es gibt keine perfekten Landkarten, d.h. es gibt keine lokale Isometrie der Kugel $\mathbb{S}^2$ auf die Ebene $\mathbb{R}^2$.

Beweis

Die Gaußkrümmung bleibt unter lokaler Isometrie erhalten, aber $K_{\mathbb{S}^2} \equiv 1 \neq 0 \equiv K_{\mathbb{R}^2}$. ■

4.8 Jacobi-Felder

Definition 4.61

Sei $\alpha : I \to M$ ein glatter Weg. Ein glattes, tangentiales Vektorfeld X längs α heißt *Jacobi-Feld*, falls

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t) = -R(X(t), \alpha'(t))\alpha'(t).$$

Bemerkung 4.62

Die Jacobi-Felder sind durch die Vorgabe $X(t_0)$, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t_0)$ eindeutig bestimmt und bilden einen $2n$-dimensionalen Vektorraum.

Seien nämlich $E_1, ..., E_n$ längs α parallele Vektorfelder, die in einem (und damit jedem) Punkt eine Orthonormalbasis bilden. Mit der Einführung von Koordinaten $x_1, ..., x_n$ für $X(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)E_i(t)$ und $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n}$, gegeben durch $a_{ij}(t) = g_{\alpha(t)}(R(E_i(t), \alpha'(t))\alpha'(t), E_j(t))$, ist dann

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}X(t) = \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i(t)E_i(t), \qquad R(X(t), \alpha'(t))\alpha'(t) = \sum_{ij=1}^n x_i(t)a_{ij}(t)E_i(t),$$

d.h. X ist genau dann ein eindeutig bestimmtes Jacobi-Feld, wenn die Koordinaten x_i von X folgendes System lösen:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= -A(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= x_1 \end{cases}.$$ ■

Bemerkung 4.63

Ist $\alpha : I \to M$ eine Geodätische, dann heißt ein glattes $c : (-\epsilon, \epsilon) \times I \to M$ mit $c(0, \cdot) = \alpha$ eine *geodätische Variation* von α, falls $c(s, \cdot)$ eine Geodätische ist für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. ♦

Satz 4.64

Ist c eine geodätische Variation von α, dann ist das zugehörige Variationsvektorfeld $V := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(s, \cdot)|_{s=0}$ ein Jacobi-Feld längs α.

Beweis

Da $c(s, \cdot)$ Geodätische für $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, gilt $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(s, t) = 0$ für alle $t \in I$, also

$$0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c + R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c + R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c.$$

Auswerten in $s = 0$ liefert

$$0 \equiv \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V + R(V, \alpha')\alpha'.$$ ■

Satz 4.65

Seien $\alpha : I \to M$ eine Geodätische und X ein Jacobi-Feld längs α. Dann ist X das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation von α.

4.9 Ausblick: Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 4.66

Eine *n-dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit* M ist ein Hausdorffscher topologischer Raum mit abzählbarer Basis, der lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist.

Eine Abbildung $\partial : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt *Derivation* bei $p \in M$, falls ∂ linear ist und die „Produktregel" erfüllt, d.h. falls für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\partial(\alpha f + \beta g) = \alpha \partial f + \beta \partial g, \qquad \partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial_g.$$

Die Menge $D_p M$ aller Derivationen bei p kann mit einer Vektorraumstruktur versehen werden via

$$(\alpha \partial_1 + \beta \partial_2)(f) := \alpha \partial_1(f) + \beta \partial_2(f) \qquad (\partial_1, \partial_2 \in D_p M,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Der *Tangentialraum* von M bei $p \in M$ ist $T_p M := \{[\gamma]_p \mid \gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M),\ \gamma(0) = p\}$.

Bemerkung 4.67

Speziell für Teilmannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\gamma'(0) \mapsto [\gamma]_p$ eine Bijektion. ♦

Definition 4.68

Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* ist eine „differenzierbare" Mannigfaltigkeit mit einer „Riemann-Struktur" $g_p(\cdot, \cdot)$, d.h. $p \mapsto g_p$ muss eine symmetrischen Bilinearform sein.

Bemerkung 4.69

Man kann zeigen, dass auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine Riemann-Struktur existiert. ♦

Definition 4.70

Ein *affiner Zusammenhang* D auf einer differenzierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine Abbildung $\mathrm{D} : \mathrm{VM}^2 \to \mathrm{VM}$, VM die Menge aller (tangentialen) Vektorfelder, $(X, Y) \mapsto \mathrm{D}_X Y$, so dass für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ und alle $X, Y, Z \in \mathrm{VM}$ gelten:

$$\mathrm{D}_{fX+gY}(Z) = f\mathrm{D}_X Z + g\mathrm{D}_Y Z \qquad \mathrm{D}_X(fY + gZ) = f\mathrm{D}_X Z + g\mathrm{D}_Y Z.$$

Bemerkung 4.71

Damit können wir Begriffe wie „paralleles Feld" und „Parallelverschiebung" definieren. ♦

Definition 4.72

Ein affiner Zusammenhang D auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *verträglich* mit g, falls die Abbildung $g_{\alpha(\cdot)}(X_V, X_W)$ für alle X, V, W konstant ist („Normverträglichkeit").

D heißt *symmetrisch*, falls $\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X = [X, Y]$ $(=: X(Y) - Y(X))$.

Bemerkung 4.73

Zu jeder differenzierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) existiert genau ein affiner Zusammenhang D, der verträglich und symmetrisch ist. Dieser heißt *Levi-Civita-Zusammenhang*. ♦

Definition 4.74

Eine differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *geodätisch vollständig*, falls für alle $p \in M$ eine „Exponenzialabbildung" $\exp_p : T_p M \to M$ auf ganz $T_p M$ definiert ist.

Satz 4.75 (Hopf-Ruiov, 1931)

Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

(1) M ist geodätisch vollständig.
(2) Abgeschlossene, beschränkte Teilmengen von (M, d) sind kompakt (d „Abstandsfunktion").
(3) (M, d) ist vollständig.