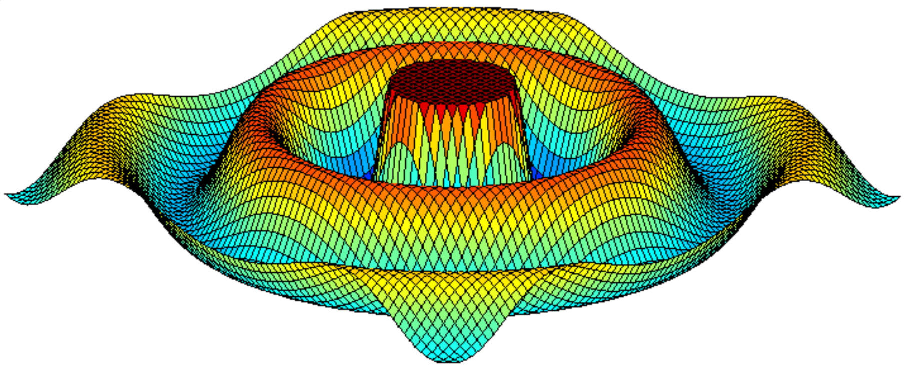
Skript zur Veranstaltung

# Tutorium Mathematik



# Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

# Problemlösungsstrategien

gehalten von

**Martin Gubisch**

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Wintersemester 2010/2011

# Tutorium Mathematik

Diese zweistündige Veranstaltung richtet sich an Mathematik-Studenten im ersten Semester und setzt den „Vorkurs Mathematik“ von Professor Junk und Professor Schnürer, der vom 11. bis zum 15. Oktober stattfindet, fort. Das Tutorium ist eine freiwillige Zusatzveranstaltung – die darin gewonnenen Kenntnisse werden in keiner Vorlesung vorausgesetzt und es werden auch keine Credits vergeben.

Ziel des Tutoriums ist es, den Einstieg ins Mathematik-Studium zu erleichtern, indem ohne jeden Zeitdruck einfache mathematische Fragestellungen in **Gruppenarbeit** erörtert werden. Dabei steht die **Diskussion** im Vordergrund, das Ergebnis selbst ist nicht so entscheidend.

In den ersten zwei bis drei Wochen geht es darum, einfache mathematische Behauptungen auf Grundlage gewisser „Spielregeln“, d.h. unter Verwendung von Axiomen und logischen Schlüssen, zu beweisen und einen solchen Beweis korrekt aufzuschreiben. Als „roter Faden“ werden wir aus der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen konstruieren. Dieser Teil der Veranstaltung dient dazu, das prinzipielle technische Vorgehen zu erlernen, das man auch zum Lösen der Übungsaufgaben zu den regulären Mathematikvorlesungen benötigt.

Anschließend stehen nicht-standardisierte Probleme auf dem Programm, d.h. wir befinden uns nicht mehr in der komfortablen Situation, aus gegebenen Aussagen mit Hilfe logischer Regeln neue zu beweisen, sondern sind mit „Alltagsproblemen“ konfrontiert, die erst mathematisch formuliert werden müssen, bevor wir die Konzepte aus dem ersten Teil anwenden können, etwa:

> Wir betrachten ein gewöhnliches, 8x8 Felder großes Schachbrett. Ein „Spielzug“ besteht daraus, vier beliebige Felder auszuwählen und umzufärben, d.h. aus den schwarzen Feldern weiße zu machen und umgekehrt.
>
> Ist es möglich, dass nach endlich vielen Spielzügen genau ein Feld schwarz ist und alle anderen weiß sind?

Können wir die Frage positiv beantworten, dann sind wir in der angenehmen Situation, nur die erforderlichen Spielzüge angeben zu müssen. Andernfalls müssen wir schon trickreicher vorgehen, um nachzuweisen, dass *keine* Abfolge *beliebig vieler* Spielzüge zu dieser Endkonstellation führt – mit Probieren werden wir hier auf keinen grünen Zweig kommen.

Des Weiteren soll der Blick dafür geschult werden, Scheinargumente, die zwar zunächst plausibel klingen, aber tatsächlich in schwammigen oder mehrdeutigen Formulierungen getarnt die Gesetze der Logik verletzen, zu erkennen und präzise zu benennen, wo genau der Haken ist:

> Drei Touristen mieten sich in einem Hotel ein Dreibettzimmer, für das sie zusammen dreißig $ bezahlen. Kaum haben sie die Rezeption verlassen, da bemerkt der Portier, dass das Zimmer nur fünfundzwanzig $ kostet. Um den Konflikt, fünf $ auf drei Gäste aufteilen zu müssen, zu vermeiden, gibt er jedem der Touristen einen $ zurück und behält die zwei restlichen. Die Touristen haben somit zusammen siebenundzwanzig $ für das Zimmer bezahlt und zwei $ hat der Portier, macht zusammen neunundzwanzig – wo ist aber der dreißigste $ abgeblieben?

Das Wichtigste im Überblick:

```
Zeitraum: 19.10.2010-21.12.2010 (2std.)
Termine:  Dienstag, 16:15-17:45 Uhr, P603
          Dienstag, 18:00-19:30 Uhr, P603
Homepage: http://www.martingubisch.de - Mathematik - Tutorien - Tutorium Mathematik
```

# Inhaltsverzeichnis



# Ablaufplan

| | |
|---|---|
| 19.10.2010 | Kapitel 1: Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, Teil I<br>Aufgabe (1.1) |
| 26.10.2010 | Kapitel 1: Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, Teil II<br>Aufgaben (1.2)-(1.4) |
| 02.11.2010 | Kapitel 1: Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, Teil III<br>Aufgaben (1.5)-(1.8) |
| 09.11.2010 | Kapitel 2: Modellierung von Spielen<br>Aufgaben (2.1)-(2.4) |
| 16.11.2010 | Kapitel 3: Die Invariantenmethode, Teil I<br>Aufgaben (3.1)-(3.3) |
| 23.11.2010 | Kapitel 3: Die Invariantenmethode, Teil II<br>Aufgaben (3.4)-(3.7) |
| 30.11.2010 | Kapitel 4: Die Antiinvariantenmethode, Teil I<br>Aufgaben (4.1)-(4.2) |
| 07.12.2010 | Kapitel 4: Die Antiinvariantenmethode, Teil II<br>Aufgaben (4.3)-(4.4) |
| 14.12.2010 | Kapitel 5: Geometrische Modellierung, Teil I<br>Aufgaben (5.1)-(5.3) |
| 21.12.2010 | Kapitel 5: Geometrische Optimierung, Teil II<br>Aufgaben (5.4)-(5.7) |

# Aufgaben

# 1 Der Körper der komplexen Zahlen

Sei $\mathbb{K}$ ein **Körper**, d.h. $\mathcal{K} = (K, p, m)$, wobei $K$ eine Menge ist (die **Grundmenge** des Körpers) und $p : K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x + y,\ m : K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x \times y$ Abbildungen sind (die **Addition** und die **Multiplikation**), so dass gelten:

(A1) $\forall x, y, z \in K : x + (y + z) = (x + y) + z;$ (**Assoziativgesetz** für $+$)

(A2) $\forall x, y \in K : x + y = y + x;$ (**Kommutativgesetz** für $+$)

(A3) $\exists o \in K : \forall x \in K : x + o = x;$ (**Existenz eines Neutralen** für $+$)

(A4) $\forall x \in K : \exists(-x) \in K : x + (-x) = o;$ (**Existenz von Inversen** für $+$)

(M1) $\forall x, y, z \in K : x \times (y \times z) = (x \times y) \times z;$ (**Assoziativgesetz** für $\times$)

(M2) $\forall x, y \in K : x \times y = y \times x;$ (**Kommutativgesetz** für $\times$)

(M3) $\exists e \in K\backslash\{o\} : \forall x \in K : x \times e = x;$ (**Existenz eines Neutralen** für $\times$)

(M4) $\forall x \in K\backslash\{o\} : \exists(x^{-1}) \in K : x \times (x^{-1}) = e;$ (**Existenz von Inversen** für $\times$)

(AS) $\forall x, y, z \in K : x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$ (**Distributivgesetz**)

Weiter enthalte $K$ kein Element $x$, für das gilt $x \times x + e = 0$. Wir definieren auf $C = K \times K$ neue Abbildungen $p' : C \times C \to C,\ p'(x, y) = x \oplus y$ und $m' : C \times C \to C,\ m'(x, y) = x \otimes y$ durch:

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (u, v) &= (x + u, y + v); \\ (x, y) \otimes (u, v) &= ((x \times u) - (y \times v), (x \times v) + (y \times u)). \end{aligned}$$

**(1.1)** Beweisen Sie, dass $\mathcal{C} = (C, p', m')$ ein Körper ist.

**Hinweis:** Um zu $\vec{x} \in C\backslash\{\vec{o}\},\ \vec{x} = (x_1, x_2)$ das multiplikativ Inverse $\vec{x}^{-1}$ zu bestimmen, betrachten Sie die Gleichung

$$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1, x_2)^{-1} \otimes ((x_1, -x_2)^{-1} \otimes (x_1, -x_2)).$$

Seien $M$ eine Menge und $\Phi : K \to M$ eine **Bijektion**, d.h. eine Abbildung, für die gelten:

$\forall x \in M : \exists y \in K : \Phi(y) = x;$ (**Surjektivität**)

$\forall x, y \in M : \Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y.$ (**Injektivität**)

Sei $x \in M$. Wir bezeichnen mit $\Phi^{-1}(x)$ dasjenige $y \in K$ mit $\Phi(y) = x$.

Seien $x, y \in M$. Wir definieren Abbildungen $p_0 : M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x \boxplus y$ und $m_0 : M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x \boxtimes y$ durch

$$\begin{aligned} x \boxplus y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y)); \\ x \boxtimes y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \times \Phi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

**(1.2)** Beweisen Sie, dass $\mathcal{M} = (M, p_0, m_0)$ ein Körper ist.

Seien $i$ ein Element, das nicht in $K$ enthalten ist, und $\mathcal{K}[i] = (K[i], [+], [\times])$ ein Körper mit möglichst kleiner Grundmenge $K[i] \supseteq K \cup \{i\}$, so dass für alle $x, y \in K$ gelten:

$$x[+]y = x + y, \qquad x[\times]y = x \times y, \qquad (i[\times]i)[+]1 = 0.$$

**(1.3)** Beweisen Sie:

$$K[i] = \{a[+](i[\times]b) \mid a, b \in K\}.$$

**(1.4)** Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in K$ gilt:

$$a[+](i[\times]b) \in K \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = 0.$$

**(1.5)** Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

$$a[+](i[\times]b) = c[+](i[\times]d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \text{ und } b = d.$$

**(1.6)** Finden Sie eine Bijektion $\Phi : C \to K[i]$, so dass für alle $x, y \in K[i]$ gilt:

$$\begin{aligned} x[+]y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \oplus \Phi^{-1}(y)); \\ x[\times]y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \otimes \Phi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

**(1.7)** Gibt es mehrere Möglichkeiten, solch ein $\Phi$ zu definieren?

Seien $\mathcal{K}_1 = (K_1, +_1, \times_1)$ und $\mathcal{K}_2 = (K_2, +_2, \times_2)$ zwei Körper. Wir nennen eine Bijektion $\Phi : K_1 \to K_2$ einen **Körperisomorphismus** zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$, falls für alle $x, y \in K_1$ gilt:

$$\Phi(x +_1 y) = \Phi(x) +_2 \Phi(y), \qquad \Phi(x \times_1 y) = \Phi(x) \times_2 \Phi(y), \qquad \Phi(e_1) = e_2.$$

**(1.8)** Beweisen Sie, dass es zwischen zwei Körpern $\mathcal{K}_1[i_1]$ und $\mathcal{K}_2[i_2]$ mit obigen Eigenschaften stets einen Körperisomorphismus gibt.

Ist speziell $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ der Körper der reellen Zahlen $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}})$, dann nennen wir $\mathcal{C}$ und jeden Körper, der zu $\mathcal{C}$ isomorph ist, den **Körper der komplexen Zahlen** $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \times_{\mathbb{C}})$.

Wir können $\mathcal{R}$ als Teilkörper von $\mathcal{C}$ auffassen via der **Einbettung** (d.h. injektiven Abbildung)

$$\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto (x, 0).$$

Die **komplexe Konjugation**

$$\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x, y) \mapsto (x, -y)$$

definiert einen Körperisomorphismus auf $\mathcal{C}$.

**Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes nichtkonstante Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n \qquad (a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C})$$

besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

# 2 Modellierung

Unter einem **Spiel** verstehen wir eine Situation, die durch eine **Anfangskonstellation** gewisser Objekte und eine Reihe von **Regeln**, mit denen aus einer gegebenen Konstellation eine neue erreicht werden kann, charakterisiert wird. Ein **Zug** besteht aus der Anwendung genau einer dieser Regeln.

Wir wollen im Folgenden solche Spiele durch mathematische Objekte charakterisieren – eine solche Charakterisierung heißt ein **Modell** des Spiels. Modelle sind Tripel

$$M = (K, x^{\text{anf}}, L),$$

bestehend aus einer Menge $K$ (aller Konstellationen), einem $x^{\text{anf}} \in K$ (der Anfangskonstellation) und einer Menge $L$ von Funktionen $Z : K \to K$ (den Zügen), die jeder Konstellation $x \in K$ eine neue Konstellation $Z(x) \in K$ zuordnen, wobei $Z(x)$ diejenige Konstellation ist, die aus $x$ entsteht, wenn man den zu $Z$ gehörigen Zug durchführt.

Natürlich muss darauf geachtet werden, dass sich Züge und zugehörige Funktionen genau entsprechen, d.h. kann eine Konstellation $x$ durch Ausführung eines Zuges in eine Konstellation $y$ übergeführt werden, dann muss es eine Funktion $Z \in L$ geben mit $Z(x) = y$. Umgekehrt muss es zu jedem $x \in K$ und jedem $Z \in L$ einen Zug geben, so dass $Z(x)$ durch Anwendung dieses Zuges aus $x$ entsteht.

Die Menge der nach $n$ Zügen erreichbaren Konstellationen ist dann

$$E_n := \{x \in K \mid \exists Z_1, ..., Z_n \in L : x = (Z_n \circ \cdots \circ Z_1)(x^{\text{anf}})\}.$$

Die Menge aller nach endlich vielen Zügen erreichbaren Konstellationen ist

$$E_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \left\{x \in K \mid \exists n \in \mathbb{N} : \exists Z_1, ..., Z_n \in L : x = (Z_n \circ \cdots \circ Z_1)(x^{\text{anf}})\right\}.$$

*Wir betrachten ein gewöhnliches Schachbrett, auf dem nur eine einzige Figur steht: Der linke weiße Läufer. Ein Zug ist natürlich eine Diagonalbewegung der Figur nach den üblichen Schachregeln, wobei es auch erlaubt ist, die Figur gar nicht zu bewegen.*

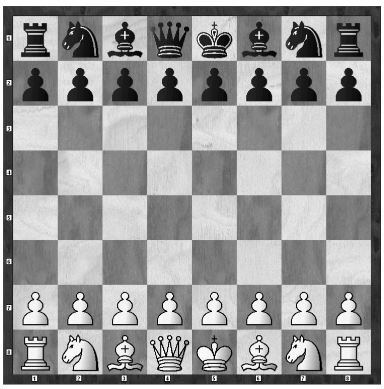
*Ist es möglich, diesen in endlich vielen Schritten auf das Feld links von seiner Startposition zu ziehen?*

**(2.1)** Modellieren Sie diese Situation, d.h. geben Sie eine mögliche Menge $M = (K, x^{\text{anf}}, L)$ an.

**(2.2)** Finden Sie geeignete Funktionen $Z_1, Z_2 \in L$, so dass $(Z_2 \circ Z_1)(x^{\text{anf}})$ die Figur auf das Feld (2,1) befördert. Finden Sie weiter ein $Z \in L$, so dass $Z(Z(Z(Z(Z(x^{\text{anf}})))))$ die Figur auf Feld (3,8) befördert.

**(2.3)** Bestimmen Sie $E_n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $E_\infty$.

**(2.4)** Beweisen Sie, dass die oben beschriebene Endkonstellation $x^{\text{end}} = (8, 2)$ nicht erreichbar ist.



# 3 Invariantenmethoden

Unsere Aufgabe wird es im Folgenden sein, bei verschiedenen Spielen durch Ausführen endlich vieler Züge von der Anfangskonstellation aus eine bestimmte Endkonstellation zu erreichen – oder zu beweisen, dass dies nicht möglich ist.

Als besonders nützlich erweist es sich in letzterem Fall, nach einer **Invarianten** zu suchen, d.h. nach einer Funktion $F$, die jeder Konstellation einen bestimmten Wert zuordnet und für die gelten:

(1) $F$ ist auf der Menge der *erreichbaren* Konstellationen konstant, d.h. $\forall x \in E_\infty : F(x) = F(x^{\text{anf}})$;

(2) Die Funktionswerte der Anfangs- und der Endkonstellation sind verschieden, d.h. $F(x^{\text{anf}}) \neq F(x^{\text{end}})$.

In dem Fall ist es dann offenbar nicht möglich, die Endkonstellation in endlich vielen Zügen zu erreichen.

Im vorigen Beispiel **(2.4)** wäre eine geeignete Invariante die Funktion $F : K \to \{u, g\}$ mit

$$\forall x = (i, j) \in K : x \mapsto F(x) := \mathrm{Par}(i + j),$$

denn dann sind $F(x) = F(x^{\text{anf}}) = u$ für alle $x \in E_\infty$ und $F(x^{\text{end}}) = g$.

**(3.1)** Betrachten wir ein üblich gefärbtes, $8 \times 8$-Schachbrett. Man kann in einem Zug alle Felder einer Zeile umfärben, alle Felder einer Spalte umfärben oder vier Felder, die ein $2 \times 2$-Quadrat bilden, umfärben (*Umfärben* bedeutet dabei, die schwarzen Felder weiß zu färben und die weißen Felder schwarz).

Kann man nach endlich vielen Zügen erreichen, dass ein Feld schwarz ist und alle anderen weiß sind?

**(3.2)** In jedem Feld eines $3 \times 3$-Schachbretts sitzt ein Käfer. Ein Zug besteht daraus, dass alle Käfer gleichzeitig von ihrem Feld aus in ein benachbartes Feld wechseln (nach links, rechts, oben oder unten).

Ist es möglich, dass sich nach dem ersten Wechsel in jedem Feld genau ein Käfer befindet?

**(3.3)** Max und Moritz zerreißen die Schulordnung. Max zerreißt jedes Stück, das ihm in die Hände fällt, in drei Fetzen, Moritz in Fünf. Als der Lehrer Lempel die Lausbuben erwischt, verlangt er, die Schulordnung wieder zusammenzukleben. Widerwillig fügen sich die beiden der Anweisung. Zusammen finden sie einhundert Papierfetzen.

Kann die zusammengeklebte Schulordnung vollständig sein?

**(3.4)** An einem Öbstebaum im Paradies hängen fünfundzwanzig Äpfel und fünfundzwanzig Bananen. Pro Stunde suchen Adam und Eva den Baum auf und pflücken gemeinsam zwei Früchte. Plücken sie zwei Früchte der gleichen Sorte, wächst ein Apfel nach. Pflücken sie dagegen zwei Früchte verschiedener Sorten, wächst eine Banane nach. Die beiden bedienen sich so lange am Baum, bis nur noch eine Frucht übrig ist.

Handelt es sich um eine Banane oder um einen Apfel?

**(3.5)** An einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, ..., 137$. In jedem Schritt darf man zwei beliebige Zahlen wegwischen und statt dessen die Summe der beiden weggewischten Zahlen anschreiben. Wir führen so viele Schritte durch, bis nur noch eine Zahl übrig ist.

Welche Werte kann diese letzte Zahl annehmen?

**(3.6)** Wir betrachten eine neue Schachfigur, die in jedem Zug auf ein Nachbarfeld wechselt und dann drei Schritte orthogonal dazu weiterläuft. Die Figur startet links oben.

Ist es der Figur möglich, nach endlich vielen Schritten auf das Feld rechts von ihrer Startposition zu wechseln?

**(3.7)** Kann ein gewöhnliches Schachpferd von seiner Startposition aus jedes Feld des Brettes nach endlich vielen Schritten erreichen?

# 4 Antiinvariantenmethoden

Im Gegensatz zu einer Invariante ist eine **Antiinvariante** eine Funktion, die sich nach *jedem* Zug ändert, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A' \in E_n,\ A \in E_{n+1}$ gilt $F(A') \neq F(A)$. Von Interesse sind beispielsweise Antiinvarianten, deren Funktionswerte in $\mathbb{N}$ liegen und immer kleiner werden: Mit solchen kann nachgewiesen werden, dass ein Prozess nach endlich vielen Schritten zum Stillstand kommen muss.

**(4.1)** Jeder von $n$ Abgeordneten in einem Parlament hat höchstens drei Feinde.

Kann man die Abgeordneten so auf zwei Häuser aufteilen, dass jeder Abgeordnete in seinem Haus höchstens einen Feind hat?

**(4.2)** In einem Parlament sitzen $2n$ Abgeordnete, von denen jeder höchstens $n-1$ Feinde hat, wobei Feindschaften immer in beide Richtungen gelten: Ist ein Abgeordneter der Feind eines anderen, dann auch umgekehrt.

Ist es möglich, die Abgeordneten so an einen runden Tisch zu setzen, dass keine zwei Feinde nebeneinander sitzen?

**(4.3)** In einem Staat gibt es $n$ Städte, von denen jede entweder von der schwarzen oder der weißen Partei regiert wird. Jede dieser Städte ist mit ungerade vielen anderen Städte befreundet. Der Reihe nach wird jeden Monat in einer der Städte gewählt. Dabei wählen die Bürger diejenige Partei, die in den befreundeten Städten die Mehrheit inne hat.

Kommt der Prozess zu einem Stillstand, d.h. wählt ab einem gewissen Zeitpunkt jede Stadt diejenige Partei, die diese bereits regiert?

**(4.4)** Wir betrachten ein $m \times n$-Tableau, dessen Einträge ganze Zahlen sind. Ein Zug besteht darin, eine Zeile oder Spalte auszuwählen und dort die Vorzeichen aller Einträge zu wechseln.

Ist es möglich, dass nach endlich vielen Zügen alle Zeilen- und alle Spaltensummen mindestens 0 betragen?

# 5 Geometrische Modellierung

In der Analytischen Geometrie werden Probleme aus der Euklidischen Geometrie mit analytischen Hilfsmitteln bearbeitet. Dies ist zunächst ein klassisches Modellierungsproblem: Geometrische Objekte wie Punkte, Parallelen und rechte Winkel wollen in analytische Objekte, d.h. Zahlen, übersetzt werden. Universelles Instument ist hier das nach dem französischen Naturwissenschaftler und „Erfinder“ der analytischen Geometrie, **René Descartes** (1596-1850), benannte **Kartesische Koordinatensystem**.

Wir betrachten einige Aspekte dieses Übersetzungsprozesses, ohne streng nach dem von **Euklid von Alexandria** (ca. 360-280 v. Chr.) vorgeschlagenen Axiomensystem vorzugehen.

**(5.1)** Man modelliere die folgenden Objekte der ebenen Geometrie: Punkt, Gerade, Parallele zu einer Geraden, Dreieck, Quadrat, Abstand, Länge, Winkel.

Man modelliere eine Ebene $E$ im $\mathbb{R}^3$ durch eine Menge, eine Matrix, einen affinen Vektorraum, einen Vektorraum und die Lösungsmenge eines Gleichungssystems.

**(5.2)** Man zeige, dass der Vektorraum in **(5.1)** zweidimensional ist, indem man einen Vektorraumsomorphismus in den $\mathbb{R}^2$ findet.

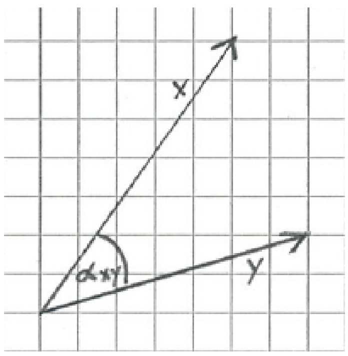
**(5.3)** Man beweise, dass der Winkel $\alpha_{xy} := \sphericalangle(x, y)$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ die folgende Beziehung erfüllt:

$$\cos(\alpha_{xy}) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}.$$

**Hinweis:** Das Additionstheorem

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

das wir hier weder analytisch beweisen noch geometrisch motivieren wollen, könnte dabei nützlich sein.



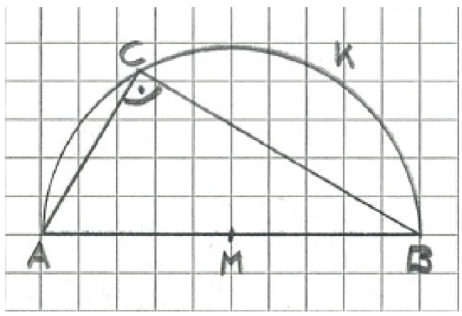

**(5.4)** Man beweise den **Satz von Thales:**

Sind $A, C$ Punkte im $\mathbb{R}^2$, $K$ ein Kreis um den Mittelpunkt $M$ der Strecke $\overline{AB}$ und $C \neq A, B$ ein beliebiger Punkt auf $K$, so ist

$$\sphericalangle\left(\overline{AC}, \overline{BC}\right)$$

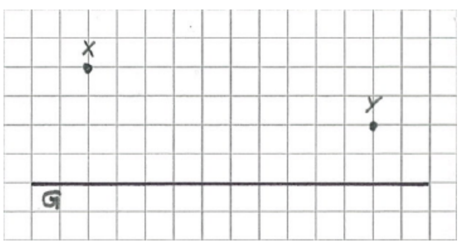
stets ein rechter Winkel.

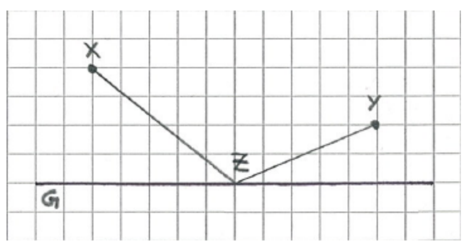
Ein elementarer Beweis des Satzes (der nur benutzt, dass Winkelsummen im Dreieck 180° betragen und dass die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich groß sind) wird **Thales von Milet** (ca. 624-546 v. Chr.) zugeschrieben.



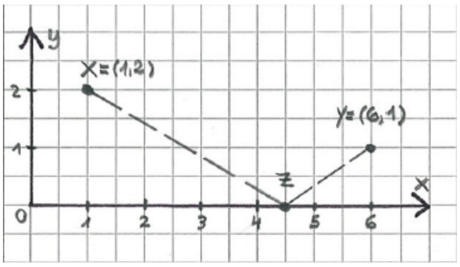

**(5.5)** Man konstuiere (mit Zirkel und Lineal) einen Punkt $Z$ auf der Geraden $G$, so dass die Länge der Strecke $\overline{XZY}$ minimal wird.

Man konstruiere weiter einen Punkt $P \in G$, so dass $\overline{XP}$ und $\overline{PY}$ gleich lang sind.

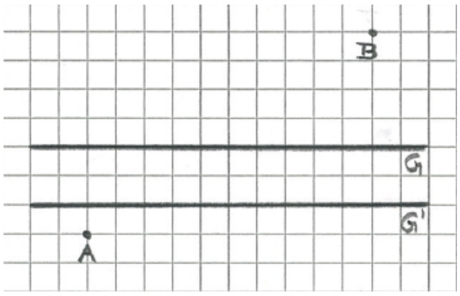


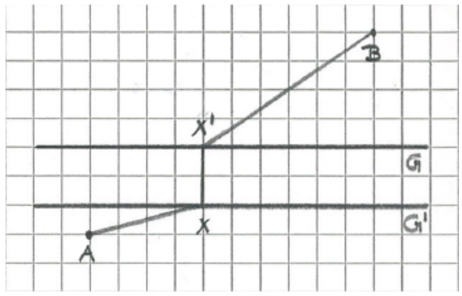



Wie lauten die kartesischen Koordinaten von $Z$, wenn $X$ die Koordinaten $(1,2)$ und $Y$ die Koordinaten $(6,1)$ hat und $G$ die $x$-Achse ist?

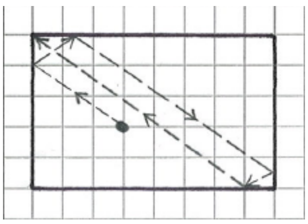



**(5.6)** Man finde zwei Punkte $X \in G,\ X' \in G'$, so dass $\overline{XX'}$ orthogonal zu den Parallelen $G, G'$ ist und die Strecke $\overline{AXX'B}$ minimale Länge hat.

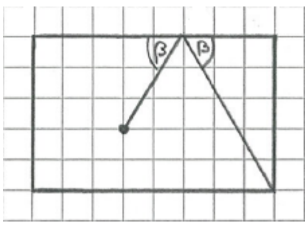


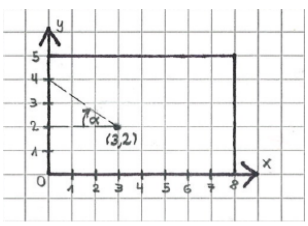

**(5.7) (Billardproblem)** Man konstruiere einen Winkel $\alpha$, so dass die Billardkugel $B$ nach Abprall von allen vier Banden in einem Loch landet (es gilt natürlich nach jeder Bandenberührung, dass Ein- und Austrittwinkel gleich groß sind).



**Hinweis:** Man löse das Problem zunächst für eine Bandenberührung.




Man berechne diesen Winkel für die angegebenen Maße.



# Lösungen

# 1 Der Körper der komplexen Zahlen

Sei $\mathcal{K}$ ein **Körper**, d.h. $\mathcal{K} = (K, p, m)$, wobei $K$ eine Menge ist (die **Grundmenge** des Körpers) und $p : K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x + y,\ m : K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x \times y$ Abbildungen sind (die **Addition** und die **Multiplikation**), so dass gelten:

(A1) $\forall x, y, z \in K : x + (y + z) = (x + y) + z$; (**Assoziativgesetz** für $+$)

(A2) $\forall x, y \in K : x + y = y + x$; (**Kommutativgesetz** für $+$)

(A3) $\exists o \in K : \forall x \in K : x + o = x$; (**Existenz eines Neutralen** für $+$)

(A4) $\forall x \in K : \exists(-x) \in K : x + (-x) = o$; (**Existenz von Inversen** für $+$)

(M1) $\forall x, y, z \in K : x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$; (**Assoziativgesetz** für $\times$)

(M2) $\forall x, y \in K : x \times y = y \times x$; (**Kommutativgesetz** für $\times$)

(M3) $\exists e \in K\backslash\{o\} : \forall x \in K : x \times e = x$; (**Existenz eines Neutralen** für $\times$)

(M4) $\forall x \in K\backslash\{o\} : \exists(x^{-1}) \in K : x \times (x^{-1}) = e$; (**Existenz von Inversen** für $\times$)

(AS) $\forall x, y, z \in K : x \times (y + z) = x \times y + x \times z$. (**Distributivgesetz**)

Weiter enthalte $K$ kein Element $x$, für das gilt $x \times x + e = 0$. Wir definieren auf $C = K \times K$ neue Abbildungen $p' : C \times C \to C,\ p'(x, y) = x \oplus y$ und $m' : C \times C \to C,\ m'(x, y) = x \otimes y$ durch:

$$
\begin{aligned}
(x, y) \oplus (u, v) &= (x + u, y + v);\\
(x, y) \otimes (u, v) &= ((x \times u) - (y \times v), (x \times v) + (y \times u)).
\end{aligned}
$$

**(1.1)** Beweisen Sie, dass $\mathcal{C} = (C, p', m')$ ein Körper ist.
**Hinweis:** Um zu $\vec{x} \in C\backslash\{\vec{o}\},\ \vec{x} = (x_1, x_2)$ das multiplikativ Inverse $\vec{x}^{-1}$ zu bestimmen, betrachten Sie die Gleichung

$$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1, x_2)^{-1} \otimes ((x_1, -x_2)^{-1} \otimes (x_1, -x_2)).$$

Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ beliebige Elemente aus $C$. Dann gibt es $x, y, z, u, v, w \in K$, so dass $\vec{x} = (x, u),\ \vec{y} = (y, v)$ und $\vec{z} = (z, w)$. Wir rechnen die sieben Körperaxiome nach:

**Zur Assoziativität bzgl. $\oplus$:**

$$
\begin{aligned}
(x, u) \oplus ((y, v) \oplus (z, w)) &= (x, u) \oplus (y + z, v + w)\\
&= (x + (y + z), u + (v + w))\\
&= ((x + y) + z, (u + v) + w)\\
&= (x + y, u + v) \oplus (z + w)\\
&= ((x, u) \oplus (y, v)) \oplus (z, w).
\end{aligned}
$$

**Zur Kommutativität bzgl. $\oplus$:**

$$
\begin{aligned}
(x, u) \oplus (y, v) &= (x + y, u + v)\\
&= (y + x, v + u)\\
&= (y, v) \oplus (x, u).
\end{aligned}
$$

**Zur Existenz des Neutralen bzgl. $\oplus$:** Wir setzen $\vec{o} = (o, o)$, dann gilt

$$\vec{x} \oplus \vec{o} = (x, u) \oplus (o, o) = (x + o, u + o) = (x, u) = \vec{x}.$$

**Zur Existenz der Inversen bzgl. $\oplus$:** Wir setzen $-\vec{x} = (-x, -u)$, dann gilt

$$\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = (x, u) \oplus (-x, -u) = (x + (-x), u + (-u)) = (o, o) = \vec{o}.$$

**Zur Assoziativität bzgl. $\otimes$:**

$$\begin{aligned}
(x,u)\otimes((y,v)\otimes(z,w)) &= (x,u)\otimes((y\times z)-(v\times w),(y\times w)+(v\times z))\\
&= (x\times((y\times z)-(v\times w))-u\times(y\times w)+(v\times z),\\
&\quad\; x\times((y\times w)+(v\times z))+u\times((y\times z)-(v\times w)))\\
&= (x\times(y\times z)-x\times(v\times w)-u\times(y\times w)-u\times(v\times z),\\
&\quad\; x\times(y\times w)+x\times(v\times z)+u\times(y\times z)-u\times(v\times w))\\
&= ((x\times y)\times z-(x\times v)\times w-(u\times y)\times w-(u\times v)\times z,\\
&\quad\; (x\times y)\times w+(x\times v)\times z+(u\times y)\times z-(u\times v)\times w)\\
&= ((x\times y)\times z-(u\times v)\times z-(x\times v)\times w-(u\times y)\times w,\\
&\quad\; (x\times y)\times w-(u\times v)\times w+(x\times v)\times z+(u\times y)\times z)\\
&= (((x\times y)-(u\times v))\times z-((x\times v)+(u\times y))\times w,\\
&\quad\; ((x\times y)-(u\times v))\times w+((x\times v)+(u\times y)\times z))\\
&= ((x\times y)-(u\times v),(x\times v)+(u\times y))\otimes(z,w)\\
&= ((x,u)\otimes(y,v))\otimes(z,w).
\end{aligned}$$

**Zur Kommutativität bzgl. $\otimes$:**

$$\begin{aligned}
(x,u)\otimes(y,v) &= ((x\times y)-(u\times v),(x\times v)+(y\times u))\\
&= ((y\times x)-(v\times u),(y\times u)+(v\times x))\\
&= (y,v)\otimes(x,u).
\end{aligned}$$

**Zur Existenz des Neutralen bzgl. $\otimes$:** Wir setzen $\vec{e}=(e,o)$, dann gilt

$$\vec{x}\otimes\vec{e}=(x,u)\otimes(e,o)=((x\times e)-(u\times o),(x\times o)+(u\times e))=(x,u)=\vec{x}.$$

**Zur Existenz der Inversen bzgl. $\otimes$:** Sei $\vec{x}\neq\vec{o}$, d.h. es gilt $x\neq o$ oder $u\neq o$. Dann gilt formal:

$$\begin{aligned}
(x,u)^{-1} &= (x,u)^{-1}\otimes((x,-u)^{-1}\otimes(x,-u))\\
&\overset{(*)}{=} ((x,u)\otimes(x,-u))^{-1}\otimes(x,-u)\\
&= ((x\times x)+(u\times u),o)^{-1}\otimes(x,-u)\\
&\overset{(**)}{=} ((x\times x)+(u\times u)^{-1},o)\otimes(x,-u)\\
&= (((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times x,-((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times u).
\end{aligned}$$

Dass $(**)$ erfüllt ist, sieht man sofort: Setzen wir $(a,o)^{-1}=(a^{-1},o)$, dann ist

$$(a,o)^{-1}\otimes(a,o)=(a^{-1},o)\otimes(a,o)=((a\times a^{-1})-(o\times o),(a^{-1}\times o)-(o\times a))=(e,o)=\vec{e}.$$

Damit sind wir aber noch nicht fertig, denn die Regel

$$\vec{x}^{-1}\otimes\vec{y}^{-1}=(\vec{x}\otimes\vec{y})^{-1}$$

gilt nur, wenn wir die Existenz von multiplikativ Inversen schon voraussetzen. Bleibt also noch nachzurechnen, dass

$$(((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times x,-((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times u)$$

tatsächlich das multiplikativ Inverse zu $(x,u)$ ist:

$$\begin{aligned}
& (((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times x,-((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times u)\otimes(x,u)\\
=\; & (((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times x\times x+((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times u\times u,\\
& ((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times x\times u-((x\times x)+(u\times u))^{-1}\times u\times x)\\
=\; & (e,o).
\end{aligned}$$

**Zum Distributivgesetz:**

$$\begin{aligned}
& (x,u)\otimes((y,v)\oplus(z,w))\\
=\; & (x,u)\otimes(y+z,(v+w))\\
=\; & (x\times(y+z)-u\times(v+w),x\times(v+w)+u\times(y+z))\\
=\; & ((x\times y)+(x\times z)-(u\times v)-(u\times w),(x\times v)+(x\times w)+(u\times y)+(u\times z))\\
=\; & ((x\times y)-(u\times v),(x\times z)-(u\times w))\oplus((x\times z)-(u\times w),(x\times w)-(u\times z))\\
=\; & ((x,u)\otimes(y,v))\oplus((x,u)\otimes(z,w)).
\end{aligned}$$

Seien $M$ eine Menge, $\mathcal{K} = (K, +, \times)$ ein Körper und $\Phi : K \to M$ eine **Bijektion**, d.h. eine Abbildung, für die gelten:

$\forall x \in M : \exists y \in K : \Phi(y) = x;$ (**Surjektivität**)

$\forall x, y \in M : \Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y.$ (**Injektivität**)

Sei $x \in M$. Wir bezeichnen mit $\Phi^{-1}(x)$ dasjenige $y \in K$ mit $\Phi(y) = x$.

Seien $x, y \in M$. Wir definieren Abbildungen $p_0 : M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x \boxplus y$ und $m_0 : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x \boxtimes y$ durch

$$\begin{aligned} x \boxplus y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y)); \\ x \boxtimes y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \times \Phi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

**(1.2)** Beweisen Sie, dass $\mathcal{M} = (M, p_0, m_0)$ ein Körper ist.

Seien $x, y, z \in M$ beliebig.

**Zur Assoziativität bzgl. $\boxplus$:**

$$\begin{aligned} x \boxplus (y \boxplus z) &= x \boxplus (\Phi(\Phi^{-1}y + \Phi^{-1}z)) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}(\Phi(\Phi^{-1}y + \Phi^{-1}z))) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x + (\Phi^{-1}y + \Phi^{-1}z)) \\ &= \Phi((\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}y) + \Phi^{-1}z) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(\Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}y)) + \Phi^{-1}z) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}y) \boxplus z \\ &= (x \boxplus y) \boxplus z. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass für alle $x \in K$ und alle $y \in M$ gelten: $\Phi(\Phi^{-1}y) = y$ und $\Phi^{-1}(\Phi x) = x$.

Dies ist in der Tat so: Nach Definition ist $\Phi^{-1}(\Phi x)$ dasjenige $z \in K$ mit $\Phi(z) = \Phi(x)$. Da $\Phi$ injektiv ist, folgt $x = z$. Weiter ist $\Phi(\Phi^{-1}y) = \Phi(z)$ für dasjenige $z \in K$, für das gilt $\Phi(z) = y$.

**Zur Kommutativität bzgl. $\boxplus$:**

$$\begin{aligned} x \boxplus y &= \Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}y) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}y + \Phi^{-1}z) \\ &= y \boxplus x. \end{aligned}$$

**Zur Existenz des Neutralen bzgl. $\boxplus$:** Wir definieren $o_{\boxplus} = \Phi o$, dann gilt

$$\begin{aligned} x \boxplus o_{\boxplus} &= \Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}o_{\boxplus}) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}(\Phi o)) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x + o) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x) \\ &= x. \end{aligned}$$

**Zur Existenz der Inversen bzgl. $\boxplus$:** Wir definieren $-x = \Phi(-\Phi^{-1}x)$, dann gilt

$$\begin{aligned} x \boxplus (-x) &= \Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}(-x)) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}(\Phi(-\Phi^{-1}x))) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}x + (-\Phi^{-1}x)) \\ &= \Phi(o) \\ &= o_{\boxplus}. \end{aligned}$$

Dass die entsprechenden Gesetze auch für $\boxtimes$ gelten, ist klar: Man ersetze einfach überall $\boxplus$ durch $\boxtimes$ und $+$ durch $\times$. Insbesondere sind $e_{\boxtimes} = \Phi e$ und $x^{-1} = \Phi((\Phi^{-1}x)^{-1})$.

**Zum Distributivgesetz:**

$$
\begin{aligned}
x \boxtimes (y \boxplus z) &= x \boxtimes (\Phi(\Phi^{-1}y + \Phi^{-1}z)) \\
&= \Phi(\Phi^{-1}x \times \Phi^{-1}(\Phi(\Phi^{-1}y + \Phi^{-1}z))) \\
&= \Phi(\Phi^{-1}x \times (\Phi^{-1}y + \Phi^{-1}z)) \\
&= \Phi((\Phi^{-1}x \times \Phi^{-1}y) + (\Phi^{-1}x \times \Phi^{-1}z)) \\
&= \Phi(\Phi^{-1}(\Phi((\Phi^{-1}x \times \Phi^{-1}y))) + \Phi^{-1}(\Phi((\Phi^{-1}x \times \Phi^{-1}z)))) \\
&= \Phi((\Phi^{-1}x \times \Phi^{-1}y)) \boxplus \Phi((\Phi^{-1}x \times \Phi^{-1}z)) \\
&= (x \boxtimes y) \boxplus (x \boxtimes z).
\end{aligned}
$$

---

Sei $\mathcal{K} = (K, +, \times)$ wieder ein Körper, der kein Element $x$ enthält mit

$$x \times x + e = o.$$

Seien $i$ ein Element, das nicht in $K$ enthalten ist, und $\mathcal{K}[i] = (K[i], [+], [\times])$ ein Körper mit möglichst kleiner Grundmenge $K[i] \supseteq K \cup \{i\}$, so dass für alle $x, y \in K$ gelten:

$$x[+]y = x + y, \qquad x[\times]y = x \times y, \qquad (i[\times]i)[+]e = 0.$$

**(1.3)** Beweisen Sie:
$$K[i] = \{a[+](i[\times]b) \mid a, b \in K\}.$$

Offensichtlich gilt die Inklusion „$\supseteq$“, denn als Körper muss $\mathcal{K}[i]$ abgeschlossen sein unter Addition und Multiplikation.

Umgekehrt enthält $K[i]$ sicherlich $K \cup \{i\}$, denn jedes $k \in K$ lässt sich schreiben als $k = k[+](i[\times]o)$ und $i$ lässt sich schreiben als $i = o[+](i[\times]e)$. Bleibt also zu zeigen, dass Summen und Produkte von Elementen der Gestalt $a[+](i[\times]b)$ wieder diese Gestalt haben.

Seien dazu $a, b, c, d \in K$, dann gelten:

$$
\begin{aligned}
(a[+](i[\times]b))[+](c[+](i[\times]d)) &= (a[+]c)[+](i[\times](b[+]d)) \\
&= (a + c)[+](i[\times](b + d))
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(a[+](i[\times]b))[\times](c[+](i[\times]d)) &= (a[\times]c)[+](i[\times]((a[\times]d)[+](b[\times]c)))[+]((i[\times]i)[\times](b[\times]d)) \\
&= ((a[\times]c)[+](-(b[\times]d)))[+](i[\times]((a[\times]d)[+](b[\times]c))) \\
&= ((a \times c) - (b \times d))[+](i[\times]((a \times d) + (b \times c))).
\end{aligned}
$$

Da $K[i]$ minimal gewählt war, folgt somit auch „$\subseteq$“.

**(1.4)** Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in K$ gilt:
$$a[+](i[\times]b) \in K \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = 0.$$

Zu „$\Rightarrow$“: Angenommen, es gibt $a, b \in K$ mit $b \neq o$ und $a[+](i[\times]b) \in K$. Dann liegt auch

$$((a[+](i[\times]b)) + (-a)) \times b^{-1} = ((a[+](i[\times]b))[+](-a))[\times]b^{-1} = i$$

in $K$, ein Widerspruch.

Zu „$\Leftarrow$“: Sei umgekehrt $b = 0$, dann ist $a[+](i[\times]b) = a \in K$.

**(1.5)** Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

$$a[+](i[\times]b) = c[+](i[\times]d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \text{ und } b = d.$$

„$\Leftarrow$“ ist klar. Zu „$\Rightarrow$“: Seien $a, b, c, d \in K$ mit $a[+](i[\times]b) = c[+](i[\times]d)$, d.h.

$$0 = (a[+](i[\times]b))[+](-(c[+](i[\times]d))) = ((a-c)[+](i[\times](b-d))).$$

Da $0 \in K$, folgt aus **(1.4)**, dass $b - d = 0$, d.h. $b = d$. Dann ist aber auch $a - c = 0$, d.h. $a = c$.

**(1.6)** Finden Sie eine Bijektion $\Phi : C \to K[i]$, so dass für alle $x, y \in K[i]$ gilt:

$$\begin{aligned} x[+]y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \oplus \Phi^{-1}(y)); \\ x[\times]y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \otimes \Phi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\Phi((x, y)) = x[+](i[\times]y).$$

$\Phi$ ist surjektiv: Sei $z \in K[i]$ beliebig, dann besitzt $z$ nach **(1.3)** eine Darstellung $z = x[+](i[\times]y)$ für geeignete $x, y \in K$. Für $\vec{z} = (x, y)$ gilt somit: $\Phi(\vec{z}) = z$.

$\Phi$ ist injektiv, denn gelte $\Phi(\vec{z}_1) = \Phi(\vec{z}_2)$ mit $\vec{z}_1 = (x_1, y_1)$ und $\vec{z}_2 = (x_2, y_2)$, dann ist

$$x_1[+](i[\times]y_1) = x_2[+](i[\times]y_2),$$

nach **(1.4)** also $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, d.h. $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$.

Also ist $\Phi$ eine Bijektion.

Schließlich gelten für beliebige $z_1, z_2 \in K[i]$, $z_1 = x_1[+](i[\times]y_1)$, $z_2 = x_2[+](i[\times]y_2)$, dass

$$\begin{aligned} \Phi(\Phi^{-1}(z_1) \oplus \Phi^{-1}(z_2)) &= \Phi((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) \\ &= \Phi((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2)[+](i[\times](y_1 + y_2)) \\ &= (x_1[+](i[\times]y_1))[+](x_2[+](i[\times]y_2)) \\ &= z_1[+]z_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\Phi^{-1}(z_1) \otimes \Phi^{-1}(z_2)) &= \Phi((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)) \\ &= \Phi(((x_1 \times x_2) - (y_1 \times y_2), (x_1 \times y_2) + (y_1 \times x_2))) \\ &= ((x_1 \times x_2) - (y_1 \times y_2))[+](i[\times](x_1 \times y_2) + (y_1 \times x_2)) \\ &= (x_1[+](i[\times]y_1))[\times](x_2[+](i[\times]y_2)) \\ &= z_1[\times]z_2. \end{aligned}$$

**(1.7)** Gibt es mehrere Möglichkeiten, solch ein $\Phi$ zu definieren?

Man rechnet leicht nach, dass auch die Abbildungen $\Phi_1, \Phi_2 : C \to K[i]$ mit

$$\Phi_1(x, y) = x[+](-i[\times]y), \qquad \Phi_2(x, y) = \alpha[\times](x[+](i[\times]y))$$

($\alpha \in K[i] \backslash \{o\}$ beliebig) die gewünschten Eigenschaften haben.

---

Seien $\mathcal{K}_1 = (K_1, +_1, \times_1)$ und $\mathcal{K}_2 = (K_2, +_2, \times_2)$ zwei Körper. Wir nennen eine Bijektion $\Phi : K_1 \to K_2$ einen **Körperisomorphismus** zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$, falls für alle $x, y \in K_1$ gilt:

$$\Phi(x +_1 y) = \Phi(x) +_2 \Phi(y), \qquad \Phi(x \times_1 y) = \Phi(x) \times_2 \Phi(y), \qquad \Phi(e_1) = e_2.$$

**(1.8)** Beweisen Sie, dass es zwischen zwei Körpern $\mathcal{K}_1[i_1]$ und $\mathcal{K}_2[i_2]$ mit obigen Eigenschaften stets einen Körperisomorphismus gibt.

Wir betrachten die Bijektion aus **(1.6)**. Seien $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in C,\ z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$. Wegen

$$\begin{array}{rcccccc} \Phi(\vec{z}_1 \oplus \vec{z}_2) & = & \Phi(\Phi^{-1}z_1 \oplus \Phi^{-1}z_2) & = & z_1[+]z_2 & = & \Phi(\vec{z}_1)[+]\Phi(\vec{z}_2); \\ \Phi(\vec{z}_1 \otimes \vec{z}_2) & = & \Phi(\Phi^{-1}z_1 \otimes \Phi^{-1}z_2) & = & z_1[\times]z_2 & = & \Phi(\vec{z}_1)[\times]\Phi(\vec{z}_2) \end{array}$$

(mit $z_1 = x_1[+](i[\times]y_1),\ z_2 = x_2[+](i[\times]y_2)$) und

$$\Phi(\vec{e}) = \Phi(e, o) = e[+](i[\times]e) = e$$

ist $\Phi$ ein Körperisomorphismus zwischen $C$ und $K[i]$.

Seien also $\Phi_1 : C \to K_1[i_1]$ und $\Phi_2 : C \to K_2[i_2]$ diese Körperisomorphismen, dann definiert auch

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$$

einen Körperisomorphismus $\Psi : K_1[i_1] \to K_2[i_2]$ (wobei $\Phi_1^{-1} : K_1[i_1] \to C,\ x \mapsto \Phi_1^{-1}x$ die **inverse Abbildung** zu $\Phi_1$):

**Zur Injektivität:** Seien $x, y \in K_1[i_1]$ mit $\Psi(x) = \Psi(y)$, d.h. $\Phi_2(\Phi_1^{-1}x) = \Phi_2(\Phi_1^{-1}y)$. Da $\Phi_2$ injektiv, ist dann $\Phi_1^{-1}x = \Phi_1^{-1}y$. Wendet man $\Phi_1$ auf beide Seiten der Gleichung an, dann folgt $x = y$.

**Zur Surjektivität:** Sei $x \in K_2[i_2]$ beliebig. Definiere $y = \Phi_1(\Phi_2^{-1}x)$, dann ist $\Psi(y) = x$.

**Zu den Isomorphieeigenschaften:** Seien $x, y \in K_1[i_1]$, dann gelten

$$\begin{array}{rcl} \Psi(x[+_1]y) & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}(x[+_1]y)) \\ & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}(\Phi_1(\Phi_1^{-1}x \oplus \Phi_1^{-1}y))) \\ & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}x \oplus \Phi_1^{-1}y) \\ & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}x)[+_2]\Phi_2(\Phi_1^{-1}y) \\ & = & \Psi(x)[+_2]\Psi(y); \\ & & \\ \Psi(x[\times_1]y) & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}(x[\times_1]y)) \\ & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}(\Phi_1(\Phi_1^{-1}x \otimes \Phi_1^{-1}y))) \\ & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}x \otimes \Phi_1^{-1}y) \\ & = & \Phi_2(\Phi_1^{-1}x)[\times_2]\Phi_2(\Phi_1^{-1}y) \\ & = & \Psi(x)[\times_2]\Psi(y) \end{array}$$

und

$$\Psi(e) = \Phi_2(\Phi_1^{-1}(e)) = \Phi_2(\vec{e}) = e.$$

---

Ist speziell $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ der Körper der reellen Zahlen $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}})$, dann nennen wir $\mathcal{C}$ und jeden Körper, der zu $\mathcal{C}$ isomorph ist, den **Körper der komplexen Zahlen** $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \times_{\mathbb{C}})$.

Wir können $\mathcal{R}$ als Teilkörper von $\mathcal{C}$ auffassen via der **Einbettung** (d.h. injektiven Abbildung)

$$\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto (x, 0).$$

Die **komplexe Konjugation**

$$\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x, y) \mapsto (x, -y)$$

definiert einen Körperisomorphismus auf $\mathcal{C}$.

**Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes nichtkonstante Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \qquad (a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C})$$

besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

# 2 Modellierung

Unter einem **Spiel** verstehen wir eine Situation, die durch eine **Anfangskonstellation** gewisser Objekte und eine Reihe von **Regeln**, mit denen aus einer gegebenen Konstellation eine neue erreicht werden kann, charakterisiert wird. Ein **Zug** besteht aus der Anwendung genau einer dieser Regeln.

Wir wollen im Folgenden solche Spiele durch mathematische Objekte charakterisieren – eine solche Charakterisierung heißt ein **Modell** des Spiels. Modelle sind Tripel

$$M = (K, x^{\mathrm{anf}}, L),$$

bestehend aus einer Menge $K$ (aller Konstellationen), einem $x^{\mathrm{anf}} \in K$ (der Anfangskonstellation) und einer Menge $L$ von Funktionen $Z : K \to K$ (den Zügen), die jeder Konstellation $x \in K$ eine neue Konstellation $Z(x) \in K$ zuordnen, wobei $Z(x)$ diejenige Konstellation ist, die aus $x$ entsteht, wenn man den zu $Z$ gehörigen Zug durchführt.

Natürlich muss darauf geachtet werden, dass sich Züge und zugehörige Funktionen genau entsprechen, d.h. kann eine Konstellation $x$ durch Ausführung eines Zuges in eine Konstellation $y$ übergeführt werden, dann muss es eine Funktion $Z \in L$ geben mit $Z(x) = y$. Umgekehrt muss es zu jedem $x \in K$ und jedem $Z \in L$ einen Zug geben, so dass $Z(x)$ durch Anwendung dieses Zuges aus $x$ entsteht.

Die Menge der nach $n$ Zügen erreichbaren Konstellationen ist dann

$$E_n := \{x \in K \mid \exists Z_1, ..., Z_n \in L : x = (Z_n \circ \cdots \circ Z_1)(x^{\mathrm{anf}})\}.$$

Die Menge aller nach endlich vielen Zügen erreichbaren Konstellationen ist

$$E_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Big\{x \in K \mid \exists n \in \mathbb{N} : \exists Z_1, ..., Z_n \in L : x = (Z_n \circ \cdots \circ Z_1)(x^{\mathrm{anf}})\Big\}.$$

*Wir betrachten ein gewöhnliches Schachbrett, auf dem nur eine einzige Figur steht: Der linke weiße Läufer. Ein Zug ist natürlich eine Diagonalbewegung der Figur nach den üblichen Schachregeln, wobei es auch erlaubt ist, die Figur gar nicht zu bewegen.*

*Ist es möglich, diesen in endlich vielen Schritten auf das Feld links von seiner Startposition zu ziehen?*

**(2.1)** Modellieren Sie diese Situation, d.h. geben Sie ein mögliches Modell $M = (K, x^{\mathrm{anf}}, L)$ an.

**Lösung.** Wir wählen $K$ als die Menge aller Paare mit Einträgen aus $\{1, ..., 8\}$:

$$K := \{1, ..., 8\} \times \{1, ..., 8\} = \Big\{(i, j) \mid i, j \in \{1, ..., 8\}\Big\}.$$

Dabei ist ein $(i, j) \in K$ zu interpretieren als die Konstellation

*„Der Läufer steht auf dem Feld in der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte."*

Die Anfangskonstellation $x^{\mathrm{anf}} \in K$ wird dann modelliert durch

$$x^{\mathrm{anf}} = (8, 3).$$

Nun zu den Zügen: Sei $x \in K$ das Modell einer Konstellation, dann sei beispielsweise der Zug

*„Verschiebe die Figur um **2** Felder nach **l**inks **u**nten."*

modelliert durch

$$Z_{2,lu}(x)$$

oder allgemeiner:

$$\boxed{\text{„}Z_{k,l}(x) \text{ verschiebt die Figur diagonal um } k \in \{1, ..., 8\} \text{ Felder in Richtung } l \in \{ro, ru, lo, lu\}.\text{"}}$$

Wir müssen allerdings höllisch aufpassen, dass wir keine Modellfunktion $Z$ zulassen, die eine Figur über den Rand hinaus zieht.

Sei also $x = (i, j) \in K$. Wir definieren

$$Z_{k,ro}(x) \quad := \quad \begin{cases} (i-k, j+k) & \text{falls } i-k \geq 1 \text{ und } j+k \leq 8; \\ (i,j) & \text{sonst} \end{cases} ,$$

die Figur soll also gar nicht bewegt werden, falls der Zug „$k$ Felder diagonal nach rechts oben“ sie auf ein Feld außerhalb des Brettes führen würde. Entsprechend setzen wir

$$Z_{k,ru}(x) \quad := \quad \begin{cases} (i+k, j+k) & \text{falls } i+k \leq 8 \text{ und } j+k \leq 8; \\ (i,j) & \text{sonst} \end{cases} ,$$

$$Z_{k,lo}(x) \quad := \quad \begin{cases} (i-k, j-k) & \text{falls } i-k \geq 1 \text{ und } j-k \geq 1; \\ (i,j) & \text{sonst} \end{cases} ,$$

$$Z_{k,lu}(x) \quad := \quad \begin{cases} (i+k, j-k) & \text{falls } i+k \leq 8 \text{ und } j-k \geq 1; \\ (i,j) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da für jedes $(i, j) \in K$ und jedes $l \in \{ro, ru, lo, lu\}$ gilt $Z_{8,l}(i, j) = (i, j)$, ist der Zug *„Bewege die Figur überhaupt nicht“* ebenfalls enthalten (man kann sich überlegen, dass bereits die Funktionen $Z_{k,l}$ mit $k \in \{1, ..., 7\}$ und $l \in \{ro, ru, lo, lu\}$ alle Zugmöglichkeiten umfassen).

Sei nun

$$L \quad := \quad \{Z_{k,l} \mid k \in \{1, ..., 8\},\ l \in \{ro, ru, lo, lu\}\},$$

dann wird das oben beschriebene Spiel vollständig durch das Tripel

$$M = (K, x^{\mathrm{anf}}, L)$$

modelliert. □

> **(2.2)** Finden Sie geeignete Funktionen $Z_1, Z_2 \in L$, so dass $(Z_2 \circ Z_1)(x^{\mathrm{anf}})$ die Figur auf das Feld (2,1) befördert.
>
> Finden Sie weiter ein $Z \in L$, so dass $Z(Z(Z(Z(Z(x^{\mathrm{anf}})))))$ die Figur auf das Feld (3,8) befördert.

**Lösung.** Die einzige Möglichkeit, den Läufer von der Anfangsposition (8,3) aus in zwei Zügen auf das Feld (2,1) zu bewegen, besteht darin, ihn zwei Felder nach rechts oben und dann 4 Felder nach links oben zu ziehen.

Wähle also $Z_1 := Z_{2,ro}$ und $Z_2 := Z_{4,lo}$, dann gilt

$$\begin{aligned} (Z_2 \circ Z_1)(x^{\mathrm{anf}}) &= Z_{4,lo}(Z_{2,ro}(8, 3)) \\ &= Z_{4,lo}(8-2, 3+2) \\ &= Z_{4,lo}(6, 5) \\ &= (6-4, 5-4) \\ &= (2, 1). \end{aligned}$$

Man überlegt sich außerdem leicht, dass mit $Z$ nur die Modellfunktion des Zuges *„1 nach rechts, 1 nach oben“* gemeint sein kann, d.h. $Z := Z_{1,ro}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (Z \circ Z \circ Z \circ Z \circ Z)(x^{\mathrm{anf}}) &= (((((8-1)-1)-1)-1)-1, ((((3+1)+1)+1)+1)+1) \\ &= (8-5, 3+5) \\ &= (3, 8) \qquad ... \end{aligned}$$

Moment! Auch $Z := Z_{5,ro}$ führt zum Ziel, denn die Figur wird dann im ersten Zug schon auf das Feld (3,8) gezogen und bei wiederholter Anwendung von $Z$ ändert sich nichts mehr:

$$\begin{aligned} (Z \circ Z \circ Z \circ Z \circ Z)(x^{\mathrm{anf}}) &= (8-5, 3+5) \\ &= (3, 8). \end{aligned}$$

**(2.3)** Bestimmen Sie $E_n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $E_\infty$.

**Lösung.** Natürlich ist

$$E_0 \quad = \quad \{x^{\text{anf}}\} = \{(8,3)\}.$$

Außerdem überlegt man sich leicht:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(6,1);(7,2);(8,3);(7,4);(6,5);(5,6);(4,7);(3,8)\}; \\ E_2 &= \{(i,j) \in K \mid \text{Par}(i) \neq \text{Par}(j)\} = \{(i,j) \in K \mid \text{Par}(i+j) = u\}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\text{Par} : \mathbb{Z} \to \{g,u\}$ die **Paritätsfunktion**

$$\text{Par}(z) \quad := \quad \begin{cases} g & \exists z_0 \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot z_0 \\ u & \text{sonst} \end{cases} \qquad (z \in \mathbb{Z}),$$

d.h. für ein $z \in \mathbb{Z}$ ist $\text{Par}(z) = g$ genau dann, wenn $z$ gerade ist.

Wir zeigen per Induktion, dass für alle $n \geq 2$ gilt $E_n = E_2$; insbesondere ist dann auch $E_\infty = E_2$.

***Induktionsanfang:***

Für $n = 2$ ist nichts zu zeigen.

***Induktionsschritt:***

Gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, dass $E_n = E_2$. Wir müssen zeigen, dass auch $E_{n+1} = E_2$.

Offenbar ist $E_{n+1} \supseteq E_n$, denn sei $x \in E_n$, dann ist $x \in E_{n+1}$, da es erlaubt ist, die Figur nicht von ihrer Position wegzubewegen.

Sei also umgekehrt $x = (i_x, j_x) \in E_{n+1}$. Wir zeigen, dass $\text{Par}(i_x + j_x) = u$, d.h. $x \in E_n$.

Wegen $x \in E_{n+1}$ existieren ein $y = (i_y, j_y) \in E_n$ (insbesondere $\text{Par}(i_y + j_y) = u$) und ein $Z \in L$, so dass $x = Z(y)$. Dann existiert ein $k \in \{0, ..., 8\}$ mit

$$(i_x, j_x) \in \{(i_y + k, j_y - k), (i_y + k, j_y + k), (i_y - k, j_y - k), (i_y - k, j_y + k)\};$$

also

$$i_x + j_x \in \{i_y + j_y, i_y + j_y + 2k, i_y + j_y - 2k\};$$

in jedem Fall ist $\text{Par}(i_x + j_x) = u$.

Damit gilt auch $E_{n+1} \subseteq E_n$, insgesamt also $E_{n+1} = E_n$. □

**(2.4)** Beweisen Sie, dass die oben beschriebene Endkonstellation $x^{\text{end}} = (8,2)$ nicht erreichbar ist.

**Lösung.** Nach **(2.3)** gilt für jede nach endlich vielen Zügen erreichbare Konstellation $(i,j) \in E_\infty$:

$$\text{Par}(i+j) = u.$$

Für die Endkonstellation $x^{\text{end}} = (i^{\text{end}}, j^{\text{end}}) = (8,2)$ ist hingegen

$$\text{Par}(i^{\text{end}} + j^{\text{end}}) = \text{Par}(8+2) = g,$$

also ist $x^{\text{end}} \notin E_\infty$. □

# 3 Invariantenmethoden

Unsere Aufgabe wird es im Folgenden sein, bei verschiedenen Spielen durch Ausführen endlich vieler Züge von der Anfangskonstellation aus eine bestimmte Endkonstellation zu erreichen – oder zu beweisen, dass dies nicht möglich ist.

Als besonders nützlich erweist es sich in letzterem Fall, nach einer **Invarianten** zu suchen, d.h. nach einer Funktion $F$, die jeder Konstellation einen bestimmten Wert zuordnet und für die gelten:

(1) $F$ ist auf der Menge der *erreichbaren* Konstellationen konstant, d.h. $\forall x \in E_\infty : F(x) = F(x^{\text{anf}})$;

(2) Die Funktionswerte der Anfangs- und der Endkonstellation sind verschieden, d.h. $F(x^{\text{anf}}) \neq F(x^{\text{end}})$.

In dem Fall ist es dann offenbar nicht möglich, die Endkonstellation in endlich vielen Zügen zu erreichen.

Im vorigen Beispiel **(2.4)** wäre eine geeignete Invariante die Funktion $F : K \to \{u, g\}$ mit

$$\forall x = (i, j) \in K : x \mapsto F(x) := \text{Par}(i + j),$$

denn dann sind $F(x) = F(x^{\text{anf}}) = u$ für alle $x \in E_\infty$ und $F(x^{\text{end}}) = g$.

**(3.1)** Betrachten wir ein üblich gefärbtes, $8 \times 8$-Schachbrett. Man kann in einem Zug alle Felder einer Zeile umfärben, alle Felder einer Spalte umfärben oder vier Felder, die ein $2 \times 2$-Quadrat bilden, umfärben (*Umfärben* bedeutet dabei, die schwarzen Felder weiß zu färben und die weißen Felder schwarz).

Kann man nach endlich vielen Zügen erreichen, dass ein Feld schwarz ist und alle anderen weiß sind?

**Lösung.** Durch fleißiges Ausprobieren finden wir nach einiger Zeit ein Muster in allen von uns erreichten Konstellationen: Die Anzahl der schwarzen und der weißen Felder scheint immer gerade zu bleiben ... Wenn wir dies formal beweisen können, ist die Endkonstellation, dass genau ein Feld schwarz ist, offensichtlich nicht erreichbar.

Zunächst wählen den **Raum $K$ aller möglichen Konstellationen**. Da eine Konstellation vollständig dadurch charakterisert ist, welche der Schachbrettfelder schwarz sind und welche weiß, können wir beispielsweise $K$ definieren als die Menge

$$K := \{w, s\}^{8\times 8} := \left\{ (a_{ij})_{1\le i\le 8}^{1\le j\le 8} \mid \forall i, j \in \{1, ..., 8\} : a_{ij} \in \{w, s\} \right\},$$

d.h. als die Menge aller $8 \times 8$-Matrizen, deren Einträge aus den Symbolen $w$ und $s$ bestehen. Dabei interpretieren wir die Formel

$$a_{ij} = w$$

natürlich als:

*„Das Feld in der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte des Brettes ist weiß.“*

Die **Anfangskonstellation** ist dann gegeben durch die Matrix $A^{\text{anf}} = (a_{ij}^{\text{anf}})_{1\le i\le 8}^{1\le j\le 8}$ mit

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\text{anf}} &:= \begin{cases} w & i \text{ und } j \text{ sind beide gerade oder ungerade} \\ s & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} w & \text{Par}(i+j) = g \\ s & \text{Par}(i+j) = u \end{cases} . \end{aligned}$$

Als **Züge** definieren wir für $h \in \{1, ..., 8\}$

$$[Z_{\cdot,h}(A)]_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & j \neq h \\ w & j = h \text{ und } a_{ij} = s \\ s & j = h \text{ und } a_{ij} = w \end{cases} ;$$

$$[Z_{h,\cdot}(A)]_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i \neq h \\ w & i = h \text{ und } a_{ij} = s \\ s & i = h \text{ und } a_{ij} = w \end{cases}$$

und für $k, l \in \{1, ..., 7\}$

$$[Z_{k,l}(A)]_{ij} \quad := \quad \begin{cases} a_{ij} & i \notin \{k, k+1\} \text{ und } j \notin \{l, l+1\} \\ w & (i \in \{k, k+1\} \text{ oder } j \in \{l, l+1\}) \text{ und } a_{ij} = s \\ s & (i \in \{k, k+1\} \text{ oder } j \in \{l, l+1\}) \text{ und } a_{ij} = w \end{cases} .$$

Dabei modellieren $Z_{\cdot,h}$ natürlich das Umfärben der $h$-ten Spalte, $Z_{h,\cdot}$ das der $h$-ten Zeile und $Z_{k,l}$ das des $2 \times 2$-Blockes $(k,l),\ (k,l+1),\ (k+1,l),\ (k+1,l+1)$.

Die Endkonstellation $A^{\text{end}}$ liegt in der Menge

$$\{A \in K \mid \exists! i \in \{1, ..., 8\} : \exists! j \in \{1, ..., 8\} : a_{ij} = s\},$$

dabei steht „$\exists!$" für *„es gibt genau ein"*:

$$\exists! x \in m : E(x) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists x \in m : E(x) \text{ und } \forall y \in m : (E(y) \Rightarrow y = x).$$

Schließlich definieren wir unsere **Invariante** $F : K \to \{g, u\}$ durch

$$\forall A \in K : A \mapsto F(A) := \text{Par}(\#\{(i,j) \in \{1, ..., 8\}^2 \mid a_{ij} = w\}).$$

d.h. $F(A) = g$, falls die Anzahl der weißen Felder der zu $A$ gehörigen Matrix gerade ist, andernfalls ist $F(A) = u$. Dann sind $F(A^{\text{anf}}) = 0$ und $F(A^{\text{end}}) = 1$. Wir zeigen per Induktion über $n$, dass $F(A) = g$ für alle $A \in E_n$.

***Induktionsanfang:***

Nach $n = 0$ Zügen ist $F(A) = g$ für alle $A \in E_n$, da die Menge der nach 0 Schritten erreichbaren Konstellationen gerade $E_0 = \{A^{\text{anf}}\}$ ist und $F(A^{\text{anf}}) = \text{Par}(32) = g$.

***Induktionsschritt:***

Wir nehmen an, die Behauptung gilt für ein $n$, d.h. $F(A) = g$ für alle $A \in E_n$.

Sei nun $A \in E_{n+1}$, d.h. $A$ ist durch Anwendung eines Zuges aus einer Matrix $A' \in E_n$ entstanden. Seien unter den vier bzw. acht Feldern von $A'$, die im $n+1$-ten Schritt umgefärbt werden, $x$ weiße und $y$ schwarze Felder. Dann ist $x + y = 4$ bzw. $x + y = 8$, in jedem Fall also gerade. Ergo sind entweder sowohl $x$ als auch $y$ gerade oder $x$ und $y$ sind beide ungerade. Nach Umfärbung sind $y$ Felder schwarz und $x$ Felder weiß; da nach wie vor $x + y$ gerade ist, bleiben $x, y$ gerade, wenn sie vor der Umfärbung gerade waren, und bleiben ungerade, wenn sie vor der Umfärbung ungerade waren. Die Gesamtanzahl der schwarzen bzw. weißen Felder bleibt somit auch nach dem $n+1$-ten Zug gerade, unabhängig davon, welchen der drei möglichen Züge wir auf welche Zeile, welche Spalte oder welches $2 \times 2$-Feld angewendet haben! Also ist $F(A) = g$ für alle $A \in E_{n+1}$.

**Formal:** Sei $A = Z(A')$ für ein $Z \in L$.

Wir nehmen zunächst an, dass $Z = Z_{\cdot,h}$ für ein $h \in \{1, ..., 8\}$. Setze

$$x_1 := \#\{(i,j) \mid j \neq h,\ a'_{ij} = w\} \qquad \text{und} \qquad x_2 := \#\{i \mid a'_{ih} = w\},$$

wobei $\#M$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge $M$ bezeichnet.

Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $\text{Par}(x_1 + x_2) = g$.

Seien weiter

$$x_3 := \#\{(i,j) \mid j \neq h,\ a_{ij} = w\} \qquad \text{und} \qquad x_4 := \#\{i \mid a_{ih} = w\},$$

dann gelten

$$x_3 = x_1 \qquad \text{sowie} \qquad x_4 = \#\{i \mid a'_{ih} = s\} = 8 - x_2,$$

also

$$F(A) = \text{Par}(x_3 + x_4) = \text{Par}(x_1 + 8 - x_2) = g.$$

Die Fälle $Z = Z_{h,\cdot}$ $(h \in \{1, ..., 8\})$ und $Z = Z_{k,l}$ $(k, l \in \{1, ..., 7\})$ behandelt man analog. $\square$

**(3.2)** In jedem Feld eines $3 \times 3$-Schachbretts sitzt ein Käfer. Ein Zug besteht daraus, dass alle Käfer gleichzeitig von ihrem Feld aus in ein benachbartes Feld wechseln (nach links, rechts, oben oder unten).

Ist es möglich, dass sich nach dem ersten Wechsel in jedem Feld genau ein Käfer befindet?

**Lösung.** Nach einem Zug haben sowohl die vier Käfer, die auf den Eckpositionen sitzen, als auch der Käfer in der Mitte auf die Mittelpositionen am Rand gewechselt. Da es nur vier Mittelpositionen gibt, muss eine doppelt besetzt sein.

**Formal:** Wir nummerieren die Felder zeilenweise von eins bis neun durch:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Die Menge $K$ der möglichen Konstellationen definieren wir als

$$K = \left\{ (a_i)_{1 \le i \le 9} \mid \forall i \in \{1, ..., 9\} : a_i \in \{0, ..., 9\} \right\},$$

d.h. $K$ ist die Menge der geordneten 9-Tupel mit Einträgen $0, ..., 9$, wobei wir

$$a_i = x$$

lesen als

*„Im Feld $i$ sitzen $x$ Käfer.“*

Dann sind die Anfangskonstellation $a^{\text{anf}}$ und die Endkonstellation $a^{\text{end}}$ offenbar

$$a^{\text{anf}} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = a^{\text{end}}.$$

Anstatt die Zugfunktionen $Z : K \to K$ **explizit**, d.h. durch ihre Zuordnungsvorschriften, anzugeben (was in diesem Fall ziemlich technisch und aufwendig wäre), suchen wir nach gewissen Eigenschaften, die alle Zugfunktionen besitzten müssen.

Beispiele für solche **implizit** definierten Funktionen sind etwa die Umkehrabbildung einer bijektiven Funktion $f : A \to B$, die definiert ist als $f^{-1} : B \to A$,

$$\forall b \in B : b \mapsto f^{-1}(b) := \text{dasjenige } a \in A \text{ mit } f(a) = b$$

oder die Determinante $\det_n : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, gegeben als diejenige eindeutige Abbildung, die multilinear, alternierend und normiert ist.

Wie bereits festgestellt, wechselt in einem beliebigen Zug jeder Käfer, der auf einem Feld mit gerader Nummer sitzt, auf ein Feld mit ungerader Nummer und umgekehrt, d.h. die Gesamtzahl aller Käfer, die nach dem Zug auf einem Feld mit ungerader Nummer sitzen, ist gleich der Gesamtzahl aller Käfer auf einem Feld mit gerader Nummer vor dem Zug und umgekehrt:

$$\forall a \in K : \qquad \sum_{\text{Par}(i)=u} Z(a)_i = \sum_{\text{Par}(i)=g} a_i, \qquad \sum_{\text{Par}(i)=g} Z(a)_i = \sum_{\text{Par}(i)=u} a_i.$$

Dabei lesen wir die Summen als

$$\sum_{\text{Par}(i)=u} a_i := \sum_{\substack{\{i \in \{1,...,9\} \\ \text{Par}(i)=g\}}} a_i \text{ u.s.w.}$$

Definieren wir nun $F : K \to \{g, u\}$ als

$$\forall a \in K : a \mapsto F(a) := \text{Par}\left( \sum_{\text{Par}(i)=g} a_i \right) = \text{Par}(a_2 + a_4 + a_6 + a_8),$$

dann ist $F(a^{\text{end}}) = \text{Par}(4) = g$, wohingegen für jeden Zug $Z$ gilt

$$F(Z(a^{\text{anf}})) = \text{Par}\left( \sum_{\text{Par}(i)=g} Z(a_i^{\text{anf}}) \right) = \text{Par}\left( \sum_{\text{Par}(i)=u} a_i^{\text{anf}} \right) = \text{Par}(5) = u,$$

d.h. $F$ ist eine Invariante des Modells und die Endkonstellation $a^{\text{end}}$ damit nicht erreichbar. $\square$

**(3.3)** Max und Moritz zerreißen die Schulordnung. Max zerreißt jedes Stück, das ihm in die Hände fällt, in drei Fetzen, Moritz in Fünf. Als der Lehrer Lempel die Lausbuben erwischt, verlangt er, die Schulordnung wieder zusammenzukleben. Widerwillig fügen sich die beiden der Anweisung. Zusammen finden sie einhundert Papierfetzen.

Kann die zusammengeklebte Schulordnung vollständig sein?

**Lösung.** Wir setzen $K := \mathbb{N}$ und lesen $x \in K$ als *„Die Schulordnung ist in $x$ Fetzen zerrissen.“*
Dann ist die Anfangskonstellation $x^{\text{anf}} = 1$ und die Menge der Züge ist $L = \{Z_1, Z_2\}$ mit

$$Z_1 : K \to K,\ x \mapsto Z_1(x) := x + 2, \qquad Z_2 : K \to K,\ x \mapsto Z_2(x) := x + 4.$$

Weiter definieren wir unsere potenzielle Invariante $F : K \to \{g, u\}$ als $x \mapsto F(x) := \operatorname{Par}(x)$. Wir zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in E_n : F(x) = u.$$

Da $F(x^{\text{end}}) = \operatorname{Par}(100) = g$, folgt daraus, dass die Schulordnung unvollständig sein muss.

***Induktionsanfang:***

Im Fall $n = 0$ ist $F(x) = \operatorname{Par}(1) = u$ für alle $x \in E_n$, da $E_0 = \{1\}$: Anfänglich besteht die Schulordnung aus einem Stück.

***Induktionsschritt:***

Sei $x \in E_{n+1}$, dann gibt es ein $x' \in E_n$, so dass $x$ nach einem Zug aus $x'$ entsteht. Nach Induktionsvoraussetzung ist $F(x') = u$, d.h. $x'$ ist ungerade. Ein Zug besteht darin, $x'$ um zwei oder vier zu erhöhen, d.h. $x = x' + 2$ oder $x = x' + 4$. In jedem Fall ist also auch $x$ ungerade, d.h. $F(x) = u$. □

**(3.4)** An einem Öbstebaum im Paradies hängen fünfundzwanzig Äpfel und fünfundzwanzig Bananen. Pro Stunde suchen Adam und Eva den Baum auf und pflücken gemeinsam zwei Früchte. Plücken sie zwei Früchte der gleichen Sorte, wächst ein Apfel nach. Pflücken sie dagegen zwei Früchte verschiedener Sorten, wächst eine Banane nach. Die beiden bedienen sich so lange am Baum, bis nur noch eine Frucht übrig ist.

Handelt es sich um eine Banane oder um einen Apfel?

**Lösung.** Die Anzahl der Bananen bleibt immer gerade. Folglich muss auch eine Banane übrig bleiben.

Wir definieren $K := \mathbb{N}^2$, wobei wir $(a, b) \in K$ lesen als *„Am Baum hängen $a$ Äpfel und $b$ Bananen“*, und bezeichnen wie üblich mit $E_\infty$ die Menge der Paare $(a, b) \in K$, die nach endlich oftem Pflücken am Baum hängen können. Weiter definieren wir die möglichen Züge $Z_{AA} = Z_{AB}$ und $Z_{BB}$ als

$$Z_{AA}(a,b) := \begin{cases} (a-1, b) & a \geq 1 \\ (a, b-2) & a = 0 \text{ und } b \geq 2 \\ (a, b) & a = 0 \text{ und } b \in \{0,1\} \end{cases} \quad ; \quad Z_{BB}(a,b) := \begin{cases} (a, b-2) & b \geq 2 \\ (a-1, b) & b \in \{0,1\} \text{ und } a \geq 1 \\ (a, b) & b \in \{0,1\} \text{ und } a = 0 \end{cases},$$

die Anfangskonstellation ist $(a^{\text{anf}}, b^{\text{anf}}) = (25, 25)$ und $F : K \to \{g, u\}$ definieren wir als

$$F((a, b)) := \operatorname{Par}(b).$$

Wir zeigen per Induktion, dass $F((a, b)) = u$ für alle $(a, b) \in E_\infty$.

***Induktionsanfang:***

Sei $n = 0$. Es ist $F((a, b)) = u$ für alle $(a, b) \in E_0 = \{(25, 25)\}$: Nach 0 Schritten hängen 25 Äpfel und 25 Bananen am Öbstebaum.

***Induktionsschritt:***

Sei $(a', b') \in E_n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $b$ ungerade, denn $F((a', b')) = u$. Anwendung eines der drei Pflückzüge $Z_{AA}, Z_{AB}, Z_{BB}$ ergibt die neue Konstellation $(a' - 1, b')$ (wenn zwei Äpfel gepflückt wurden), $(a' + 1, b' - 2)$ (wenn zwei Bananen geplückt wurden) oder $(a' - 1, b')$ (wenn ein Apfel und eine Banane gepflückt wurden). Also ist in jedem Fall auch nach dem $n + 1$-ten Zug die Anzahl der Bananen ungerade, d.h. $F((a, b)) = u$ für alle $(a, b) \in E_{n+1}$. □

**(3.5)** An einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, ..., 137$. In jedem Schritt darf man zwei beliebige Zahlen wegwischen und statt dessen die Summe der beiden weggewischten Zahlen anschreiben. Wir führen so viele Schritte durch, bis nur noch eine Zahl übrig ist.

Welche Werte kann diese letzte Zahl annehmen?

**Lösung.** Sei $K \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $E_n \subseteq K$ enthalte die Mengen der möglichen Zahlen, die nach $n$ Schritten an der Tafel stehen (wobei natürlich $n \leq 136$). Wir zeigen per Induktion, dass die Funktion $F : K \to \mathbb{N}$ mit

$$\forall X \in K : F(X) := \sum_{x \in X} x$$

eine Invariante des Spiels ist, genauer: $F(X) = 9.453$ für alle $X \in E_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

***Induktionsanfang:***

Sei $n = 0$. Dann ist

$$F(X) = 1 + 2 + \cdots + 137 = \frac{137 \cdot 138}{2} = 9.453$$

(kriegen Sie das noch ohne Taschenrechner hin? Kopfrechenen oder schriftliches Multiplizieren ...).

***Induktionsschritt:***

Nach dem $n$-ten Schritt sei $X'$ die Menge der an der Tafel stehenden Zahlen und die Gesamtsumme und die Gesamtsumme aller Elemente aus $X'$ betrage 9.453. Seien $a, b$ zwei der darunter befindlichen Zahlen, die wir im $n+1$-ten Zug durch $a+b$ ersetzen wollen. Die so entstehende Menge der verbleibenden Zahlen $X$ ist somit

$$X = (X' \backslash \{a, b\}) \cup \{a + b\},$$

also

$$F(X) = F(X') - a - b + (a + b) = F(X') = 9.453.$$

Also ist die letzte an der Tafel verbleibende Zahl in jedem Fall 9.453.

Eine explizite Modellierung der Zugfunktionen gestaltet sich hier als etwas schwierig: Setzen wir etwa

$$Z : K \to K, \ A = \{a_1, ..., a_m\} \mapsto Z(A) := \{a_1 + a_2, a_3, ..., a_m\} \qquad (m \geq 2),$$

dann ist $Z$ nicht wohldefiniert: Sei beispielsweise $A = A^{\text{anf}} = \{1, ..., 137\}$, dann ist

$$Z(A) = Z(\{1, 2, 3, ..., 157\}) = \{3, 4, ..., 137\} \neq \{2, 4, 5, ..., 137\} = Z(\{3, 1, 2, ..., 137\}) = Z(A);$$

außerdem können Zahlen – wie auch in diesem Beispiel – mehrfach an der Tafel stehen, was in den Modellmengen nicht berücksichtigt wird.

Wir setzen daher

$$\tilde{K} := \{(a_1, ..., a_m) \mid m \leq 137, \ a_1, ..., a_m \in \mathbb{N}\}$$

und definieren eine Relation $\sim$ auf $K$:

$$(a_1, ..., a_m) \sim (b_1, ..., b_m) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, ..., m\} : \exists! j(i) \in \{1, ..., m\} : a_i = b_{j(i)},$$

d.h. zwei Elemente aus $K$ sollen in Relation zueinander stehen, wenn sie genau die gleichen Einträge in gleicher Häufigkeit enthalten. $\sim$ ist dann eine **Äquivalenzrelation**, d.h. für alle $A, B, C \in \tilde{K}$ gelten:

$$A \sim A, \qquad A \sim B \Rightarrow B \sim A, \qquad (A \sim B \text{ und } B \sim C) \Rightarrow A \sim C.$$

Definieren wir zu $A \in \tilde{K}$ noch die **Äquivalenzklasse**

$$[A]_\sim := \{B \in \tilde{K} \mid B \sim A\},$$

dann können wir $K$ wählen als

$$K := \tilde{K}/_\sim := \{[A]_\sim \mid A \in \tilde{K}\}.$$

Seien nun $i, j \in \{1, ..., 137\}$ mit $i \neq j$, $A = (a_1, ..., a_m) \in \tilde{K}$ und $(b_1, ..., b_m) \sim (a_1, ..., a_m)$ mit $b_k \leq b_{k+1}$ für alle $k = 1, ..., m-1$, dann setzen wir

$$Z_{ij}([(a_1, ..., a_m)]_\sim) := \begin{cases} \left[(b_i + b_j, b_k)_{k \in \{1,...,m\} \setminus \{i,j\}}\right]_\sim & \max\{i,j\} \leq m \\ \left[(b_1 + b_2, b_k)_{k \in \{3,...,m\}}\right]_\sim & \max\{i,j\} > m,\ m \geq 2 \\ [(b_1)]_\sim & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$M = \{K, A^{\mathrm{anf}}, \{Z_{ij} \mid i, j \in \{1, ..., 137\},\ i \neq j\}\}$$

ein Modell dieses Spiels. □

**(3.6)** Wir betrachten eine neue Schachfigur, die in jedem Zug auf ein Nachbarfeld wechselt und dann drei Schritte orthogonal dazu weiterläuft. Die Figur startet links oben.

Ist es der Figur möglich, nach endlich vielen Schritten auf das Feld rechts von ihrer Startposition zu wechseln?

**Lösung.** Man überlegt sich leicht, dass die Figur stets auf einem schwarzen Feld landet, wenn sie auf einem schwarzen Feld gestartet ist. Nummerieren wir die Felder des Brettes zeilenweise von 1 bis 64 so durch, dass das schwarze Feld links oben die Ziffer 1 hat, dann sind die schwarzen Felder gerade die ungeraden; insbesondere ist das Startfeld ungerade und das Zielfeld gerade. Seien $K = \{1, ..., 64\}$ und $E_n \subseteq K$ die Menge aller Feldnummern, auf denen die Figur nach dem $n$-ten Zug stehen kann. Weiter sei wieder $F(x) = \mathrm{Par}(x)$, dann ist $F(x) = 1$ für alle $x \in E_0 = \{1\}$ und $F(x) = 0$ für alle $x$, die nach Durchführung eines Zuges aus einem $x'$ mit $F(x') = 1$ entstanden sind (Induktion!). Also ist $F(x) = 1$ für alle $x \in E_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Figur kann niemals auf dem linken Nachbarfeld des Startfeldes landen. □

**(3.7)** Kann ein gewöhnliches Schachpferd von seiner Startposition aus jedes Feld des Brettes nach endlich vielen Schritten erreichen?

**Lösung.** Diese Frage lässt sich zur Abwechslung positiv beantworten. Wir betrachten Œ das Pferd, das auf dem Feld (1,2) startet (aus Symmetriegründen funktioniert die folgende Argumentation für die anderen drei Pferde analog). Wir überlegen uns zunächst, wie wir die umliegenden Felder (1,1), (1,3), (2,1), (2,2) und (2,3) erreichen können:

$$\begin{cases} (1,2) & \mapsto & (3,3) & \mapsto & (1,4) & \mapsto & (2,2) \\ (1,2) & \mapsto & (2,4) & \mapsto & (3,2) & \mapsto & (1,3) \\ (1,3) & \mapsto & (2,1) & & & & \\ (2,1) & \mapsto & (4,2) & \mapsto & (2,3) & & \\ (2,3) & \mapsto & (1,1) & & & & \end{cases}.$$

Im ersten Moment könnte man annehmen, dass wir damit fertig sind, weil wir uns mit den selben Zügen dann auch zu den Nachbarfeldern der Nachbarfelder von (1,2) vorarbeiten können u.s.w., aber Vorsicht: Um auf diese Weise beispielsweise von (7,2) nach (8,2) zu gelangen, würden wir über das Feld (10,3) ziehen ... und das befindet sich nicht innerhalb des Schachbretts.

Ausgehend von den sechs bis jetzt zur Verfügung stehenden Positionen erreichen wir durch Anwendung allein der ersten Zugkombination iterativ die folgenden Felder:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $x$ | | | | | |
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| | | | | | | | |

Offensichtlich lässt sich jedes verbleibende Feld nun durch einen einzigen Zug von einer mit einem $x$ gekennzeichneten Position aus erreichen. □

# 4 Antiinvariantenmethoden

Im Gegensatz zu einer Invariante ist eine **Antiinvariante** eine Funktion, die sich nach *jedem* Zug ändert, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A' \in E_n,\ A \in E_{n+1}$ gilt $F(A') \neq F(A)$. Von Interesse sind beispielsweise Antiinvarianten, deren Funktionswerte in $\mathbb{N}$ liegen und immer kleiner werden: Mit solchen kann nachgewiesen werden, dass ein Prozess nach endlich vielen Schritten zum Stillstand kommen muss.

**(4.1)** Jeder von $n$ Abgeordneten in einem Parlament hat höchstens drei Feinde, wobei Feindschaften immer in beide Richtungen gelten: Ist ein Abgeordneter der Feind eines anderen, dann auch umgekehrt.

Kann man die Abgeordneten so auf zwei Häuser aufteilen, dass jeder Abgeordnete in seinem Haus höchstens einen Feind hat?

**Lösung.** Im ersten Moment könnte man annehmen, dass man nur jeden Abgeordneten, der in seinem Haus mehr als einen Feind hat, in das andere Haus umsetzen muss, wo er ja höchstens einen Feind haben kann. Dabei ist aber folgendes zu beachten: Hat ein Abgeordneter $A_1$ aus Haus 1 die Feinde $A_2$ und $A_3$ in Haus 1 und $A_4$ in Haus 2 und sind zudem die Abgeordneten $A_5$ und $A_6$ Feinde von $A_2$, dann würden sowohl $A_1$ als auch $A_2$ in Haus 2 wechseln – und dann hätte $A_1$ zwei Feinde in Haus 2. Es ist also a priori nicht klar, dass dieser Prozess irgendwann zum Stillstand kommt, ein Abgeordneter also nicht immer wieder das Haus wechselt.

Bezeichnen dazu $f_1, f_2$ die Summen der verfeindeten Paare von Abgeordneten in Haus 1 bzw. 2 und $F = f_1 + f_2$ die Gesamtzahl an Feindschaften in beiden Häusern. Dann ist $F$ eine Antiinvariante: Bei jedem Wechsel eines Abgeordneten, der in seinem Haus mindestens zwei Feinde hat, in das andere Haus verkleinert sich $F$ um mindestens 1. Der Prozess kommt also nach spätestens $n$ Schritten zum Stillstand, wobei $n$ die anfängliche Anzahl an Feindschaften bezeichnet.

**Modell.** Bezeichnen $A_1, ..., A_n$ die $n$ Abgeordneten des Parlaments. Wir fassen Konstellationen $H \in K$ auf als Paare $H = (H_1, H_2)$ von Mengen $H_1, H_2 \subseteq A := \{A_1, ..., A_n\}$ mit $H_1 \cup H_2 = A$ und $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, d.h. $H_1, H_2$ sind die Mengen der Abgeordneten in Haus 1 bzw. 2. Eine Anfangskonstellation ist nicht vorgegeben, wir setzen etwa $H^{\text{anf}} := (A, \emptyset)$.

Die Funktion $S : A \times A \to \{\text{freund}, \text{feind}\}$ beinhalte die (gegebenen) Informationen über alle Feindschaften zwischen den Abgeordneten:

$$S(A_i, A_j) := \begin{cases} \text{feind} & A_i \text{ ist ein Feind von } A_j \\ \text{freund} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Weiter definieren wir zu einer Konstellation $H = (H_1, H_2) \in K$ die Menge der Nummern der Abgeordneten in Haus 1 bzw. 2, die dort mindestens zwei Feinde haben:

$$F_1(H) := \left\{ i \in \{1, ..., n\} \;\middle|\; \begin{array}{c} A_i \in H_1 \text{ und } \exists i_1, i_2 \in \{1, ..., n\} : i_1 \neq i_2,\ A_{i_1}, A_{i_2} \in H_1 \\ \text{und } S(A_i, A_{i_1}) = \text{feind},\ S(A_i, A_{i_2}) = \text{feind} \end{array} \right\};$$

$$F_2(H) := \left\{ i \in \{1, ..., n\} \;\middle|\; \begin{array}{c} A_i \in H_2 \text{ und } \exists i_1, i_2 \in \{1, ..., n\} : i_1 \neq i_2,\ A_{i_1}, A_{i_2} \in H_2 \\ \text{und } S(A_i, A_{i_1}) = \text{feind},\ S(A_i, A_{i_2}) = \text{feind} \end{array} \right\}.$$

Sorge nun $\Phi : K \to K$ für den Wechsel eines Abgeordneten mit zwei Feinden in seinem Haus in das andere Haus:

$$\Phi((H_1, H_2)) := \begin{cases} (H_1 \backslash \{A_i\}, H_2 \cup \{A_i\}) & F_1 \neq \emptyset,\ i = \min F_1 \\ (H_1 \cup \{A_i\}, H_2 \backslash \{A_i\}) & F_1 = \emptyset,\ F_2 \neq \emptyset,\ i = \min F_2 \\ (H_1, H_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien schließlich $H^m := \Phi^m(H^{\text{anf}}) = (\Phi \circ \cdots \circ \Phi)(H^{\text{anf}})$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. Wir zeigen, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $H^m$ ein **Fixpunkt** von $\Phi$ ist, d.h. $\Phi(H^m) = H^m$. Da $\Phi$ eine Konstellation nur dann nicht ändert, wenn kein Abgeordneter in keinem der beiden Häuser mehr als einen Feind hat, ist $H^m$ dann eine Lösung des Problems.

Sei $F : K \to \mathbb{N}_0$ definiert als

$$\forall H = (H_1, H_2) \in K : F(H) := f_1(H_1) + f_2(H_2) := \sum_{i \in F_1(H)} 1 + \sum_{i \in F_2(H)} 1 = \#F_1(H) + \#F_2(H).$$

Dann ist $0 \leq F(H) \leq m$ für alle $H \in K$ und für jedes $H \in K$ mit $\Phi(H) \neq H$ gilt

$$F(\Phi(H)) \leq f_1(H_1) - 2 + f_2(H_2) + 1 = F(H) - 1,$$

da ein Abgeordneter via $\Phi$ sein Haus verlassen hat, in welchem er mindestens zwei Feinde hatte (was die Gesamtzahl der Feinde um mindestens zwei verringert) und in seinem neuen Haus höchstens einen Feind hat (was die Gesamtzahl der Feinde um höchstens eins erhöht).

Wären nun alle $H^1, ..., H^{n+1}$ keine Fixpunkt von $\Phi$, dann wäre

$$0 < F(H^n) = F(\Phi^n(H^{\text{anf}})) \leq F(H^{\text{anf}}) - \sum_{i=1}^{n} 1 = F(H^{\text{anf}}) - n \leq 0,$$

ein Widerspruch. □

**(4.2)** In einem Parlament sitzen $2n$ Abgeordnete, von denen jeder höchstens $n-1$ Feinde hat.

Ist es möglich, die Abgeordneten so an einen runden Tisch zu setzen, dass keine zwei Feinde nebeneinander sitzen?

**Lösung.** Wenn es einen Abgeordneten $A_1$ gibt, der neben einem Feind sitzt, dann gibt es mindestens ein Paar $(A_2, A_3)$ von Abgeordneten, die mit $A_1$ befreundet sind und die nebeneinander sitzen, da $A_1$ unter den $2n-1$ anderen Abgeordneten höchstens $n-1$ Feinde hat. Setzen wir $A_1$ also zwischen $A_2$ und $A_3$, dann muss sich die Anzahl an nebeneinander sitzenden Feinden zwar nicht verringern – $A_2$ und $A_3$ könnten bereits befreundet gewesen sein und die ehemaligen Sitznachbarn von $A_1$ könnten untereinander zerstritten sein – aber sie kann sich auch nicht erhöhen. Spätestens nach $2n$ Schritten haben wir so jeden Abgeordneten zwischen zwei mit ihm befreundete Abgeordnete gesetzt, es sitzen somit keine Feinde nebeneinander.

**Modell.** Bezeichne $A = \{A_1, ..., A_{2n}\}$ die Abgeordneten, $A_0 := A_{2n}$. Die Menge $K$ der (Sitz-)Konstellationen modellieren wir als

$$K := \{(B_1, ..., B_{2n}) \mid \{B_1, ..., B_{2n}\} = \{A_1, ..., A_{2n}\};$$

als Anfangskonstellation nehmen wir $A^{\text{anf}} := (A_1, ..., A_{2n})$.

Ähnlich wie eben setzen wir für $B = (B_1, ..., B_{2n}) \in K$

$$S(B,k) := \begin{cases} \text{feind} & \begin{array}{l} B_{k-1} \text{ ist ein Feind von } B_k \text{ oder} \\ B_k \text{ ist ein Feind von } B_{k+1} \end{array} \\ \text{freund} & \text{sonst} \end{cases} \qquad (k = 1, ..., 2n)$$

und

$$F_1(B) := \{k \in \{1, ..., 2n\} \mid S(B,k) = \text{feind}\}$$

Das Umsetzen der Abgeordneten modellieren wir als

$$\Phi(B) := \begin{cases} B & \#F_1(B) = 0 \\ \tilde{B} & \#F_1(B) \neq 0 \end{cases},$$

wobei wir $\tilde{B}$ in dem Fall definieren als

$$\tilde{B} := (B_1, ..., B_{i-1}, B_{i+1}, ..., B_{m-1}, B_i, B_m, B_{m+1} ..., B_{2n})$$

mit $i = \min F_1(B)$ und $m = \min F_2(B)$,

$$F_2(B) := \{k \in \{1, ..., 2n\} \mid S(B, k-1) = \text{freund} = S(B,k)\}.$$

Wir suchen wieder einen Fixpunkt von $\Phi$. Definieren wir $F : K \to \mathbb{N}_0$ durch $F(B) := \#F_2(B)$, dann gilt wieder die Implikation

$$\Phi(B) \neq B \qquad \Longrightarrow \qquad F(\Phi(B)) \leq F(B) - 1;$$

wegen $0 \leq F \leq 2n$ gibt es unter den Konstellationen $B, \Phi(B), \Phi(\Phi(B)), ..., \Phi^{2n}(B)$ also mindestens einen Fixpunkt. □

**(4.3)** In einem Staat gibt es $n$ Städte, von denen jede entweder von der schwarzen oder der weißen Partei regiert wird. Jede dieser Städte ist mit ungerade vielen anderen Städte befreundet. Der Reihe nach wird jeden Monat in einer der Städte gewählt. Dabei wählen die Bürger diejenige Partei, die in den befreundeten Städten die Mehrheit inne hat.

Kommt der Prozess zu einem Stillstand, d.h. wählt ab einem gewissen Zeitpunkt jede Stadt diejenige Partei, die diese bereits regiert?

**Lösung.** Bezeichne $z$ die Gesamtzahl der befreundeten Städtepaare $(S_i, S_j)_{1\leq i<j\leq n}$, die gerade von unterschiedlichen Parteien regiert werden. Weiter bezeichne $w(S_i)$ die Anzahl der mit der Stadt $S_i$ befreundeten Städte, die von der weißen Partei regiert werden, und $s(S_i)$ die Anzahl der befreundeten Städte, in welchen die schwarze Partei regiert.

Wird in einer Stadt $S_i$ gewählt, in der die weiße Partei das Sagen hat, während in den befreundeten Städten die schwarze Partei regiert, so wird $S$ künftig von der schwarzen Partei regiert; $z$ erhöht sich dann um $w(S_i)$ und verringert sich um $s(S_i)$. Nach Voraussetzung ist aber $s(S_i) > w(S_i)$, so dass $z$ insgesamt kleiner wird. $z$ verkleinert sich also jedes Mal, wenn eine Stadt ihre Regierung wechselt; da sich $z$ nur endlich oft verringern lässt, herrscht also nach endlich vielen Wahlvorgängen in jeder Stadt diejenige Partei, die auch in den befreundeten Städten die Mehrheit hat.

**Modell.** Konstellationen sind für uns endliche Folgen

$$S = ((i, p_S(i)))_{1\leq i\leq n} \qquad \text{mit } p_S(i) \in \{s, w\},$$

wobei wir das $i$-te Folgenglied $(i, p_S(i))$ auffassen als

*„In der $i$-ten Stadt regiert die **w**eiße Partei, falls $p_S(i) = w$,*
*und die **s**chwarze Partei, falls $p_S(i) = s$.“.*

Weiter sei $K$ wie üblich die Menge aller Konstellationen $S$.

Die Anfangskonstellation ist ein $S^{\text{anf}} = (i, p_{S^{\text{anf}}}(i))_{1\leq i\leq n} \in K$.

Bezeichne

$$f(i) := \{j \in \{1, ..., n\} \mid \text{Stadt } j \text{ ist befreundet mit Stadt } i\}.$$

Ein Wahlvorgang (aller Städte) wird dann modelliert durch die Abbildung

$$\Phi = (\phi_n \circ \cdots \circ \phi_1) : K \to K$$

mit

$$\phi_i : \begin{array}{ccc} K & \to & K \\ (j, p(j))_{1\leq j\leq n} & \mapsto & (j, q(j))_{1\leq j\leq n} \end{array}, \qquad q(j) := \begin{cases} p(j) & j \neq i \\ s & s_S(i) > w_S(i) \\ w & w_S(i) > s_S(i) \end{cases},$$

wobei $s_S(i)$ die Anzahl der mit $i$ befreundeten Städte $j$ bezeichnet, die von der schwarzen Partei regiert werden:

$$s_S(i) = \#\{j \in f(i) \mid p(j) = s\};$$

entsprechend

$$w_S(i) = \#\{j \in f(i) \mid p(j) = w\}.$$

Wir müssen wie üblich zeigen, dass $\Phi$ einen Fixpunkt der Form $(\Phi \circ \cdots \circ \Phi)(S^{\text{anf}})$, d.h. eine Konstellation, die nach endlich vielen Wahlvorgängen aus der Anfangskonstellation entsteht und bei der alle einzelnen Wahlen $\phi_1, ..., \phi_n$ als Output gerade den Input liefern.

Bezeichne $z_S$ die Anzahl der befreundeten Städtepaare der Konstellation $S$, die von verschiedenen Parteien regiert werden:

$$z_S = \#\{(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \mid j > i,\ j \in f(i) \text{ und } p_S(j) \neq p_S(i)\}.$$

Wir zeigen, dass sich $z$ nach jedem Regierungswechsel um eins verkleinert; da sich $z$ nur endlich oft verkleinern kann, muss es dann ein $n \in \mathbb{N}_0$ geben , so dass $\Phi^n(S^{\text{anf}})$ ein Fixpunkt von $\Phi$ ist.

Seien nun $S = (i, p_S(i))_{1\leq i\leq n} \in K$ und $i_0 \in \{1,...,n\}$ mit $\phi_{i_0}(S) \neq S$. Gelte ohne Einschränkung $p_S(i_0) = w$. Wegen $q_S(i_0) = p_{\phi_{i_0}(S)}(i_0) = s$ muss dann $s_S(i_0) > w_S(i_0)$ sein und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
z_S &= \#\{(i,j) \mid j > i,\ j \in f(i),\ p_S(j) \neq p_S(i)\} \\
&= \#\{(i,j) \mid i,j \neq i_0,\ j > i,\ j \in f(i),\ p_S(j) \neq p_S(i)\} \\
&\quad +\#\{(i_0,j) \mid j \in f(i_0),\ p_S(j) \neq \underbrace{p_S(i_0)}_{=w}\} \\
&= \#\{(i,j) \mid i,j \neq i_0,\ j > i,\ j \in f(i),\ p_S(j) \neq p_S(i)\} \\
&\quad +\#\{(i_0,j) \mid j \in f(i_0),\ p_S(j) = s\} \\
&= \#\{(i,j) \mid i,j \neq i_0,\ j > i,\ j \in f(i),\ p_S(j) \neq p_S(i)\} + s_S(i_0) \\
&> \#\{(i,j) \mid i,j \neq i_0,\ j > i,\ j \in f(i),\ p_S(j) \neq p_S(i)\} + w_S(i_0) \\
&= \#\{(i,j) \mid i,j \neq i_0,\ j > i,\ j \in f(i),\ p_{\phi_{i_0}(S)}(j) \neq p_{\phi_{i_0}(S)}(i)\} \\
&\quad +\#\{(i_0,j) \mid j \in f(i_0),\ p_{\phi_{i_0}(S)}(j) = w\} \\
&= \#\{(i,j) \mid i,j \neq i_0,\ j > i,\ j \in f(i),\ p_{\phi_{i_0}(S)}(j) \neq p_{\phi_{i_0}(S)}(i)\} \\
&\quad +\#\{(i_0,j) \mid j \in f(i_0),\ p_{\phi_{i_0}(S)}(j) \neq \underbrace{p_{\phi_{i_0}(S)}(i_0)}_{=s}\} \\
&= \#\{(i,j) \mid j > i,\ j \in f(i),\ p_{\phi_{i_0}(S)}(j) \neq p_{\phi_{i_0}(S)}(i)\} \\
&= z_{\phi_{i_0}(S)}.
\end{aligned}$$

□

**(4.4)** Wir betrachten ein $m \times n$-Tableau, dessen Einträge ganze Zahlen sind. Ein Zug besteht darin, eine Zeile oder Spalte auszuwählen und dort die Vorzeichen aller Einträge zu wechseln.

Ist es möglich, dass nach endlich vielen Zügen alle Zeilen- und alle Spaltensummen mindestens 0 betragen?

**Lösung.** Wir ändern iterativ in allen Zeilen und Spalten, deren Summen negativ sind, die Vorzeichen. Die Summe über alle Elemente der Matrix erhöht sich dabei jedes Mal. Da diese Gesamtsumme die Summe über die Beträge aller Einträge nicht übersteigen kann, müssen nach endlich vielen Vorzeichenwechseln alle Zeilen- und Spaltensummen positiv sein.

**Modell.** Sei die Anfangskonstellation die gegebene Matrix $A^{\text{anf}} \in \mathbb{R}^{m\times n} = (a_{ij}^{\text{anf}})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}$, eine beliebige Konstellation $A \in K$ von der Form $A = (\pm a_{ij}^{\text{anf}})$. Wir definieren einen Zug $\Phi = (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n) \circ (\phi^1 \circ \cdots \circ \phi^m) : K \to K$ via

$$[\phi^{i_0}(A)]_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i \neq i_0 \\ a_{i_0j} & a_{i_01} + \cdots + a_{i_0m} \geq 0 \\ -a_{i_0j} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Definiere zu $A = (a_{ij}) \in K$

$$z(A) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{\text{anf}}| =: z.$$

Sei $i_0$ eine Zeile von $A$, deren Zeilensumme negativ ist (analog für Spalten). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
z(A) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i\neq i_0}\sum_{j} a_{ij} + \underbrace{\sum_{j} a_{i_0j}}_{<0} \\
&< \sum_{i\neq i_0}\sum_{j} a_{ij} + \underbrace{\sum_{j} -a_{i_0j}}_{>0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} [\phi^{i_0}(A)]_{ij} = (\phi^{i_0}(A)).
\end{aligned}$$

Also ist $z \geq z(\Phi^n(A^{\text{anf}})) \geq z(A^{\text{anf}}) + n$, so lange $\Phi^n(A^{\text{anf}})$ kein Fixpunkt für $\Phi$ ist, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $\Phi^n(A^{\text{anf}})$ ein Fixpunkt von $\Phi$ ist. □

# 5 Geometrische Modellierung

In der Analytischen Geometrie werden Probleme aus der Euklidischen Geometrie mit analytischen Hilfsmitteln bearbeitet. Dies ist zunächst ein klassisches Modellierungsproblem: Geometrische Objekte wie Punkte, Parallelen und rechte Winkel wollen in analytische Objekte, d.h. Zahlen, übersetzt werden. Universelles Instument ist hier das nach dem französischen Naturwissenschaftler und „Erfinder“ der analytischen Geometrie, **René Descartes** (1596-1850), benannte **Kartesische Koordinatensystem**.

Wir betrachten einige Aspekte dieses Übersetzungsprozesses, ohne streng nach dem von **Euklid von Alexandria** (ca. 360-280 v. Chr.) vorgeschlagenen Axiomensystem vorzugehen.

**(5.1)** Man modelliere die folgenden Objekte der ebenen Geometrie: Punkt, Gerade, Parallele zu einer Geraden, Dreieck, Quadrat, Abstand, Länge, Winkel.

**Lösung.** Wir modellieren einen **Punkt** $P$ in der Ebene durch kartesische Koordinaten $x, y \in \mathbb{R}$:

$$P = (x, y).$$

Dabei gilt obige Gleichheit nicht im eigentlichen Sinn: Links steht ein geometrisches Objekt, rechts ein Zahlenpaar. Wir üblich identifizieren wir aber Objekte mit ihren Modellen.

Ein mögliches Modell für eine **Gerade** $G$ wäre

$$G = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right),$$

interpretiert als die (eindeutig bestimmte) Gerade durch die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$, wobei wir natürlich fordern, dass $P_1 \neq P_2$ erfüllt ist.

Sind $G$ eine Gerade und $d \in \mathbb{R}$, so können wir eine Parallele $G'$ zu $G$ auffassen als Paar

$$G' = (G, d),$$

wobei $|d|$ den Abstand (s.u.) zwischen $G$ und $G'$ bezeichnet.

Nach Einführung einer **Orientierung** von $G$ können wir präzisieren, ob $G'$ links oder rechts von $G$ liegt. Legen wir etwa eine Orientierung von $G$ durch die Reihenfolge der Punkte $P_1, P_2$ so fest, dass wir sagen, $G$ verläuft von $P_1$ nach $P_2$, so können wir $G'$ als die Parallele links von $G$ mit Abstand $|d|$ zu $G$ auffassen, wenn $d \geq 0$ gilt, und entsprechend als die Parallele auf der rechten Seite, wenn $d \leq 0$ ist.

**Dreiecke** $\Delta$ und **Quadrate** $\square$ können wir durch die Koordinaten ihrer Eckpunkte modellieren:

$$\Delta = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right), \qquad \square = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right),$$

wobei die einzelnen Punkte natürlich wieder paarweise verschieden sein sollen.

Den **Abstand zwischen zwei Punkten** $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ definieren wir als

$$\operatorname{dist}(P_1, P_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

motiviert durch den **Satz des Pythagoras** (benannt nach Pythagoras von Samon, ca. 570-510 v. Chr.).

Den Abstand zwischen einem Punkt $P$ und einer Geraden $G$ definieren wir als Minimum aller Abstände zwischen $P$ und Punkten $Q$ auf der Geraden:

$$\operatorname{dist}(P, G) := \min_{Q \in G} \operatorname{dist}(P, Q).$$

Als **Länge** einer Strecke $\overline{P_1 P_2}$ definieren wir den Abstand der Punkte:

$$|\overline{P_1 P_2}| := \operatorname{dist}(P_1, P_2).$$

Der **Winkel** eines Punktes $P = (x, y)$ ist

$$\alpha_P := \arccos\left(\frac{x}{||(x,y)||}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{||(x,y)||}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \square$$

> Man modelliere eine Ebene $E$ im $\mathbb{R}^3$ durch eine Menge, eine Matrix, einen affinen Vektorraum, einen Vektorraum und die Lösungsmenge eines Gleichungssystems.

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ drei Vektoren und $(\vec{a}, \vec{b})$ linear unabhängig.

$E$ als **Menge**:

$$E = \{\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

$E$ als **Matrix**:

$$E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

$E$ als **affiner Raum**:

$$E = \vec{a} + \operatorname{span}(\vec{b}, \vec{c}) \subseteq (\mathbb{R}^3, +, \cdot).$$

$E$ als **Vektorraum**:

$$E = (V, \oplus, \odot)$$

mit

$$\begin{aligned} V &:= \{\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \oplus (\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}) &:= (\vec{a} + (s+u)\vec{b} + (t+v)\vec{c}); \\ \alpha \odot (\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) &:= (\vec{a} + (s\alpha)\vec{b} + (t\alpha)\vec{c}). \end{aligned}$$

$E$ als **Lösungsmenge eines (inhomogenen linearen) Gleichungssystems**:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, s, t) \in \mathbb{R}^5 \mid (x_1, x_2, x_3, s, t) \text{ löst } (*)\}$$

mit

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} sb_1 & + & tc_1 & + & x_1 & & & = & -a_1 \\ sb_2 & + & tc_2 & & & + & x_2 \quad & = & -a_2 \\ sb_3 & + & tc_3 & & & & + \quad x_3 & = & -a_3. \end{array} \right. \tag{$*$}$$

Dabei interpretieren wir „$(x_1, x_2, x_3, s, t) \in E$“ als „$(x_1, x_2, x_3)$ liegt in der Ebene“; es gilt dann gerade

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

□

> **(5.2)** Man zeige, dass der Vektorraum in **(5.1)** zweidimensional ist, indem man einen Vektorraumsomorphismus in den $\mathbb{R}^2$ findet.

**Beweis.** Wir definieren

$$\Phi : (V, \oplus, \odot) \to (\mathbb{R}^2, +, \cdot), \qquad \Phi(\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) := (s, t).$$

Dann ist $\Phi$ **linear**:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha \odot (\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \oplus \beta \odot (\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c})) &= \Phi(\vec{a} + \alpha s\vec{b} + \alpha t\vec{c} + \beta u\vec{b} + \beta v\vec{c}) \\ &= \Phi(\vec{a} + (\alpha s + \beta u)\vec{b} + (\alpha t + \beta v)\vec{c}) \\ &= (\alpha s + \beta u, \alpha t + \beta v) \\ &= \alpha(s, t) + \beta(u, v) \\ &= \alpha \cdot \Phi(\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) + \beta \cdot \Phi(\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}). \end{aligned}$$

$\Phi$ ist **injektiv**:

Sei $\vec{v} \in \operatorname{Kern}(\Phi)$, d.h. $\Phi(v) = 0$. Seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $v = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$, dann folgt $(s, t) = 0$, d.h. $v = \vec{a}$. Also ist $\operatorname{Kern}(\Phi) = \{\vec{a}\}$ der Nullraum.

$\Phi$ ist **surjektiv**:

Sei $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Definiere $v := \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$, dann ist $\Phi(v) = (s, t)$.

Also ist $E$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$; da Isomorphismen dimensionserhaltend sind, folgt $\dim(E) = 2$. □

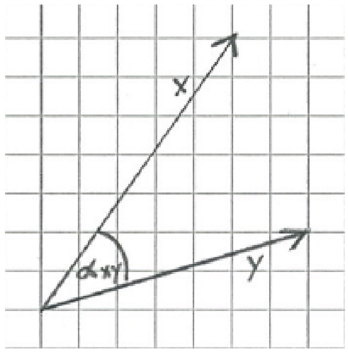
**(5.3)** Man beweise, dass der Winkel $\alpha_{xy} := \sphericalangle(x,y)$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ die folgende Beziehung erfüllt:

$$\cos(\alpha_{xy}) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}.$$

**Hinweis:** Das Additionstheorem

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

das wir hier weder analytisch beweisen noch geometrisch motivieren wollen, könnte dabei nützlich sein.




**Beweis.** Zunächst definieren wir den Winkel $\alpha_{xy}$ zwischen zwei Vektoren $x$ und $y$ als

$$\alpha_{xy} := \alpha_x - \alpha_y.$$

Nach der Winkeldefinition in **(5.1)** ist für $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\sin\alpha_z = \frac{z_2}{||z||}, \qquad \cos\alpha_z = \frac{z_1}{||z||}$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_{xy}) &= \cos(\alpha_x - \alpha_y) \\ &= \cos\alpha_x\cos\alpha_y + \sin\alpha_x\sin\alpha_y \\ &= \frac{x_1}{||x||}\cdot\frac{y_1}{||y||} + \frac{x_2}{||x||}\cdot\frac{y_2}{||y||} \\ &= \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\cdot||y||}.\end{aligned}$$

Es folt der **Satz des Pythagoras**:

Sei durch die linear unabhängigen Vektoren $x$ und $y$ das Dreieck mit Seiten $x, y, x - y$ aufgespannt mit $\alpha_{xy} = 90°$. Dann ist $||x||^2 + ||y||^2 = ||x - y||^2$.

**Beweis.** Wegen $\alpha_{xy} = 90°$ ist $\cos\alpha_{xy} = 0$, also $\langle x, y\rangle = 0$, d.h.

$$\begin{aligned}||x - y||^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1y_1 + x_2y_2) + (y_1^2 + y_2^2) \\ &= ||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 + ||y||^2.\end{aligned}$$

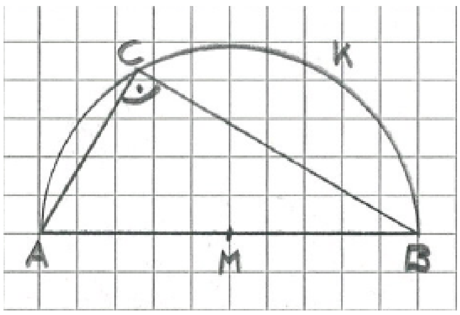
**(5.4)** Man beweise den **Satz von Thales:**

Sind $A, C$ Punkte im $\mathbb{R}^2$, $K$ ein Kreis um den Mittelpunkt $M$ der Strecke $\overline{AB}$ und $C \neq A, B$ ein beliebiger Punkt auf $K$, so ist

$$\sphericalangle\left(\overline{AC}, \overline{BC}\right)$$

stets ein rechter Winkel.

Ein elementarer Beweis des Satzes (der nur benutzt, dass Winkelsummen im Dreieck 180° betragen und dass die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich groß sind) wird **Thales von Milet** zugeschrieben.



**Beweis.** Es ist

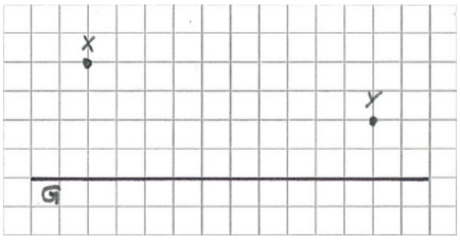
$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \rangle &= \langle \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}, -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} \rangle \\
&= -|\overrightarrow{AM}|^2 + \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MC} \rangle - \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MC} \rangle + |\overrightarrow{MC}|^2 \\
&= |\overrightarrow{MC}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

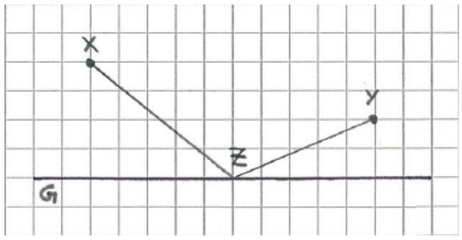
da $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MC}$ Radien desselben Kreisen sind, also die gleiche Länge haben.

Damit folgt

$$\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})) = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \rangle}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 90°.$$

**(5.5)** Man konstuiere (mit Zirkel und Lineal) einen Punkt $Z$ auf der Geraden $G$, so dass die Länge der Strecke $\overline{XZY}$ minimal wird.




**Lösung.**

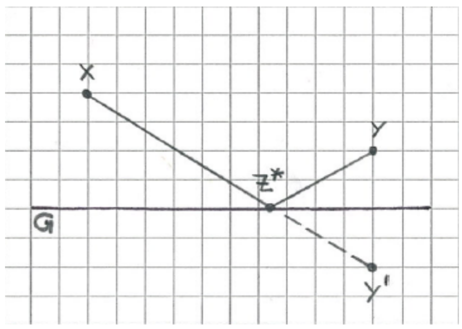
Sei $Y'$ derjenige Punkt, der durch Spiegelung von $Y$ an der Geraden $G$ entsteht, dann ist

$$|\overline{XZY}| := |\overline{XZ}| + |\overline{ZY}| = |\overline{XZ}| + |\overline{ZY'}| = |\overline{XZY'}|.$$

Nach der Dreiecksungleichung wird das Optimierungsproblem

$$\min_Z |\overline{XZY'}| \qquad \text{unter der Nebenbedingung } Z \in G$$

genau dann durch $Z^* \in G$ gelöst, wenn $Z^* \in \overline{XY'}$, d.h. wenn $Z^*$ der Schnittpunkt der Geraden $G$ mit der Strecke $\overline{XY}$ ist.

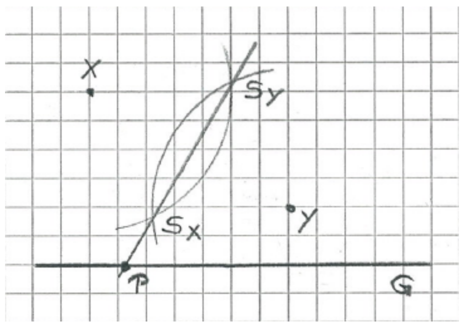



Man konstruiere weiter einen Punkt $P \in G$, so dass $\overline{XP}$ und $\overline{PY}$ gleich lang sind.

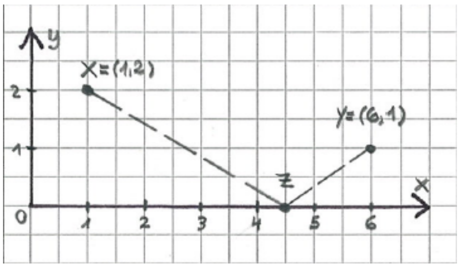
Die Menge aller Punkte, die von $X$ und $Y$ den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten von $X$ und $Y$, welche wir folgendermaßen konstruieren können:

Die beiden Kreise mit gemeinsamem Radius $|\overline{XY}|$ um $X$ und $Y$ schneiden sich in den beiden Punkten $S_X$ und $S_Y$; die Gerade durch $S_X$ und $S_Y$ ist dann gerade die Mittelsenkrechte (der Name kommt natürlich daher, dass $\sphericalangle(\overline{XY}, \overline{S_X S_Y}) = 90°$).

Der Schnittpunkt von $\overline{S_X S_Y}$ mit $G$ ist dann genau der gesuchte Punkt $P$.



Wie lauten die kartesischen Koordinaten von $Z$, wenn $X$ die Koordinaten $(1, 2)$ und $Y$ die Koordinaten $(6, 1)$ hat und $G$ die $x$-Achse ist?




**Lösung.** Die Gerade $\overline{G(X, Y')}$ durch die Punkte $X, Y'$ lässt sich „parametrisieren" durch

$$g(t) := X + t(Y' - X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

d.h. $G(X, Y') = \{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Wir suchen den Schnittpunkt von $G(X, Y')$ und $G = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, d.h. den Parameter $t$ und die $x$-Koordinate $x$ mit

$$g(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies führt uns zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 1 + 5t & = & x \\ 2 - 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

mit der eindeutigen Lösung $(t, x) = (\frac{2}{3}, \frac{13}{3})$, die wir interpretieren als

*„Der gesuchte Punkt ist $Z^* = (\frac{13}{3}, 0)$, welcher offenbar auf $G = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ liegt, aber auch auf $G(X, Y') = \{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, denn es ist $g(\frac{2}{3}) = Z^*$".*

**Bemerkung.** Eine andere Möglichkeit, solche Optimierungsprobleme anzupacken, ist der Kalkül der Differenzialrechnung: Das zweidimensionale Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

$$\min_{Z \in \mathbb{R}^2} |\overline{XZ}| + |\overline{ZY'}| \qquad \text{unter der Nebenbedingung } Z \in G$$

lässt sich auch als eindimensionales Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung schreiben:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^1} \left| \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}} \right| + \left| \overline{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}} \right|.$$

Definieren wir also

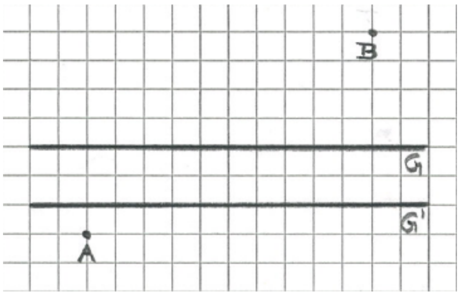
$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \sqrt{(1 - x)^2 + 4} + \sqrt{(x - 6)^2 + 1},$$

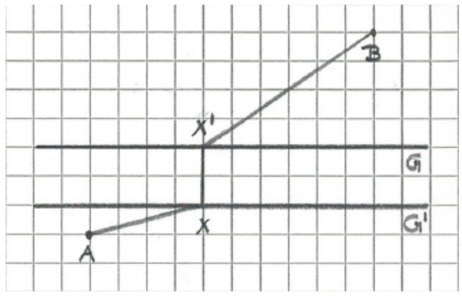
dann ist der $\Phi$ minimierende Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{2(1 - x)}{2\sqrt{(1 - x)^2 + 4}} + \frac{2(x - 6)}{2\sqrt{(x - 6)^2 + 1}} = 0;$$

Auflösen dieser Wurzelgleichung (wie auch immer) nach $x$ liefert dann den gesuchten Punkt $Z = (x, 0)$.

**(5.6)** Man finde zwei Punkte $X \in G$, $X' \in G'$, so dass $\overline{XX'}$ orthogonal zu den Parallelen $G, G'$ ist und die Strecke $\overline{AXX'B}$ minimale Länge hat.

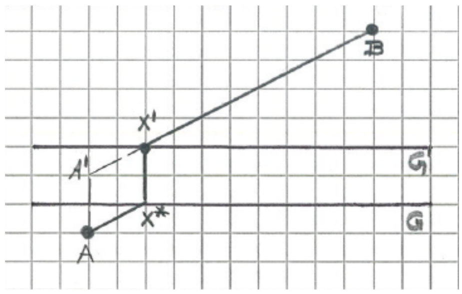



**Lösung.** Sei $d$ der Abstand der beiden Parallelen, etwa definiert als

$$d := \operatorname{dist}(G, G') := \min_{P' \in G'} |\overline{PP'}|$$

für einen beliebigen Punkt $P \in G$ (man beachte, dass $d$ nicht von der Wahl von $P$ abhängt!).




Der Punkt $X' = (x_1', x_2')$ ist durch die Wahl von $X = (x_1, x_2)$ bereits festgelegt, denn es besteht der Zusammenhang

$$X' = X'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + d \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $|\overline{AXX'B}|$ nicht von der Länge der Strecke $\overline{XX'}$ abhängig:

$$|\overline{AXX'B}| = |\overline{AX}| + |\overline{XX'}| + |\overline{X'B}| = |\overline{AX}| + d + |\overline{X'B}|.$$

Definieren wir einen neuen Punkt $A' = (a_1', a_2')$ durch $a_1' := a_1$ und $a_2' = a_2 + d$, dann ist

$$|\overline{AXX'B}| = |\overline{AA'}| + |\overline{A'X'}| + |\overline{X'B}| = d + |\overline{A'X'}| + |\overline{X'B}|$$

Die Lösung des Problems

$$\min_{X' \in G'} |\overline{A'X'}| + |\overline{X'B}|$$

liefert somit auch eine Lösung des ursprünglichen Problems – und wiederum mit Dreiecksungleichung erhalten wir wie bei der letzten Aufgabe:

$$(X')^{\mathrm{opt}} = \min_{X' \in G'} |\overline{A'X'}| + |\overline{X'B}| \qquad \Leftrightarrow \qquad (X')^{\mathrm{opt}} = G' \cap \overline{A'B},$$

d.h. der gesuchte minimierende Punkt ist der Schnittpunkt der Gerade $G'$ mit der Strecke $\overline{A'B}$.

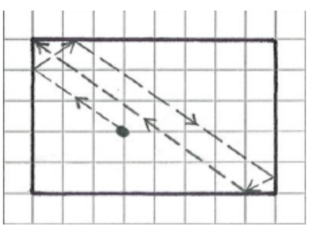
Der andere gesuchte Punkt $X^{\mathrm{opt}} \in G$ ist dann natürlich gegeben durch

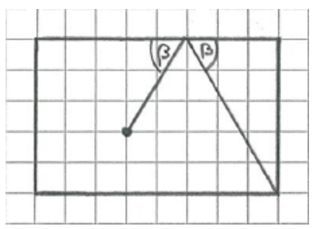
$$X^{\mathrm{opt}} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' - d \end{pmatrix}.$$

□

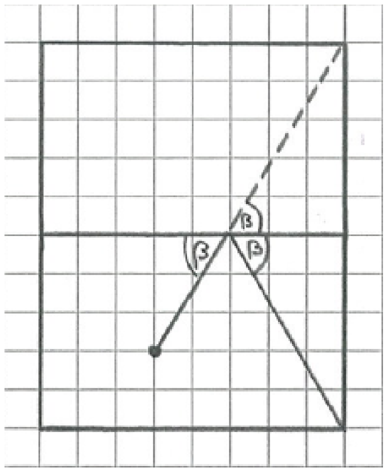
**(5.7) (Billardproblem)** Man konstruiere einen Winkel $\alpha$, so dass die Billardkugel $B$ nach Abprall von allen vier Banden in einem Loch landet (es gilt natürlich nach jeder Bandenberührung, dass Ein- und Austrittwinkel gleich groß sind).

**Hinweis:** Man löse das Problem zunächst für eine Bandenberührung.



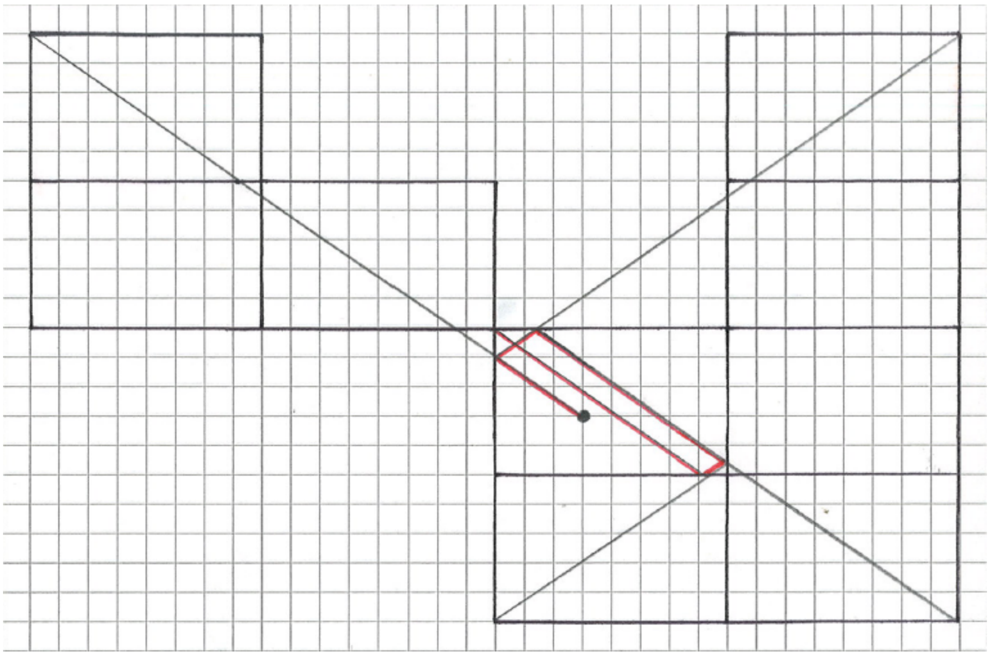


**Lösung.**

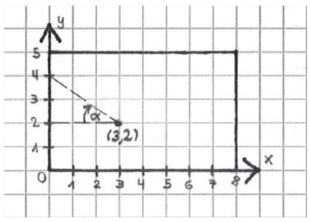



Um die Kugel vom Abstoßpunkt aus über die obere Bande in die rechte untere Ecke zu befördern, spiegle man diesen Punkt an der oberen Bande und verbinde den erhaltenen Punkt mit dem Abstoßpunkt.

Um das Ausgangsproblem zu lösen, wende man diese Konstruktion in geeigneter Weise iterativ an: Wir suchen die vier Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4$, an denen die Kugel von der Bande abprallt, bevor sie im Loch landet. Dabei hängen $P_2, P_3, P_4$ letzlich von $P_1$ ab. Unter der Annahme, dass wir $P_3$ bereits kennen, lässt sich $P_4$ mit dem Hinweis bestimmen. Und in der Annahme, dass wir $P_2$ kennen, lässt sich $P_3 = P_3(P_2)$ und damit $P_4 = P_4(P_3)$ bestimmen ... würden wir $P_1$ kennen, dann auch $P_2(P_1)$, $P_3(P_2)$ und $P_4(P_3)$; den Punkt $P_1$ erhalten wir aber durch Anwendung des Hinweises auf den gegebenen Abstoßpunkt.



Man berechne diesen Winkel für die angegebenen Maße.




**Lösung.** Bezeichne $a$ die Länge der oberen bzw. unteren Bande, $b$ die Länge der linken bzw. rechten Bande und $(x, y)$ die Koordinaten des Abstoßpunktes, dann lesen wir aus obigem Bild ab:

$$\tan \alpha = \frac{3b - y}{2a + x}.$$

Speziell mit $a = 8,\ b = 5$ und $(x, y) = (3, 2)$ erhalten wir

$$\alpha = \arctan\left(\frac{13}{19}\right) \approx 34,38°.$$