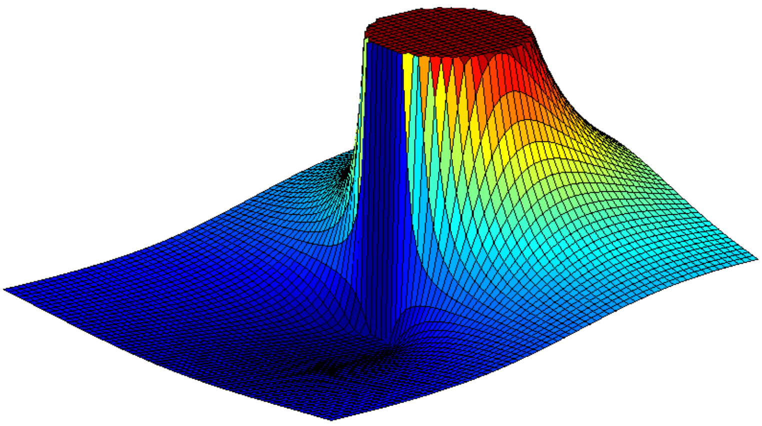
Einführung in die

Lineare Algebra



Vektorräume und lineare Abbildungen

Martin Gubisch

Konstanz, Wintersemester 2009/2010

Inhaltsverzeichnis

0 Gruppen, Ringe, Körper

0.1 Algebraische Grundstrukturen

Grundlagen 0.1

Sei ab jetzt X stets eine nicht leere Menge.

(1) $(X, *)$ heißt eine *Magma*, falls $*$ eine *Verknüpfung* auf X ist, d.h. falls $* : X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x * y$ eine Abbildung ist.

Beispiele hierfür sind $(\mathcal{P}(X), \setminus),\ (\mathcal{P}(X), \cap),\ (\mathcal{P}(X), \cup)$. ◊

(2) Eine Magma $(X, *)$ heißt eine *Halbgruppe*, falls $*$ *assoziativ* ist, d.h. falls für alle $x, y, z \in X$ gilt: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Zum Beispiel sind $(\mathbb{N}, +),\ (\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, +),\ (\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \cdot)$ Halbgruppen. ◊

(3) Eine Halbgruppe $(X, *)$ heißt ein *Monoid*, falls $(X, *)$ ein *neutrales Element* besitzt, d.h. falls ein $e \in X$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt: $e * x = x = x * e$.

e ist in dem Fall eindeutig bestimmt.

Betrachte $M := \{1, 2, 3\}$ und $A := \{\mathrm{id}, f, g, h\}$ mit $f \equiv 1,\ g \equiv 2$ und $h(1) = 2,\ h(2) = 1,\ h(3) = 3$, wobei $\mathrm{id}, f, g, h : M \to M$. Dann ist $(A, \circ)$ ein Monoid. ◊

(4) Eine Halbgruppe $(X, *)$ heißt eine *Gruppe*, falls jedes Element *invertierbar* ist, d.h. falls zu jedem $x \in X$ ein $y \in X$ existiert mit $x * y = e = y * x$.

Auch die Inversen sind eindeutig bestimmt.

Wichtige Beispiele sind die Gruppe der reellen $(n\times n)$-Matrizen $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$, die *Kleinsche Vierergruppe* und $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$. ◊

(5) Eine Gruppe $(X, *)$ heißt *abelsch*, falls $*$ *kommutativ* ist, d.h. falls $\forall x, y \in X : x * y = y * x$.

Beispiele sind neben den zuvor Genannten etwa $(\mathcal{P}, \Delta)$ und $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$.

Die Menge der *invertierbaren* ($n \times n$-Matrizen bildet mit dem Matrixprodukt eine *nicht* abelsche Gruppe. ◊

(6) $(X, +, \cdot)$ heißt ein *Ring*, falls $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen auf X sind, so dass $(X, +)$ eine abelsche Gruppe ist, $(X, \cdot)$ eine Halbgruppe und für alle $x, y, z \in X$ die *Distributivgesetze* $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ und $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ gelten.

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, \cdot),\ (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot),\ \mathbb{R}[X] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{R}\},\ (\mathcal{P}(X), \Delta, \cap),\ (\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

Für gewöhnlich betrachten wir kommutative Ringe mit Einselement, d.h. Ringe $(X, +, \cdot)$, bei denen $(X, \cdot)$ ein kommutativer Monoid ist. Beachte aber: Die Matrizengruppe ist nicht kummutativ. ◊

(7) Sei $(X, +, \cdot)$ ein Ring. $(X, +, \cdot)$ heißt ein *Körper*, falls $(X\setminus\{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, d.h. falls $(X, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist, in dem jedes von 0 verschiedene Element bzgl. $\cdot$ invertiervar ist.

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +, \cdot),\ (\mathbb{R}, +, \cdot),\ (\mathbb{C}, +, \cdot),\ \mathbb{R}(X) = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{R}[X],\ q \neq 0\},\ \mathbb{F}_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$. ◊

(8) Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit 1. $\mathcal{A}$ heißt ein *$\mathcal{R}$-Modul*, falls es eine Verknüpfung $\mathcal{R} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(r, a) \to ra$ gibt, so dass gelten:

(a) $(\mathcal{A}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(b) $\forall q, r \in \mathcal{R},\ a, b \in \mathcal{A} : r(a + b) = ra + rb$ und $(q + r)a = qa + ra$.
(c) $\forall q, r \in \mathcal{R},\ a \in \mathcal{A} : (rq)a = r(qa)$.
(d) $\forall a \in \mathcal{A} : 1a = a$.

Ist $\mathcal{R}$ sogar ein Körper, so heißt $\mathcal{A}$ ein *$\mathcal{R}$-Vektorraum*. ◊

(9) Ist $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{R}$-Modul, der zusätzlich eine innere Verknüpfung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ (a, b) \mapsto ab$ besitzt, so dass gelten

(e) $\forall a, b, c \in \mathcal{A} : a(bc) = (ab)c$,
(f) $\forall a, b, c \in \mathcal{A} : (a + b)c = ac + bc$ und $a(b + c) = ab + ac$,
(g) $\forall r \in \mathcal{R},\ a, b \in \mathcal{A} : r(ab) = (ra)b$,

so heißt $\mathcal{A}$ eine *$\mathcal{R}$-Algebra*. ◊

0.2 Gruppen und Gruppenhomomorphismen

Definition 0.2

Eine *Gruppe* $\mathcal{G}$ ist eine Menge $X \neq \emptyset$ mit einer Veknüpfung $*$, so dass gelten:

(1) $\forall x, y, z \in X : (x * y) * z = x * (y * z)$.
(2) $\exists e \in X : \forall x \in X : e * x = x = x * e$.
(3) $\forall x \in X : \exists y \in X : x * y = e = y * x$.

$\mathcal{G}$ heißt *abelsch*, falls zusätzlich gilt:

(4) $\forall x, y \in X : x * y = y * x$.

Bemerkung 0.3

(1) Üblicherweise bezeichnet man mit G sowohl die Gruppe als auch die Grundmenge: $G = (G, *)$.

(2) Das neutrale Element und die Inversen sind eindeutig bestimmt.

(3) Für $x, y \in G$ gilt $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. ◊

Beispiel 0.4

(1) Wir betrachten die Menge $\langle \mathcal{S}_3 \rangle$ der Symmetrien eines regelmäßigen Dreiecks ABC, genauer: die Menge der Drehung ρ um den Winkel 60° und der Spiegelungen $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ an den durch A, B, C verlaufenden Symmetrieachsen.

Bezeichnen wir die Menge aller Kompositionen dieser Symmetrien mit $\mathcal{S}_3$, dann erhalten wir die Menge $\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ (beachte: z.B. $\rho \circ \sigma_A = \sigma_C,\ \rho \circ \sigma_B = \sigma_A,\ \rho \circ \sigma_C = \sigma_B$).

$(\mathcal{S}_3, \circ)$ erfüllt die Axiome einer Gruppe, ist aber nicht abelsch (denn $\sigma_A \circ \sigma_B = \rho \neq \rho^2 = \sigma_B \circ \sigma_A$).

$\mathcal{A}_3 := \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2\} \subseteq \mathcal{S}_3$ dagegen bildet mit der Komposition $\circ$ sogar eine abelsche Gruppe. Die Gruppe wird von ρ erzeugt, d.h. $\mathcal{A}_3 = \{\rho^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; man nennt $\mathcal{A}_3$ daher auch zyklische Gruppe Ordnung 3 (da $\rho^3 = \mathrm{id}$). ◊

(2) Sei $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$. Dann gibt es für jedes $z \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $z = qm + r$ und $0 \leq r \leq m-1$. Wir bezeichnen die Menge der m-Reste $\{0, ..., m-1\}$ mit $\mathbb{Z}_m$ und betrachten die Abbildung $\bar{\cdot} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m,\ z \mapsto \overline{z} := r_z$ (mit $z = q_z m + r_z$).

$(\mathbb{Z}_m, *)$ bildet eine abelsche Gruppe, wenn man setzt $\forall x, y \in \mathbb{Z}_m : x * y := \overline{x + y}$. Das neutrale Element ist 0; zu $x \in \mathbb{Z}_m$ ist $-x := m - x$ das Inverse. $\mathbb{Z}_m$ heißt die *Restklassengruppe modulo m*.

Es gilt $\forall x, y \in \mathbb{Z}_m : \overline{x + y} = \overline{x} * \overline{y}$, d.h. $\bar{\cdot}$ ist ein „Gruppenhomomorphismus" zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}_m, *)$. Weiter gilt $\forall z \in \mathbb{Z}_m : \overline{z} = z$ und $\forall z \in \mathbb{Z} : \overline{\overline{z}} = \overline{z}$. ◊

Definition 0.5

Seien $(G, *)$ und $(H, +)$ Gruppen. Eine Abbildung $\rho : G \to H$ heißt ein *Gruppenhomomorphismus*, falls für alle $f, g \in G$ gilt: $\rho(f * g) = \rho(f) + \rho(g)$.

Bemerkung 0.6

(1) Sei $\rho : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann $\rho(1_G) = 1_H$ und $\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$.

(2) Mit $\rho : G \to H$ und $\varphi : H \to K$ Gruppenhomomorphismen ist auch $\varphi \circ \rho : G \to K$ einer.

(3) $\mathrm{id} : G \to G,\ g \mapsto g$ und $0 : G \to G,\ g \mapsto 1_G$ sind stets Gruppenhomomorphismus von G in sich.

(4) Auf $(\mathbb{Z}, +)$ ist für jedes $m \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto mz$ ein Homomorphismus.

(5) Ist φ ein bijektiver Homomorphismus (ein *Gruppenisomorphismus*), dann auch φ^{-1}.

(6) Mit ρ, φ ist auch $\rho \circ \varphi$ ein Isomorphismus und es gilt $(\rho \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \rho^{-1}$.

(7) Ist G eine Gruppe, dann bildet $\mathrm{Aut}(G) := \{\rho : G \to G \mid G \text{ ist Isomorphismus}\}$ eine Gruppe.

(8) Sei G eine Gruppe. $G' \subseteq G$ heißt eine *Untergruppe* von G, falls $(G', +)$ Gruppe ist.

(9) Seien $\rho : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, $G' \subseteq G$ und $G' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $\rho(G') \subseteq H$ und $\rho^{-1}(H') \subseteq G$ Untergruppen. Speziell sind das *Bild* $\rho(G)$ und der *Kern* $\rho^{-1}(1_H)$ Untergruppen. ◊

0.3 Ringe und Ringhomomorphismen

Definition 0.7

$\mathcal{R} := (X, +, \cdot)$ heißt ein *Ring*, falls $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen auf X sind, so dass gilt:

(1) $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) $(X, \cdot)$ ist assoziativ.
(3) Es gelten die Distributivgesetze.

Gibt es ein $1 \in X$ mit $\forall x \in X : 1 \cdot x = x = x \cdot 1$, dann heißt $(X, +, \cdot)$ Ring mit Eins.

Gilt $\forall x, y \in X : x \cdot y = y \cdot x$, dann heißt X kommutativ.

Gilt $\forall x, y \in X : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$, dann heißt X *nullteilerfrei*.

Beispiele 0.8

(1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins (ein *Integritätsbereich*).

(2) $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ mit $\forall a, b \in \mathbb{Z}_m : a + b := \overline{a+b}$ und $a \cdot b := \overline{a \cdot b}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, der *Restklassenring* von m. $\mathbb{Z}_m$ ist i.A. nicht nullteierlfrei.

(3) Ein besonders langweiliger Ring ist der Nullring $(\{0\}, +, \cdot)$ (mit $0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0$).

(4) Alle „Körper“ wie $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind insbesondere Integritätsbereiche.

(5) Die Menge $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ bildet einen Ring, den *Ring der Gaußschen Zahlen*. Dieser ist kanonisch isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ via $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}^2,\ a + bi \mapsto (a, b)$.

(6) Ist $(G, +)$ eine Gruppe, dann ist $(G, +, \cdot)$ ein Ring, wobei $\forall x, y \in G : x \cdot y := 0$.

(7) Ist $(G, +)$ eine Gruppe, dann ist $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ ein Ring mit Eins, wenn man für $\varphi, \psi \in G$ setzt $\varphi + \psi : G \to G,\ g \mapsto \varphi(g) + \psi(g)$ und $\varphi \circ \psi : G \to G,\ g \mapsto \varphi(\psi(g))$; dann ist id das Einselement. $\Diamond$

Definition 0.9

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, *, \circ)$ Ringe. Eine Abbildung $\rho : R \to S$ heißt ein *Ringhomomorphismus*, falls für alle $f, g \in R$ gilt: $\rho(f + g) = \rho(f) * \rho(g)$ und $\rho(f \cdot g) = \rho(f) \circ \rho(g)$.

Sind R, S Ringe mit Eins, dann heißt ρ *unitär*, falls $\rho(1_R) = 1_S$ gilt.

Beispiele 0.10

(1) Die *Inklusionsabbildung* $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ z \mapsto z$ ist ein Ringhomomorphismus.

(2) $\bar{\cdot} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m,\ x \mapsto \overline{x}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

(3) Sind $\rho : R \to S$ und $\varphi : S \to T$ Ringhomomorphismen, dann ist auch $\varphi \circ \rho : R \to T$ einer.

(4) $\mathrm{id} : R \to R,\ r \mapsto r$ und $0 : R \to R,\ r \mapsto 0$ sind stets Ringhomomorphismus von R in sich.

(5) Für festes $a \in \mathbb{Z}$ ordnet der *Einsetzungshomomorphismus* $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z},\ p \mapsto p(a)$ jedem Polynom p des Ringes $\mathbb{Z}[X]$ die Einsetzung $p(a) \in \mathbb{Z}$ zu.

(6) Sei R ein Ring mit Eins. Dann heißt $r \in R$ eine *Einheit* (bzgl. $\cdot$), falls r invertierbar ist, d.h. falls es ein $q \in r$ gibt mit $rq = 1$.

(7) Die Einheiten eines Ringes R bilden eine Gruppe, die mit $R^\times$ bezeichnete *Einheitengruppe* von R. Beispielsweise ist $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\},\ (\mathbb{Z}[i])^\times = \{-1, 1, -i, i\}$.

Für die Einheiten in $\mathbb{Z}_m$ gilt: $a \in \mathbb{Z}_m^\times \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(a, m) = 1$.

(8) Sind R, S Ringe mit Eins und $\rho : R \to S$ ein unitärer Ringhomomorphismus, dann gelten $\rho(R^\times) \subseteq S^\times$ und $\forall r \in R^\times : \rho(r^{-1}) = (\rho(r))^{-1}$. $\Diamond$

0.4 Körper und Körperhomomorphismen

DEFINITION 0.11

Ist $\mathcal{K}$ ein kommutativer Ring mit Eins, in dem jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist, dann heißt $\mathcal{K}$ ein *Körper*.

BEMERKUNG 0.12

Sei R ein Ring. Dann ist R genau dann ein Körper, wenn $R^\times = R\backslash\{0\}$. $\Diamond$

SATZ 0.13 (Restklassenkörper)

$\mathbb{Z}_m$ ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

BEWEIS

$\Rightarrow$: Seien $\mathbb{Z}_m$ ein Körper und $a \in \mathbb{N}$ mit $a \leq m$. Dann $a \in \mathbb{Z}_m^\times$, also invertierbar in $\mathbb{Z}_m$. Nach letzten 0.10.7 gilt dann $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$. Also $\forall a \in \mathbb{N} : a|m \Rightarrow a = m$ oder $a = 1$, d.h. m ist prim.

$\Leftarrow$: Sei umgekehrt m prim, d.h. $\forall a \in \mathbb{Z}_m\backslash\{0\} : \mathrm{ggT}(a, m) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}_m^\times$ (wiederum mit 0.10.7) $\Rightarrow \mathbb{Z}_m^\times = \mathbb{Z}_m\backslash\{0\} \Rightarrow \mathbb{Z}_m$ Körper. $\square$

BEMERKUNG 0.14

Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper: Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Dann gibt es zu $x \in R\backslash\{0\}$ natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $x^m = x^n$. Da R Integritätsbereich, gilt die *Kürzungsregel* $\forall a, b, c \in R,\ a \neq 0 : ab = ac \Rightarrow b = c$, denn $ab = ac \Rightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$; mit $a = x^n,\ b = 1$ und $c = x^{m-n}$ erhalten wir $x^{m-n} = 1$, also $xx^{m-n-1} = 1$, d.h. $x \in R^\times$. $\Diamond$

DEFINITION 0.15

Seien $(K, +, \cdot)$ und $(L, *, \circ)$ Körper. Eine Abbildung $\rho : K \to L$ heißt ein *Körperhomomorphismus*, falls für alle $f, g \in K$ gilt: $\rho(f + g) = \rho(f) * \rho(g),\ \rho(f \cdot g) = \rho(f) \circ \rho(g)$ sowie $\rho(1_K) = 1_L$.

BEMERKUNG 0.16

(1) Die Verkettung von Körperhomomorphismen ist ein Körperhomomorphismus.

(2) Der einzige Körperhomomorphismus auf $\mathbb{Q}$ ist die Identität.

(3) $\varkappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a + ib) \mapsto a - ib$ bzw. $\tilde{\varkappa} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (a, b) \mapsto (a, -b)$ sind Körperhomomorphismen.

(4) $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ q \mapsto q$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ r \mapsto r$ sind Körperhomomorphismen, sog. *Einbettungshomomorphismen*.

(5) Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv: Seien $\rho : K \to L$ ein Körperhomomorphismus und $a, b \in K$ mit $\rho(a) = \rho(b)$, d.h. $\rho(a - b) = 0$. Wegen $\rho(K^\times) \subseteq L^\times = L\backslash\{0\}$ folgt $a - b \notin K^\times$, also $a - b = 0$ und damit $a = b$.

(6) Seien p, q prim. Gibt es einen Körperhomomorphismus $\rho : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$, dann $p = q$ und ρ=id: Angenommen, $p \neq q$. Da ρ injektiv, gibt es keinen Körperhomomorphismus von $\mathbb{F}_q$ nach $\mathbb{F}_p$. Ein Homomorphismus $\rho : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_q$ dagegen wäre wegen $\rho(1_p) = 1_q$ und $\rho(1_p) = \rho((p + 1)1_p) = (p + 1)1_q = p + 1$ nicht wohldefiniert.

Ist nun $\rho : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ ein Homomorphismus, dann $\rho(k) = \rho(1 + ... + 1) = \rho(1) + ... + \rho(1) = 1 + ... + 1 = k$ für jedes $k \in \mathbb{F}_p$.

(7) Sei $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$ *quadratfrei*, d.h. $d^2 \notin \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \mathbb{Q} + \sqrt{d}\mathbb{Q} := \{q + \sqrt{d}r \mid q, r \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$, versehen mit der Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$, ein Körper.

Für $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$; für $d < 0$ lässt sich auch $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{C}$ erweitern.

Speziell ist $\mathbb{C}$ selbst eine *Körpererweiterung* von $\mathbb{R}$: $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$. $\Diamond$

1 Bonusaufgaben I

1.1 Abelsche Gruppen und Morphismen

$*$-**Aufgabe 1**

(a) Sei A eine Menge. Sind $(\mathcal{P}(A), \cap)$ bzw. $(\mathcal{P}(A), \cup)$ ($\mathcal{P}(\cdot)$ die Potenzmenge) abelsche Gruppen?

(b) Sei $X = (x_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ Additionstafel einer abelschen Gruppe $\mathcal{G} = (G, +)$, d.h. $G = \{a_1, ..., a_n\}$ mit a_i paarweise verschieden und $x_{ij} = a_i + a_j$ für alle i, j.

Dann taucht jedes Element aus G in jeder Zeile und in jeder Spalte von X genau einmal auf.

Welche Gruppeneigenschaften werden dabei benötigt?

(c) Seien $\mathcal{G} := (G, *)$ und $\mathcal{H} := (H, \circ)$ zwei abelsche Gruppen. Dann ist auch $\mathcal{G} \times \mathcal{H} := (G \times H, +)$ eine abelsche Gruppe, wobei $G \times H := ((g, h) \mid g \in G,\ h \in H)$ und $(g, h) + (g', h') := (g * g', h \circ h')$.

(d) Die Gruppen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_4$ sind nicht isomorph.

(4 Punkte)

$*$-**Aufgabe 2**

Seien A, B Mengen und $* : A \times A \to A, \circ : B \times B \to B$ Abbildungen („innere Verknüpfungen").

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt „Morphismus zwischen $(A, *)$ und $(B, \circ)$", falls für alle $a, a' \in A$ gilt $f(a * a') = f(a) \circ f(a')$.

Seien nun A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann definiert $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ mit $f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ einen Morphismus zwischen $(\mathcal{P}(B), \cap)$ und $(\mathcal{P}(A), \cap)$ und einen zwischen $(\mathcal{P}(B), \cup)$ und $(\mathcal{P}(A), \cup)$.

(4 Punkte)

$*$-**Aufgabe 3**

Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \ \Leftrightarrow\ \forall X, Y \subseteq A : f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

Dabei ist $f(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X : f(x) = y\}$.

(4 Punkte)

$*$-**Aufgabe 4**

Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gelten:

(a) Die Abbildung $\Phi : G \to G$ mit $\Phi(g) := g^2$ definiert genau dann einen Gruppenhomomorphismus, wenn $\mathcal{G}$ abelsch ist.

(b) Die Abbildung $\Phi : G \to G$ mit $\Phi(g) := g^{-1}$ definiert genau dann einen Gruppenisomorphismus, wenn $\mathcal{G}$ abelsch ist.

(4 Punkte)

(freiwilliger) **Abgabetermin**:
30.11.2009

1.2 Lösungen

Lösung 1

(a) $(\mathcal{P}(A), \cap)$ ist im Allgemeinen (genauer: falls $A \neq \emptyset$) keine abelsche Gruppe: Sonst wäre $A \in \mathcal{P}(A)$ das (eindeutige) neutrale Element bzgl. $\cap$, denn für alle $X \in \mathcal{P}(A)$ gilt wegen $X \subseteq A$, dass $X \cap A = X$. Allerdings findet sich zu $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ kein $X \in \mathcal{P}(A)$ mit $\emptyset \cap X = A$, denn wegen $\emptyset \cap X = \emptyset$ wäre sonst $A = \emptyset$, was unserer Annahme widerspricht. Also besitzt nicht jedes Element in $\mathcal{P}(A)$ ein Inverses und $(\mathcal{P}(A), \cap)$ ist folglich keine (abelsche) Gruppe.

Auch $(\mathcal{P}(A), \cup)$ ist für $A \neq \emptyset$ keine abelsche Gruppe: Andernfalls wäre $\emptyset$ das neutrale Element bzgl. $\cup$, $A \in \mathcal{P}(A)$ besitzt aber kein Inverses: Es gibt kein $X \in \mathcal{P}(A)$ mit $X \cup A = \emptyset$. $\diamondsuit$

(b) Tauche in der Spalte j ein Element $a \in \{a_1, ..., a_n\}$ zweimal auf, etwa in den Zeilen i_1 und i_2 ($i_1 \neq i_2$), d.h. $x_{i_1,j} = a = x_{i_2,j}$. Nach Definition der x_{ij} ist dann $a_{i_1}+a_j = a = a_{i_2}+a_j$. Da $\mathcal{G}$ nach Voraussetzung eine abelsche Gruppe ist, existiert ein Inverses $-a_j$ von a_j in G. Addiert man dieses $-a_j$ zu obiger Gleichung, so ergibt sich $a_{i_1} = a_{i_2}$ im Widerspruch dazu, dass G n Elemente hat.

Also taucht jedes Element aus G höchstens einmal in jeder Spalte auf; da X n Spalten und G n Elemente hat, muss dann jedes Element aus G genau einmal auftauchen.

Für Zeilen i argumentiert man analog.

Wir haben dabei die Existenz der Inversen (I) benötigt, die Existenz des Neutralen (N), um überhaupt über Inverse sprechen zu können, und die Assoziativität (A), um nach Addition von $-a_j$ auf beiden Seiten so umklammern zu können, dass sich $a_j + (-a_j)$ zu Null addiert. Die Kommutativität (K) haben wir nicht gebraucht. $\diamondsuit$

(c) Seien $g, g', g'' \in G$ und $h, h', h'' \in H$. Dann gelten:

(1) **Abgeschlossenheit:** Da $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ Gruppen, sind $g * g' \in G$ und $h \circ h' \in H$, d.h.

$$(g,h) + (g',h') = (g * g', h \circ h') \in G \times H.$$

(2) **Assoziativität:** Da $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ assoziativ, sind $g*(g'*g'') = (g*g')*g''$ und $h\circ(h'\circ h'') = (h\circ h')\circ h''$, d.h.

$$\begin{array}{rcl} & (g,h) + ((g',h') + (g'',h'')) & = & (g,h) + (g' * g'', h' \circ h'') \\ = & (g * (g' * g''), h \circ (h' \circ h'')) & = & ((g * g') * g'', (h \circ h') \circ h'') \\ = & (g * g', h \circ h') + (g'', h'') & = & ((g,h) + (g',h')) + (g'',h''). \end{array}$$

(3) **Kommutativität:** Da $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ abelsch, sind $g * g' = g' * g$ und $h \circ h' = h' \circ h$, d.h.

$$(g,h) + (g',h') = (g * g', h \circ h') = (g' * g, h' \circ h) = (g',h') + (g,h).$$

(4) **Existenz des Neutralen:** Sei 0_* das Neutrale von $\mathcal{G}$ und $0_\circ$ das von $\mathcal{H}$, dann ist $(0_*, 0_\circ) \in G \times H$ neutral bzgl. $+$:

$$(g,h) + (0_*, 0_\circ) = (g * 0_*, h \circ 0_\circ) = (g,h).$$

(5) **Existenz der Inversen:** Seien $-g$ das Inverse von g in $\mathcal{G}$ und $-h$ das Inverse von h in $\mathcal{H}$, dann ist $(-g,-h) \in G \times H$ invers zu (g,h) bzgl. $+$:

$$(g,h) + (-g,-h) = (g * (-g), h \circ (-h)) = (0_*, 0_\circ).$$

Also erfüllt $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ alle Axiome für abelsche Gruppen. $\diamondsuit$

(d) Angenommen, es gäbe einen (Gruppen-)Isomorphismus $\Phi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$. Dann bildet Φ selbstinverse Elemente auf selbstinverse Elemente ab, denn sei $x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mit $x + x = (0,0)$, dann

$$0 = \Phi((0,0)) = \Phi(x+x) = \Phi(x) + \Phi(x),$$

d.h. auch $\Phi(x) \in \mathbb{Z}_4$ ist selbstinvers.

Nun sind offenbar alle vier Elemente von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(11)\}$ selbstinvers, aber nur zwei Elemente von $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$, nämlich 0 und 2. Dann kann Φ aber nicht bijektiv, also insbesondere kein Isomorphismus sein, Widerspruch. $\square$

Lösung 2

Seien $X, Y \in \mathcal{P}(B)$ (d.h. $X, Y \subseteq B$) und $a \in A$ beliebig.

(1) Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \cap Y) &\Leftrightarrow f(a) \in X \cap Y \\ &\Leftrightarrow f(a) \in X \text{ und } f(a) \in Y \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \text{ und } a \in f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

(2) Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \cup Y) &\Leftrightarrow f(a) \in X \cup Y \\ &\Leftrightarrow f(a) \in X \text{ oder } f(a) \in Y \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \text{ oder } a \in f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

□

Lösung 3

$\Rightarrow$: Sei f injektiv. Seien $X, Y \subseteq A$ und $b \in f(X \cap Y)$, dann gilt

$$\begin{aligned} b \in f(X \cap Y) &\Rightarrow \exists z \in X \cap Y : f(z) = b \\ &\Rightarrow \exists x \in X : f(x) = b \text{ und } \exists y \in Y : f(y) = b \\ &\Rightarrow b \in f(X) \text{ und } b \in f(Y) \\ &\Rightarrow b \in f(X) \cap f(Y). \end{aligned}$$

(Hier haben wir nicht mal die Injektivität von f benötigt.) Damit ist $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Seien nun $X, Y \subseteq A$ und $b \in f(X) \cap f(Y)$, dann

$$\begin{aligned} b \in f(X) \cap f(Y) &\Rightarrow \exists x \in X : f(x) = b \text{ und } \exists y \in Y : f(y) = b \\ &\underset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \exists z \in X \cap Y : f(z) = b \\ &\Rightarrow b \in f(X \cap Y). \end{aligned}$$

Damit ist $f(X \cap Y) \supseteq f(X) \cap f(Y)$. Insgesamt also $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ und das war zu zeigen.

$\Leftarrow$: Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$, dann gilt nach Annahme:

$$f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\}.$$

Wegen $f(x) = f(y)$ ist $\#\{f(x)\} \cap \{f(y)\} = 1$, also auch $\#f(\{x\} \cap \{y\}) = 1$, d.h. $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$, d.h. $x = y$. Also ist f injektiv. □

Lösung 4

(a) Sei zunächst Φ ein Gruppenhomomorphismus. Zu zeigen: $\mathcal{G}$ ist kommutativ. Seien dazu $a, b \in G$, dann gilt:

$$abab = (ab)^2 = \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) = a^2b^2 = aabb \qquad \Longrightarrow \qquad ba = ab.$$

Sei nun G abelsch. Zu zeigen: Φ ist ein Homomorphismus. Seien dazu $a, b \in G$, dann

$$\Phi(ab) = (ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2 = \Phi(a)\Phi(b).$$

(b) Sei zunächst Φ ein Gruppenisomorphismus. Zu zeigen: $\mathcal{G}$ ist kommutativ. Seien dazu $a, b \in G$, dann gilt:

$$ba = (a^{-1}b^{-1})^{-1} = \Phi(a^{-1}b^{-1}) = \Phi(a^{-1})\Phi(b^{-1}) = (a^{-1})^{-1}(b^{-1})^{-1} = ab.$$

Sei nun G abelsch. Klar: Φ ist bijektiv. Zu zeigen: Φ ist ein Homomorphismus. Seien dazu $a, b \in G$, dann

$$\Phi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = \Phi(a)\Phi(b).$$

□

2 Vektorräume

2.1 Der n-dimensionale $\mathcal{K}$-Vektorraum

Definition 2.1

Seien $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ ein Körper, V eine Menge und $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ (neue) Abbildungen.

Dann heißt $\mathcal{V} := (V, +, \cdot)$ ein *$\mathcal{K}$-Vektorraum*, falls $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist, d.h.

(1) $\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$;
(2) $\forall v, w \in V : v + w = w + v$;
(3) $\exists 0 \in V : \forall v \in V : v + 0 = v$;
(4) $\forall v \in V : \exists(-v) \in V : v + (-v) = 0$

und für alle $\alpha, \beta \in K,\ v, w \in V$ gelten:

(5) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$;
(6) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
(7) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
(8) $1 \cdot v = v$.

Beispiel 2.2

(1) Versehen wir die Menge $K^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in K\}$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) &:= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n); \\ \alpha(x_1, ..., x_n) &:= (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \end{aligned}$$

$(x, y \in K^n,\ \alpha \in K)$, so wird K^n zu einem $\mathcal{K}$-Vektorraum.

(2) Die Menge F aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x); \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

$(f, g \in F,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R})$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{F}$. $\Diamond$

Definition 2.3

Seien $\mathcal{V} = (V, +, \cdot)$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann heißt $\mathcal{U} := (U, +|_U, \cdot|_U)$ ein *($\mathcal{K}$-)Untervektorraum*, von $\mathcal{V}$ (in Zeichen: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$), falls gelten:

(1) $\forall v, w \in U : v + w \in U$;
(2) $\forall v \in U,\ \alpha \in K : \alpha v \in U$;
(3) $U \neq \emptyset$ $(\Leftrightarrow 0 \in U)$.

Bemerkung 2.4

Ein Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ eines $\mathcal{K}$-Vektorraums $\mathcal{V}$ ist stets selbst wieder ein $\mathcal{K}$-Vektorraum. $\Diamond$

Beispiel 2.5

(1) Seien $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum, $v_1, ..., v_m \in V$, dann ist

$$\mathcal{U} := \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_m\}) := \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m \mid \alpha_1, ..., \alpha_m \in K\}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$.

$\{v_1, ..., v_m\}$ heißt ein *Erzeugendensystem* von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ der von $\{v_1, ..., v_m\}$ *aufgespannte*, Raum. Elemente aus $\mathcal{U}$ werden *Linearkombinationen*, aus $\{v_1, ..., v_m\}$ genannt.

(2) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ und $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$ definieren Unterräume von $\mathcal{F}$.

Entsprechend definiert $\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar}\}$ einen Untervektorraum von $\mathcal{F}' = (F', +, \cdot)$ mit $F' = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ (und $+, \cdot$ wie bei $\mathcal{F}$). $\Diamond$

Definition 2.6

Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum. $\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ heißt *linear unabhängig*, falls für alle $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$ gilt: $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \ldots, \ \alpha_m = 0$.

Andernfalls heißt $\{v_1, ..., v_m\}$ *linear abhängig*.

Bemerkung 2.7

Genau dann ist $\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ linear unabhängig, wenn kein v_i in $\operatorname{span}(\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m\})$ liegt ($i = 1, ..., m$), d.h. wenn keines dieser v_i „überflüssig" ist. $\Diamond$

Definition 2.8

Seien $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig mit $V = \operatorname{span}(\{v_1, ..., v_n\})$.

Dann heißt $\mathfrak{V} := \{v_1, ..., v_n\}$ eine *Basis* von $\mathcal{V}$. n heißt die *Dimension* von $\mathcal{V}$.

Notation 2.9

Im Folgenden seien stets $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. $\Diamond$

Satz 2.10 (Austauschsatz von Steinitz)

Sei $\{w_1, ..., w_m\} \subseteq V$ linear unabhängig, dann ist (gegebenfalls nach Umnummerierung der Basiselemente) auch $\mathfrak{W} := \{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$.

Folgerung 2.11

(1) Die Dimension $\dim \mathcal{V} = n$ ist wohldefiniert, d.h. jede Basis von $\mathcal{V}$ enthält genau n Elemente.

(2) **Jeder endlichdimensionale $\mathcal{K}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis.**

Mehr noch: Ist $\{w_1, ..., w_m\} \subseteq V$ linear unabhängig, so existieren $v_{m+1}, ..., v_n \in V$ derart, dass $\mathfrak{W} := \{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist (Basisergänzungssatz).

(3) Ist $\mathcal{W}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$, dann $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$, wobei „=" genau dann gilt, wenn $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

(4) Zu **jedem** $v \in \mathcal{V}$ existieren **eindeutige** $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

$\alpha_1, ..., \alpha_n$ hängen allerdings von der gewählten Basis $\mathfrak{V}$ ab!. $\Diamond$

Beispiel 2.12

(1) K^n ist ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum mit kanonischer Basis $\mathfrak{E} := \{e^{(1)}, ..., e^{(n)}\}$, wobei $e^{(i)}$ der i-te Einheitsvektor: $e^{(i)} := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 an i-ter Stelle).

(2) $K^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in K\}$ definiert (mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) einen $\mathcal{K}$-Vektorraum. Da $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K^{\mathbb{N}}$ linear unabhängig, ist $K^{\mathbb{N}}$ unendlich dimensional. $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist aber keine Basis von $K^{\mathbb{N}}$: Die Einsfolge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine (endliche!) Linearkombination von Elementen aus $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ ($e^{(i)} := (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$ mit 1 an i-ter Stelle).

(3) $L := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim a_n \text{ existiert}\}$ bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (Grenzwertsätze).

$L_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim a_n = 0\}$ wiederum bildet einen Unterraum von L (und damit insbesondere von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

L, L_0 enthalten ebenfalls $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge: $\lim e^{(i)} = 0$. Also sind L, L_0 unendlichdimensional.

(4) Auch Die Funktionenräume $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sowie ihre Unterräume aus Beispiel 2.5 sind unendlichdimensional: Bereits $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$ ist eine unendliche, linear unabhängige Teilmenge von $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}'$ (aber noch keine Basis).

Wir werden im Folgenden keine unendlichdimensionalen Vektorräume betrachten.

(5) $\mathcal{P} := \{p \in K[X] \mid \deg p \leq n\}$ ist ein $(n+1)$-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum (mit üblicher Addition und skalarer Multiplikation). Eine Basis von $\mathcal{P}$ ist zum Beispiel $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$. $\Diamond$

2.2 Homogene, lineare Gleichungssysteme

Definition 2.13

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $a_{ij} \in K$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$. Dann heißt

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{$*$}$$

ein *homogenes, lineares Gleichungssystem*, (über $\mathcal{K}$) in den *Unbestimmten* $X_1, ..., X_n$.

$$(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt die zu $(*)$ gehörige *Koeffizientenmatrix*.

Ein $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ heißt eine *Lösung* von $(*)$, falls gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}.$$

$\mathbb{L} := \{x \in K^n \mid x \text{ ist eine Lösung von } (*)\}$ heißt die *Lösungsmenge* von $(*)$.

Bemerkung 2.14

(1) Die Menge $K^{m\times n} := \{(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} \mid \forall i,j : a_{ij} \in K\}$ bildet einen $\mathcal{K}$-Vektorraum, wenn man setzt

$$(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} + (b_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} := (a_{ij} + b_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} \qquad \text{und} \qquad \alpha(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} := (\alpha a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m}.$$

(2) Seien $A := (a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} \in K^{m\times n}$ und $x := (x_1, ..., x_n) \in K^n$, dann setzen wir

$$Ax := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Weiter bezeichnen wir die i-te Zeile von A mit A_i und die j-te Spalte mit $A^{(j)}$.

(3) Die Lösungsmenge von $(*)$ lässt sich also schreiben als $\mathbb{L} = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$.

(4) Seien $x, y \in K^n$, dann definieren wir das *Vektorprodukt*

$$x \bullet y := x_1y_1 + ... + x_ny_n.$$

Dann ist $\mathbb{L} = \{x \in K^n \mid \forall i = 1, ..., m : A_i \bullet x = 0\}$. ◊

Satz 2.15

$\mathbb{L}$ ist ein Untervektorraum von K^n, d.h. Linearkombinationen von Lösungen zu $(*)$ sind wieder Lösungen zu $(*)$. Man nennt $\mathbb{L}$ daher auch den *Lösungsraum* von $(*)$.

Bemerkung 2.16

(1) Für $A \in K^{m\times n}$ gilt stets $\dim \operatorname{span}(\{A_1, ..., A_m\}) = \dim \operatorname{span}(\{A^{(1)}, ..., A^{(n)}\})$: Die Dimensionen vom *Zeilenraum* und vom *Spaltenraum* sind identisch. Wir bezeichnen diese als *Rang* von A ($\operatorname{rg}(A)$).

(2) Es gilt stets $\dim \mathbb{L} = n - \operatorname{rg}(A)$. Insbesondere besitzt $(*)$ nur die triviale Lösung $x = 0$, wenn $\operatorname{rg}(A) = n$.

(3) Mit dem **Gauß-Algorithmus** kann man immer eine Basis von $\mathbb{L}$ berechnen. ◊

2.3 Gauß-Algorithmus

Satz 2.17 (Elementare Zeilenoperationen)
Der Zeilenraum $\operatorname{span}(\{A_1, ..., A_m\}) \subseteq K^n$ (und damit auch der Lösungsraum $\mathbb{L}$) ändert sich nicht bei
(a) Multiplikation der i-ten Zeile von $(*)$ mit beliebigem $\lambda \neq 0$;
(b) Addieren eines λ-fachen einer j-ten Zeile zur Zeile i $(i \neq j)$;
(c) Vertauschen der i-ten mit einer j-ten Zeile.

Bemerkung 2.18 (Gauß-Algorithmus)
Durch iterierte Anwendung von (a)-(c) kann man jede Matrix folgendermaßen (in eindeutiger Weise) auf *Stufenform* bringen:

(1) Suche die erste Spalte j_1 mit $a_{ij_1} \neq 0$ für ein i. Sei i_1 das erste solche. Dividiere die i_1-te Zeile durch $a_{i_1 j_1}$ (a), vertausche sie mit der ersten Zeile (c) und mache alle anderen Komponenten der j_1-ten Spalte zu 0 (b).

(2) Suche nach der ersten Spalte j_2 rechts von Spalte j_1 mit einem $a_{j_1 i} \neq 0$, $i \geq 2$. Sei i_2 das erste solche i. Dividiere dann die i_2-te Zeile durch $a_{i_2 j_2}$, vertausche sie mit der zweiten Zeile und mache alle anderen Komponenten der j_2-ten Spalte zu 0.

(3) Iteriere diesen Prozess bis maximal zum n-ten Schritt. Wir erhalten so:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{Zeile } 1 \\ \text{Zeile } 2 \\ \text{Zeile } 3 \\ \\ \text{Zeile } r \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_1 & k_2 & j_1 & j_2 & k_3 & k_4 & j_3 & \cdots & j_r & k_{n-r} \end{matrix} & \end{array}$$

Dann besitzt $(*)$ den selben Lösungsraum wie das zur reduzierten Matrix gehörige, r-zeilige Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} X_{j_1} & & + & a'_{1,k_3}X_{k_3} & + & a'_{1,k_4}X_{k_4} & & + & \cdots & + & a'_{1,k_{n-r}}X_{k_{n-r}} & = 0 \\ & X_{j_2} & + & a'_{2,k_3}X_{k_3} & + & a'_{2,k_4}X_{k_4} & & + & \cdots & + & a'_{2,k_{n-r}}X_{k_{n-r}} & = 0 \\ & & & & & & X_{j_3} & + & \cdots & + & a'_{3,k_{n-r}}X_{k_{n-r}} & = 0 \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & X_{j_r} & + & a'_{r,k_{n-r}}X_{k_{n-r}} & = 0 \end{array} \right. \qquad (**)$$

in den n Unbestimmten $X_{k_1}, ..., X_{k_{n-r}}, X_{j_1}, ..., X_{j_r}$.

Dann besitzt der Lösungsraum $\mathbb{L}$ von $(*)$ bzw. $(**)$ eine Basis aus $n-r$ Elementen der Gestalt

$$x = (x_{k_1}, x_{k_2}, x_{j_1}, x_{j_2}, x_{k_3}, x_{k_4}, x_{j_3}, ..., x_{j_r}, x_{k_{n-r}}) \in K^n.$$

Eine solche ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_{k_1} = 1, & x_{k_i} = 0 & (i \neq 1), & x_{j_l} = -a'_{l,k_1} \quad (l = 1, ..., r) \\ x_{k_2} = 1, & x_{k_i} = 0 & (i \neq 2), & x_{j_l} = -a'_{l,k_2} \quad (l = 1, ..., r) \\ & & & \\ x_{k_{n-r}} = 1, & x_{k_i} = 0 & (i \neq (n-r)), & x_{j_l} = -a'_{l,k_{n-r}} \quad (l = 1, ..., r) \end{array} \right. ,$$

d.h.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0) \\ (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0) \\ (0 & 0 & -a'_{1,k_3} & -a'_{2,k_3} & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0) \\ (0 & 0 & -a'_{1,k_4} & -a'_{2,k_4} & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0) \\ & & & & & & & & & \\ (0 & 0 & -a'_{1,k_{n-r}} & -a'_{2,k_{n-r}} & 0 & 0 & -a'_{3,k_{n-r}} & ... & -a'_{r,k_{n-r}} & 1) \end{array} \right\}.$$

Die *Basislösungen* $x^{(1)}, ..., x^{(n-r)}$ sind also so konstruiert, dass für alle $i = 1, ..., (n-r)$, $j = 1, ..., m$ gilt:

$$A_j \bullet x^{(i)} = 1 \cdot (-a'_{j,k_i}) + a'_{j,k_i} \cdot 1 = 0 \qquad \Diamond$$

2.4 Inhomogene, lineare Gleichungssysteme

Definition 2.19

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $a_{ij}, b_i \in K$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ und $X_1, ..., X_n$ Unbestimmte. Dann heißt

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (+)$$

ein *inhomogenes, lineares Gleichungssystem* (über $\mathcal{K}$) mit *einfacher Koeffizientenmatrix*

$$A := (a_{ij})_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und *erweiterter Koeffizientenmatrix*

$$(A|b) := (a_{ij}|b_i)_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m} := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

heißt *zugehöriges homogenes System*.

Bemerkung 2.20

(1) Genau wie bei homogenen Gleichungssystemen bezeichnen wir $x \in K^n$ als *Lösung* von $(+)$, wenn x alle m Gleichungen von $(+)$ erfüllt. $\mathbb{L}_+$ bezeichne die Menge aller Lösungen von $(+)$.

x ist also genau dann eine Lösung von $(+)$, wenn für alle $i \in \{1, ..., m\}$ gilt: $A_i \bullet x = b_i$.

(2) Sei $x' \in K^n$ irgendeine Lösung von $(+)$ und bezeichne $\mathbb{L}_*$ die Lösungsmenge von $(*)$, dann ist

$$\mathbb{L}_+ = x' + \mathbb{L}_* := \{x' + x \mid x \in \mathbb{L}_*\}.$$

Beachte: Ist $x' \notin \mathbb{L}_*$, dann ist $\mathbb{L}_+$ kein Vektorraum. Man bezeichnet diese Mengen als *affine Räume*.

(3) Mit dem Gaußalgorithmus können wir $(a_{ij}|b_i)_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m}$ umformen zu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ & & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & b'_3 \\ & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & b'_r \\ & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_m \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccccccc} k_1 & k_2 & j_1 & j_2 & k_3 & k_4 & j_3 & \cdots & j_r & k_{n-r} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{Zeile } 1 \\ \text{Zeile } 2 \\ \text{Zeile } 3 \\ \\ \text{Zeile } r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(4) $(+)$ ist genau dann lösbar, wenn $b'_i = 0$ für alle $i \in \{r+1, ..., m\}$. Eine spezielle Lösung ist dann

$$x' := (0, 0, b'_1, b'_2, 0, 0, b'_3, ..., b'_r, 0).$$

Beachte: Im Gegensatz zu homogenen Systemen können inhomogene Systeme unlösbar sein.

(5) Lösbarkeitskriterium: Genau dann besitzt $(+)$ eine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$. $\Diamond$

3 Lineare Abbildungen

3.1 Vektorraum-Homomorphismen

Definition 3.1

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ zwei $\mathcal{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung.

f heißt *linear* oder *Homomorphismus*, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

Wir setzen $\mathrm{Kern}(f) := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ und $\mathrm{Bild}(f) := f(V) = \{f(x) \in W \mid x \in V\}$.

Bemerkung 3.2

(1) Seien $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$. Dann liefert die Linearität von f gerade, dass $f(V')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{W}$ und $f^{-1}(W')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{V}$ definiert.

Insbesondere sind $\mathrm{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$ und $\mathrm{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{W}$.

(2) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann ist $f(V) = \mathrm{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$.

(3) f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. In dem Fall ist $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ eine Basis von $f(V)$.

(4) Ist $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, dann ist f genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

(5) Allgemein nennen wir einen bijektiven Homomorphismus $f : V \to W$ einen *Isomorphismus* und $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ *isomorph (via f)* (in Zeichen: $\mathcal{V} \cong \mathcal{W}$ *via f*). In dem Fall ist $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ eine Basis von $\mathcal{W}$.

(6) Seien $w_1, ..., w_n \in W$ beliebig, dann gibt es genau einen Homomorphismus $f : V \to W$, so dass gilt $f(v_1) = w_1, \ ..., \ f(v_n) = w_n$. ◊

Satz 3.3 (Hauptsatz)

Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum, dann ist $\mathcal{V}$ isomorph zu K^n.

Beweis

(1) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Dann existieren zu jedem $v \in V$ eindeutige $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, vgl. (2.11.4). Also definiert

$$\Psi_{\mathfrak{V}} : V \to K^n, \qquad \Psi_{\mathfrak{V}}(v) := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

eine Abbildung.

(2) $\Psi_{\mathfrak{V}}$ ist linear: Seien $v, w \in V$, $\alpha, \beta \in K$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{V}}(\alpha v + \beta w) &= \Psi_{\mathfrak{V}}(\alpha[\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n] + \beta[\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n]) \\ &= \Psi_{\mathfrak{V}}([\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1]v_1 + ... + [\alpha\alpha_n + \beta\beta_n]v_n) \\ &= ([\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1], ..., [\alpha\alpha_n + \beta\beta_n]) \\ &= \alpha(\alpha_1, ..., \alpha_n) + \beta(\beta_1, ..., \beta_n) \\ &= \alpha\Psi_{\mathfrak{V}}(v) + \beta\Psi_{\mathfrak{V}}(w). \end{aligned}$$

(3) $\Psi_{\mathfrak{V}}$ ist injektiv, denn $\mathrm{Kern}(\Psi_{\mathfrak{V}}) = \{0\}$. Ebenso leicht sieht man, dass $\Psi_{\mathfrak{V}}$ surjektiv ist, denn sei $a := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K$, dann gilt für $v := \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in V$, dass $\Psi_{\mathfrak{V}}(v) = a$.

(4) Also ist insgesamt $\mathcal{V} \cong K^n$. □

Bemerkung 3.4

(1) $\Psi_{\mathfrak{V}}$ heißt die *Koordinatenabbildung* bzgl. $\mathfrak{V}$. Sei $v \in V$, dann heißen $\Psi_{\mathfrak{V}}(v) \in K^n$ der *Koordinatenvektor* von v und die Einträge $\alpha_1, ..., \alpha_n$ die *Koordinaten* von v.

(2) Nach (3.2.5) bildet $\{\Psi_{\mathfrak{V}}(v_1), ..., \Psi_{\mathfrak{V}}(v_n)\}$ eine Basis von K^n. ◊

3.2 Matrizen

Definition 3.5

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $K^{m\times n}$ der Vektorraum der $(m\times n)$-Matrizen über $\mathcal{K}$.

Seien $A=(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}\in K^{m\times n}$ und $B=(b_{ij})_{1\leq j\leq r}^{1\leq i\leq n}\in K^{n\times r}$, dann heißt $A\cdot B\in K^{m\times r}$, gegeben durch

$$(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}\cdot(b_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq r}:=(c_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq r}\quad\text{mit}\quad c_{ij}:=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

das *Matrixprodukt* von A und B und $A^T\in K^{n\times m}$, definiert als

$$[(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}]^T:=(a_{ji})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n},$$

die zu A *transponierte Matrix*.

Bemerkung 3.6

(1) Es sind $c_{ij}=A_i\bullet B^{(j)}$ und $[A^T]_i=A^{(i)},\ [A^T]^{(j)}=A_j$.

(2) Das Matrixprodukt $\cdot$ (auf $K^{n\times n}$) ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt nicht $A\cdot B=B\cdot A$.

(3) $K^{m\times n}\cong K^{m\cdot n}$ via $f:(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}\mapsto(a_{11},...,a_{1n},...,a_{m1},...,a_{mn})$.

(4) Eine Matrix $A\in K^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, falls ein $B\in K^{n\times n}$ existiert mit $AB=\mathrm{Id}=BA$ (wobei Id die *Einheitsmatrix* $(\delta_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}$ bezeichnet). In dem Fall ist B eindeutig bestimmt und heißt die zu A *inverse Matrix* (in Zeichen: $B=A^{-1}$) und es gilt $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A^{-1})=n$.

(5) Die Menge der invertierbaren $(n\times n)$-Matrizen bildet eine multiplikative (nicht abelsche) Gruppe, $\mathrm{GL}(n)$. Insbesondere ist mit A,B auch AB invertierbar (mit $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$).

(6) Seien $A\in K^{n\times n}$, $b\in K^n$ und $(A|b)$ die Koeffizientenmatrix des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax=b$, dann besitzt dieses genau dann eine eindeutige Lösung, wenn A invertierbar ist. Diese ist gegeben durch $x=A^{-1}b$. ♢

Bemerkung 3.7 (Berechnung von A^{-1})

Sei $A\in K^{n\times n}$ invertierbar, d.h. die Matrixgleichung $AX=\mathrm{Id}$ eindeutig lösbar. Dann ist die j-te Spalte $X^{(j)}$ der zu A inversen Matrix A^{-1} gegeben als die (eindeutige) Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX^{(j)}=e^{(j)}$ $(j=1,...,n)$.

Zu lösen sind also die n Systeme $AX^{(1)}=e^{(1)}$, ..., $AX^{(n)}=e^{(n)}$. Dies ist simultan möglich mit dem Gauß-Algorithmus:

$$(A|\mathrm{Id})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{11}&\cdots&a_{1n}&1&&0\\ \vdots&&\vdots&&\ddots&\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}&0&&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&0&x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ &\ddots&&\vdots&&\vdots\\ 0&&1&x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{array}\right)=(\mathrm{Id}|X),$$

dann ist $X=(x_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}$ die zu A inverse Matrix. ♢

Definition 3.8

Zwei Matrizen $A,B\in K^{n\times n}$ heißen *ähnlich* (in Zeichen: $A\sim B$), wenn es eine Matrix $C\in\mathrm{GL}(n)$ gibt mit $B=CAC^{-1}$.

Bemerkung 3.9

$\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation, ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv. ♢

3.3 Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen

Bemerkung 3.10

(1) Die Menge der Homomorphismen von V nach W bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(V,W)$.

(2) Sei $A \in K^{m\times n}$, dann definiert $\mathrm{Lin}(A): K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$ einen Homomorphismus. ♢

Satz 3.11

$\mathrm{Lin}: K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, gegeben durch $A \mapsto \mathrm{Lin(A)}$, definiert einen Isomorphismus.

Beweis

(1) Lin ist linear: Seien $A, B \in K^{n\times n},\ \alpha,\beta \in K$ und $i \in \{1,...,n\}$, dann gilt

$$\mathrm{Lin}(\alpha A + \beta B)(e^{(i)}) = (\alpha A + \beta B)\cdot e^{(i)} = \alpha(A\cdot e^{(i)}) + \beta(B\cdot e^{(i)}) = (\alpha\mathrm{Lin}(A) + \beta\mathrm{Lin}(B))(e^{(i)}).$$

(2) Lin ist injektiv: Sei $A \in \mathrm{Kern}(\mathrm{Lin})$, d.h. $\mathrm{Lin}(A) = 0$, d.h. $Ax = 0$ für alle $x \in K^n$. Dann ist insbesondere $Ae^{(i)} = A^{(i)} = 0$ für alle $i \in \{1,...,n\}$, d.h. $A = 0$. Also $\mathrm{Kern}(\mathrm{Lin}) = \{0\}$.

(3) Lin ist surjektiv: Für $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, setze $A^{(i)} := f(e^{(i)})$ $(i = 1,...,n)$, dann gilt

$$\mathrm{Lin}(A)(e^{(i)}) = A\cdot e^{(i)} = A^{(i)} = f(e^{(i)}),$$

d.h. $\mathrm{Lin}(A)$ und f stimmen auf einer Basis von K^n überein. (3.2.6) $\Rightarrow \mathrm{Lin}(A) = f$. □

Bemerkung 3.12

(1) Wir bezeichnen die zugehörige inverse Funktion $\mathrm{Lin}^{-1}: \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \to K^{m\times n}$ mit Mat. Diese ordnet jedem Homomorphismus von K^n nach K^m eine eindeutig bestimmte, zugehörige Matrix zu.

(2) Sei $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m),\ A := \mathrm{Mat}(f)$. Sei $x \in K^n$ beliebig. Dann gilt: $f(x) = A\cdot x$.

(3) Seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann ist $\mathrm{Lin}(A)\circ\mathrm{Lin}(B) = \mathrm{Lin}(AB)$.

Seien $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ und $g \in \mathrm{Hom}(K^m, K^r)$. Dann ist $\mathrm{Mat}(g\circ f) = \mathrm{Mat}(g)\mathrm{Mat}(f)$.

(4) Bisher haben wir nur Homomorphismen zwischen den Vektorräumen K^n und K^m mit Matrizen (aus $K^{m\times n}$) identifiziert.

Als nächstes wollen wir beliebige $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit $\mathcal{V},\mathcal{W}$ endlichdimensionale $\mathcal{K}$-Vektorräume der Dimensionen $\dim(\mathcal{V}) = n,\ \dim(\mathcal{W}) = m$ mit Matrizen $A \in K^{m\times n}$ identifizieren. Dazu fixieren wir Basen $\mathfrak{V} = (v_1,...,v_n)$ von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{W} = (w_1,...,w_m)$ von $\mathcal{W}$.

Die zu f gehörige Matrix $A = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) \in K^{m\times n}$ wird dann von $\mathfrak{V}$ und von $\mathfrak{W}$ (und der Reihenfolge der Basisvektoren!) abhängen. ♢

Definition 3.13

Seien $\mathcal{V},\mathcal{W},\ \mathfrak{V},\mathfrak{W}$ wie in (3.12.3) und $\Psi_{\mathfrak{V}},\Psi_{\mathfrak{W}}$ die Koordinatenabbildungen aus (3.3).

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Dann heißt

$$A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) := \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}}\circ f\circ\Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})$$

die *Darstellungsmatrix* von f bzgl. der Basen $\mathfrak{V},\mathfrak{W}$.

Bemerkung 3.14

(1) Sei $x \in V$. Dann ist $f(x) = \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A\cdot(\Psi_{\mathfrak{V}}(x)))$, d.h. bis auf Anwendung der (sehr einfachen) Koordinatenabbildungen $\Psi_{\mathfrak{V}}: v_i \mapsto e^{(i)}$ und $\Psi_{\mathfrak{W}}: w_j \mapsto e^{(j)}$ kann man die Bilder unter Homomorphismen durch Multiplikation mit der zugehörigen Darstellungsmatrix berechnen ($\to$ Numerik).

(2) Mehr noch: Auch Linearkombinationen und Verkettungen von Homomorphismen lassen sich in Matrizenoperationen übersetzen ($f: V \to W,\ g: W \to U$ mit den üblichen Bezeichnungen):

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) + \beta\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(g), \qquad \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(g)\cdot\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f).$$

(3) Die zu A gehörige, lineare Abbildung ist $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(A) : K^n \to K^m$ mit $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(A) = \Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}$.

(4) Man kann sich das Ganze anhand des folgenden Diagramms veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[d, "\Psi_{\mathfrak{V}}"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[d] & v_j \arrow[d, "\Psi_{\mathfrak{W}}"'] \\ e^{(i)} & K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(A)"] & K^m & e^{(j)} \end{tikzcd}$$

(5) Für Verkettungen $g \circ f$ (mit $A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f),\ B := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(g)$) sieht das so aus:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d] & U \arrow[d] & & V \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(A)"] & K^m \arrow[r, "\mathrm{Lin}(B)"] & K^r & \rightsquigarrow & K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(BA)"] & K^r \end{tikzcd}$$

Korrekterweise hätten wir in den Diagrammen $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}$ bzw. $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}, \mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ statt nur Lin schreiben müssen, aber wenn klar ist, welchen Basen man benutzt, lässt man die Indizes häufig weg.

Es gilt also auch hier:

$$\mathrm{Lin}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(B) \circ \mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(A) = \mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(B \cdot A)$$ ◊

Bemerkung 3.15 (Berechnung von A)

(a) Zuerst berechnen wir die Bilder unter f der Basisvektoren $f(v_1), ..., f(v_n)$.

(b) Als nächstes bestimmen wir die Koordinatenvektoren $(\alpha_{1i}, ..., \alpha_{mi}) \in K^m$ von $f(v_i)$ $(i = 1, ..., n)$.

(c) Dann ist $A := (\alpha_{ij})_{1\le j\le m}^{1\le i\le n}$ die gesuchte Matrix:

$$\begin{aligned} f(v_i) &= \alpha_{1i}w_1 + ... + \alpha_{mi}w_m \\ &= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}((\alpha_{1i}, ..., \alpha_{mi})) \\ &= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A^{(i)}) \\ &= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A \cdot e^{(i)}) \\ &= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A \cdot \Psi_{\mathfrak{V}}(v_i)). \end{aligned}$$

Die Abbildung liefert also auf einer Basis von V und damit auf ganz V das Gewünschte.

In den Spalten von A stehen die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren aus $\mathfrak{V}$. ◊

Bemerkung 3.16

(1) Beim Nachweis in (c), dass $A = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f)$ ist, hätten wir auch umgekehrt vorgehen können:

$$\begin{aligned} A \cdot e^{(i)} &= A^{(i)} \\ &= (\alpha_{1i}, ..., \alpha_{mi}) \\ &= \Psi_{\mathfrak{W}}(\alpha_{1i}w_1 + ... + \alpha_{mi}w_m) \\ &= \Psi_{\mathfrak{W}}(f(v_i)) \\ &= \Psi_{\mathfrak{W}}(f(\Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(e^{(i)}))) \\ &= (\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) \\ &= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) \cdot e^{(i)}. \end{aligned}$$

Die Spalten von A stimmen also mit denen von $\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})$ überein $\Rightarrow A = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})$.

(2) Sind $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ nicht selbst bereits die Vektorräume K^n, K^m, so erhalten wir **niemals** eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für $x \in V$! Das Ganze funktioniert dann nur mit Hilfe der Koordinatenabbildungen $\Psi_{\mathfrak{V}}, \Psi_{\mathfrak{W}}$. ◊

3.4 Basistransformation

Definition 3.17

Seien $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ Basen von $\mathcal{V}$. Dann heißt

$$A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id}) = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}'} \circ \Psi_{\mathfrak{B}}^{-1})$$

die *Transformationsmatrix* bzgl. $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$.

Bemerkung 3.18

(1) $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id})$ übersetzt also Koordinaten bzgl. der Basis $\mathfrak{B}$ in Koordinaten bzgl. $\mathfrak{B}'$.

(2) Das zugehörige Diagramm ist

$$\begin{tikzcd}
v_i \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\Psi_{\mathfrak{B}}"] & V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & V \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\Psi_{\mathfrak{B}'}"] & v_i' \arrow[d] \\
e^{(i)} & K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(A)"] & K^n & e^{(i)}
\end{tikzcd}$$

(3) $A = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id})$ ist invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}' & & \mathfrak{B} & & \mathfrak{B}' \\
V \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & & V \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & & V \arrow[d] \\
K^n \arrow[rr, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id})"] & & K^n \arrow[rr, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id})"] & & K^n \\
\mathfrak{E}_n & & \mathfrak{E}_n & & \mathfrak{E}_n
\end{tikzcd}$$

Die Transformationsmatrix bzgl. $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ ist also invers zur Transformationsmatrix bzgl. $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}$.

(4) Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ endlichdimensionale $\mathcal{K}$-Vektorräume mit Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{W}$ und seien $\mathfrak{B}', \mathfrak{W}'$ weitere Basen von $\mathcal{V}, \mathcal{W}$. Sei weiter $f : V \to W$ ein Homomorphismus.

Betrachte das zugehörige Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}' & & \mathfrak{B} & & \mathfrak{W} & & \mathfrak{W}' \\
V \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & & V \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & W \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & & W \arrow[d] \\
K^n \arrow[rr, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id})"] & & K^n \arrow[rr, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{W}}(f)"] & & K^m \arrow[rr, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{W}'}(\mathrm{id})"] & & K^m \\
\mathfrak{E}_n & & \mathfrak{E}_n & & \mathfrak{E}_m & & \mathfrak{E}_m
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{W}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{W}'}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{W}}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}).$$

(5) Seien speziell $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ zwei Basen von $\mathcal{V}$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$, dann sind $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ ähnlich:

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot [\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id})]^{-1}.$$

(6) Seien speziell $\mathcal{V} = K^n$, $\mathcal{W} = K^m$ und $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. Dann ist $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{E}_m}(f) = \mathrm{Mat}(f)$.

Seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{W}$ weitere Basen von K^n, K^m, dann gilt $(\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}}) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}),\ \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}}) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_m}^{\mathfrak{W}}(\mathrm{id}))$

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{W}}(f) = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}}) \cdot \mathrm{Mat}(f) \cdot \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}})^{-1}.$$

Sei $x \in K^n$ beliebig, dann gilt $f(x) = A \cdot x$ mit der Matrix

$$A = \mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{W}}(f) \cdot \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}}).$$ $\Diamond$

4 Bonusaufgaben II

4.1 Vektorräume und lineare Abbildungen

∗-**Aufgabe 5**

(1) Lösen Sie das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} X_1 & + & X_2 & & & + & 2X_4 & & & + & 4X_6 & = & 8 \\ 2X_1 & + & 2X_2 & & & + & 4X_4 & & & + & 8X_6 & = & 16 \\ & & & & X_3 & - & 5X_4 & & & + & 7X_6 & = & 2 \\ & & & & & & & & X_5 & + & X_6 & = & 3 \\ & & & & & & & - & X_5 & - & X_6 & = & -3 \end{array}\right. \qquad (+)$$

(2) Invertieren Sie die folgende Matrix über $\mathbb{F}_2$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

∗-**Aufgabe 6**

Berechnen Sie sämtliche Potenzen A^n, B^n, C^n der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -9 & -25 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

∗-**Aufgabe 7**

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ $\mathcal{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Seien $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$. Dann definiert $f(V')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{W}$ und $f^{-1}(W')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{V}$.

(2) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann ist $f(V) = \text{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$.

Ist f injektiv, dann ist $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ eine Basis von $f(V)$.

(3) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Seien $w_1, ..., w_n \in W$ beliebig, dann gibt es genau einen Homomorphismus $f : V \to W$, so dass gilt $f(v_1) = w_1,\ ...,\ f(v_n) = w_n$.

(4 Punkte)

∗-**Aufgabe 8**

(1) Seien $\mathcal{V} := \mathbb{R}^3$ mit der Basis $\mathfrak{V} := (v_1, v_2, v_3) := ((1, 0, -1),\ (1, 1, 1),\ (1, 0, 0))$ und $\mathcal{W} := \mathbb{R}^2$ mit der Basis $\mathfrak{W} := (w_1, w_2) := ((0, 1),\ (1, 0))$ versehen.

Weiter sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f((x_1, x_2, x_3)) := (x_1 + x_2,\ 2x_3 - x_1)$.

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\text{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f)$ von f bzgl. den Basen $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

(2) Wir versehen den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathfrak{V} := ((1, 1),\ (1, 2))$ und $\mathfrak{W} := ((0, 1),\ (-1, 1))$.

Berechnen Sie die Matrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{V}$ nach $\mathfrak{W}$ vermittelt (also $\text{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\text{id})$).

(4 Punkte)

(freiwilliger) **Abgabetermin**:
25.01.2010

4.2 Lösungen

Lösung 5

(1) **Schritt 1:** Berechnung der reduzierten Zeilenstufenform der Darstellungsmatrix zu (+):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist (+) lösbar, das zugehörige homogene System $(*)$ besitzt $n - r = 6 - 3 = 3$ Basislösungen.

Schritt 2: Lösung des homogenen Systems $(*)$:

$$\mathbb{L}_* = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{array}{c} (-1,1,0,0,0,0), \\ (-2,0,5,1,0,0), \\ (-4,0,-7,0,-1,1) \end{array}\right\}\right).$$

Schritt 3: Eine spezielle Lösung von (+) ist $x' := (8,0,2,0,3,0)$, also ist die Lösungsmenge von (+)

$$\mathbb{L}_+ = x' + \mathbb{L}_*.$$

(2) Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix zu A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

Lösung 6

(1) Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} -36 & -48 & -48 \\ -18 & -24 & -24 \\ 45 & 60 & 60 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also auch $A^n = 0$ für alle $n \geq 3$.

(2) Wegen

$$B^2 = \begin{pmatrix} -9 & -25 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} = B$$

gilt $B^n = B$ für alle $n \geq 1$.

(3) Aus

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad ...$$

sieht man, dass die Einträge von C^n Folgeglieder der Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, ...)$ sind.

Beweis per Induktion:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}.$$

Gelte die Behauptung also für n, dann

$$C^n = C^{n-1} \cdot C = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} & f_n \\ f_{n-1} + f_{n-2} & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Lösung 7

(1) $f(V')$ ist ein Unterraum von $\mathcal{W}$:

(a) $0 \in V' \Rightarrow 0 = f(0) \in f(V')$.

(b) Seien $x, y \in f(V')$, dann gibt es $v, w \in V'$ mit $f(v) = x,\ f(w) = y$. Da V' Unterraum von $\mathcal{V}$, folgt $v + w \in V' \Rightarrow x + y = f(v) + f(w) = f(v + w) \in f(V')$.

(c) Seien $x \in f(V'),\ \alpha \in K$, dann gibt es $v \in V'$ mit $f(v) = x$. Da V' Unterraum von $\mathcal{V}$, folgt $\alpha v \in V' \Rightarrow \alpha x = \alpha f(v) = f(\alpha v) \in f(V')$. $\diamondsuit$

$f^{-1}(W')$ ist ein Unterraum von $\mathcal{V}$:

(a) $0 \in W' \Rightarrow 0 \in f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(W') \Rightarrow 0 \in f^{-1}(W')$.

(b) Seien $x, y \in f^{-1}(W')$, dann liegen $f(x), f(y)$ in W'. Da W' ein Unterraum von $\mathcal{W}$ ist, folgt $f(x + y) = f(x) + f(y) \in W' \Rightarrow x + y \in f^{-1}(W')$.

(c) Seien $x \in f^{-1}(W'),\ \alpha \in K$, dann liegt $f(x)$ in W'. Da W' ein Unterraum von $\mathcal{W}$ ist, folgt $f(\alpha x) = \alpha f(x) \in W' \Rightarrow \alpha x \in f^{-1}(W')$. $\diamondsuit$

(2) Sei $x \in f(V)$, dann gibt es $v \in V$ mit $f(v) = x$. Da $\mathfrak{V}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, gibt es $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, also $x = f(v) = \alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n) \in \text{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$. Also ist $f(V) = \text{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$. $\diamondsuit$

Sei nun f injektiv. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $\alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n) = 0$, dann $f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0$; da $\text{Kern}(f) = \{0\}$, also $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$. Da $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, müssen dann schon $\alpha_1 = 0,\ ...,\ \alpha_n = 0$ sein. Also ist auch $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig. $\diamondsuit$

(3) Sei $v \in V$ beliebig, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ die (eindeutigen) Skalare mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Wir definieren $f : V \to W$ durch $f(v) := \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$.

(a) Da W Vektorraum, gilt $f(v) \in W$, d.h. f ist wohldefiniert.

(b) Seien $v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$, dazu $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ und $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ mit $w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha v + \beta w) &= f(\alpha(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n)) \\ &= f((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)w_1 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)w_n \\ &= \alpha(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n) + \beta(\beta_1 w_1 + ... + \beta_n w_n) \\ &= \alpha f(v) + \beta f(w). \end{aligned}$$

Also ist f linear.

(c) f ist eindeutig: Sei g ein weiterer solcher Homomorphismus. Sei $v \in V,\ v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, dann

$$g(v) = g(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 g(v_1) + ... + \alpha_n g(v_n) = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n = f(v).$$

Also stimmen f, g überein. $\square$

Lösung 8

(1) **Möglichkeit 1:** Nach (3.18.6) gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) &= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) \\
&= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})\mathrm{Mat}(f)(\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}}))^{-1} \\
&= [(\Psi_{\mathfrak{W}}(e^{(1)}), \Psi_{\mathfrak{W}}(w^{(2)}))^{-1}][f(e^{(1)}), f(e^{(2)}), f(e^{(3)})][\Psi_{\mathfrak{V}}(e^{(1)}), \Psi_{\mathfrak{V}}(e^{(2)}), \Psi_{\mathfrak{V}}(e^{(3)})] \\
&= [(w_1, w_2)^{-1}][f(e^{(1)}), f(e^{(2)}), f(e^{(3)})][v_1, v_2, v_2] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Nach (3.15):

(a) Berechnung der Bilder unter f der Basisvektoren:

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Koordinatenvektoren dieser Bilder bzgl. $\mathfrak{W}$:

$$f(v_1) = -3w_1 + 1w_2, \qquad f(v_2) = 1w_1 + 2w_2, \qquad f(v_3) = -1w_1 + 1w_2.$$

(c) Darstellungsmatrix von f bzgl. $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Berechnung der Transformationsmatrix:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(\mathrm{id}) &= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) \\
&= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})$ haben wir wieder (3.7) benutzt:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

5 Eigenwerttheorie

5.1 Die Determinantenabbildung

Definition 5.1

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$ und $A \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\det_n(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \det_{n-1} A_{i_0 j} \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i j_0} \det_{n-1} A_{i j_0} \right)$$

die *Determinante* von A (wobei $\det_1(A) = \det_1((a)) := a$).
$A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ bezeichnet dabei diejenige Matrix, die aus A nach Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

Bemerkung 5.2

(1) $\det := \det_n$ definiert eine Abbildung $\det : K^{n\times n} \to K$. Diese hat die folgenden Eigenschaften:

(a) det ist *multilinear (linear in jeder Zeile)*, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha A_i' + \beta A_i'' \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i' \\ \vdots \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(b) det ist *alternierend*, d.h. gibt es $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, mit $A_i = A_j$, dann $\det(A) = 0$.

(c) det ist *normiert*, d.h. $\det(\mathrm{Id}) = 1$.

(d) $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile von A ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert wird.

(e) $\det(A)$ ändert (nur) sein Vorzeichen, wenn zwei Zeilen von A vertauscht werden.

(2) Die Eigenschaften (a),(b),(c) *charakterisieren* det, d.h. es gibt (zu jedem n) genau eine Abbildung $K^{n\times n} \to K$, die multilinear, alternierend und normiert ist (Hauptsatz der Determinantentheorie).

(3) Seien $A, B \in K^{n\times n}$, dann gelten $\det(A^T) = \det(A)$ und $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(4) Seien $C \in K^{m\times m}$ und $C' \in K^{m'\times m'}$. Dann gilt:

$$\det_{m+m'} \left(\begin{array}{c|c} C & * \\ 0 & C' \end{array}\right) = \det_m(C) \cdot \det_{m'}(C') \quad \text{und insbesondere} \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n.$$

(5) Spezielle Entwicklungsformeln:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc; \qquad \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = (aB'c'' + a'b''c + a''bc') - (a''b'c + a'bc'' + ab''c').$$

(6) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$. Die Inverse zu A ist dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [(-1)^{i+j} \det(A_{ji})]_{1\le j\le n}^{1\le i\le n} =: \frac{A^\#}{\det(A)}.$$

$A^\#$ heißt die *adjungierte Matrix* zu A.

Speziell für (2×2)-Matrizen gilt also:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(7) Nach (3): $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ und $\det(A^\#) = \det(A)^{n-1}$ (insbes. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A^\#) = 0$). $\Diamond$

5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.3

Seien $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Existieren $v \in V\backslash\{0\}$ und $\lambda \in K$ mit $f(v) = \lambda v$, dann heißt λ ein *Eigenwert* von f und v ein zu λ gehöriger *Eigenvektor*.

Bemerkung 5.4

(1) Sei λ ein Eigenwert von f, dann heißt $\mathrm{Eig}(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \subseteq \mathcal{V}$ der *Eigenraum* zu λ.

(2) Wir sagen, ein $A \in K^{n\times n}$ hat *Diagonalgestalt*, falls $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. ◊

Satz 5.5 (Hauptsatz)

$\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ ist eine Basis aus Eigenvektoren zu $f \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ hat Diagonalgestalt.

In dem Fall gilt $A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit λ_i Eigenwert zu v_i.

Beweis

$\Rightarrow$: Wir müssen zeigen, dass für die i-te Spalte von A gilt $A^{(i)} = \lambda_i e^{(i)}$.

$$A^{(i)} = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot e^{(i)} = (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) = (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ f)(v_i) = \Psi_{\mathfrak{V}}(\lambda_i v_i) = \lambda_i \Psi_{\mathfrak{V}}(v_i) = \lambda_i e^{(i)}.$$

$\Leftarrow$: Wir müssen zeigen, dass $f(v_i) = \lambda_i v_i$.

$$f(v_i) = \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot \Psi_{\mathfrak{V}}(v_i)) = \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot e^{(i)}) = \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(\lambda_i e^{(i)}) = \lambda_i \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(e^{(i)}) = \lambda_i v_i. \quad \square$$

Bemerkung 5.6

(1) Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind stets linear unabhängig.

Insbesondere kann es nicht mehr als n paarweise verschiedene Eigenwerte geben. Zu einem Eigenwert können aber mehrere linear unabhängige Eigenvektoren existieren.

Wir bezeichnen $\mu_g(\lambda) := \dim \mathrm{Eig}(\lambda)$ als die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ.

(2) λ ist ein Eigenwert zu $f \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\}$.

(3) Sei $A \in K^{n\times n}$, dann heißt λ ein *Eigenwert* von A, falls es ein $v \in K^n\backslash\{0\}$ gibt mit $Av = \lambda v$. v heißt dann ein *Eigenvektor* zu A.

(4) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \sim B$, dann sind die Eigenwerte von A gleich den Eigenwerten von B:

$$Av = \lambda v \Rightarrow B(Cv) = CAC^{-1}(Cv) = C(Av) = C(\lambda v) = \lambda(Cv),$$

d.h. ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann ist Cv ein Eigenvektor von B zu λ.

Insbesondere sind Eigenwerte invariant unter Basistransformation (im Gegensatz zu den zugehörigen Eigenvektoren).

Weiter sind die Eigenwerte von $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ gerade diejenigen von $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ für eine beliebige Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathcal{V}$.

Entsprechend sind die Eigenwerte von $A \in K^{n\times n}$ gleich denen von $\mathrm{Lin}(A) : K^n \to K^n$.

(5) Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$, dann setzen wir $\det(f) := \det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f))$.

Die Definition ist unabhängig von der gewählten Basis: Sei $\mathfrak{V}'$ eine weitere Basis von $\mathcal{V}$, dann

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}'}(f)) = \det(C \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot C^{-1}) = \det(C)\det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f))[\det(C)]^{-1} = \det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)).$$

(6) λ ist ein Eigenwert zu $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda\mathrm{id}) = 0$. ◊

5.3 Das charakteristische Polynom

Definition 5.7

Sei $A \in K^{n\times n}$, dann heißt $\chi(A) := \det(A - t\mathrm{Id})$ das *charakteristische Polynom* zu A.

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$, dann heißt $\chi(f) := \chi(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f))$ das *charakteristische Polynom* zu f.

Bemerkung 5.8

(1) Nach 5.6.5 ist $\chi(f)$ unabhängig von der gewählten Basis $\mathfrak{V}$.

(2) Setzt man $\mathrm{spur}(A) := a_{11} + a_{22} ... + a_{nn}$ (*Spur* von A), dann hat $\chi(A)$ die Darstellung

$$\chi(A)(t) = (-t)^n + \mathrm{spur}(A)(-t)^{n-1} + ... + \det(A).$$

Insbesondere ist die Spur ebenso wie die Determinante invariant unter Ähnlichkeitstransformation.

(3) Nach 5.6.6 sind die Eigenwerte von A gerade die Nullstellen von $\chi(A)$.

(4) Sei $V = \mathbb{R}^{2m+1}$, dann hat jedes $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mindestens einen Eigenwert (denn nach dem Zwischenwertsatz hat $\chi(f)$ mindestens eine Nullstelle).

(5) Sei $\chi(f)(\lambda) = 0$. Die Anzahl $\mu_a(\lambda)$ an Linearfaktoren $(t - \lambda)$, die sich von $\chi(f)$ abspalten lässt, heißt die *algebraische Vielfachheit* von λ. Es gilt stets $\mu_a(\lambda) \geq \mu_g(\lambda)$.

(6) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann zerfällt $\chi(A)$ zwar über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren (Fundamentalsatz der Algebra), aber $\mathbb{C}^n$ besitzt nur dann eine Basis aus Eigenvektoren zu A, wenn für jeden Eigenwert λ von A gilt $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$.

Der Fundamentalsatz der Algebra ist ein sehr tiefliegendes Resultat, das zum ersten Mal (mit analytischen Methoden) 1799 von Carl Friedrich Gauß im Rahmen seiner Dissertiation gegeben wurde. Es existieren inzwischen zahlreiche Beweisvarianten aus den verschiedensten Bereichen der Mathematik, zum Beispiel über *Holomorphieargumente* (Funktionentheorie), *Homotopien* (Topologie) oder *Galois-Theorie* (Algebra).

(7) Die Berechnung des charakteristischen Polynoms kann bei großen Matrizen (auch numerisch) sehr aufwendig sein. Die Berechnung der (komplexen) Nullstellen eines Polynoms *(Auflösung in Wurzeln)* ist nicht einmal immer möglich; neben der allseits bekannten Formel für quadratische Gleichungen existieren zwar auch Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades *(Cardano & Ferrari, 1545)*; eine Formel für Gleichungen fünften Grades kann aber beispielsweise nicht existieren *(Nichtauflösbarkeit der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$, Abel, 1826)*. $\diamondsuit$

Satz 5.9 (Hamilton-Cayley)

Seien $A \in K^{n\times n}$ bzw. $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$, dann gelten $\chi(f)(f) = 0$ bzw. $\chi(A)(A) = 0$.

Bemerkung 5.10

Wegen $\chi(A) = \det(A - t\mathrm{Id})$ mag es auf den ersten Blick trivial erscheinen, dass $\chi(A)(A) = \det(0) = 0$. Allerdings vertauscht die Berechnung der Determinante (in t) nicht mit der Einsetzung von A in t: Man sieht sofort, dass nicht einmal die resultierenden Objekte passen, denn $\det(0) = 0 \in K$, aber $\chi(A)(A) = 0 \in K^{n\times n}$. $\diamondsuit$

Korollar 5.11

(1) Sei $A \in K^{n\times n}$, dann ist $\mathrm{span}(\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subseteq K^{n\times n}$ höchstens n-dimensional.

(2) Sei A invertierbar, dann ist $A^{-1} \in \mathrm{span}(\{A^1, ..., A^{n-1}\})$ mit

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + ... + a_2 A + a_1 \mathrm{Id}),$$

wobei $a_1, ..., a_{n-1}$ die Koeffizienten von $\chi(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$.

5.4 Diagonalisierung und Trigonalisierung

Definition 5.12

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Diagonalmatrix B gibt mit $A \sim B$.

$f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ heißt *diagonalisierbar*, falls eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{V}$ existiert, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ Diagonalgestalt hat.

Bemerkung 5.13

(1) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mathrm{Lin}(A) \in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$ diagonalisierbar ist.

(2) Drehmatrizen zum Winkel $\theta \neq 0, \pi$ haben keine reellen Eigenwerte, sind aber über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar: Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt

$$\det(A - \lambda \mathrm{id}) = 0 \Leftrightarrow (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta},$$

d.h. A besitzt zwei Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}^2$ damit eine Basis aus Eigenvektoren zu A.

(3) Nicht alle Matrizen sind (über $\mathbb{C}$) diagonalisierbar (und damit erst recht nicht über $\mathbb{R}$). Betrachte etwa die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v_1 + v_2 & = & \lambda v_1 \\ v_2 & = & \lambda v_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \lambda = 1,\ v \in \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Also hat A über $\mathbb{R}$ (und auch über $\mathbb{C}$) nur einen Eigenwert $\lambda = 1$ mit doppelter algebraischer Vielfachheit $\mu_a(\lambda) = 2$, aber nur einfacher geometrischer Vielfachheit $\mu_g(\lambda) = 1$. Insbesondere besitzen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}^2$ keine Basis aus Eigenvektoren zu A. ♢

Satz 5.14

Seien $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist diagonalisierbar;

(b) $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis $\mathfrak{B}$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

(c) $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis $\mathfrak{B}$ aus Eigenvektoren zu f;

(d) $\chi(f)$ zerfällt über K in Linearfaktoren und für alle Nullstellen λ von $\chi(f)$ gilt $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$.

(e) Es gibt Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ zu f mit $\mathcal{V} = \mathrm{Eig}(\lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(\lambda_k)$.

Bemerkung 5.15

Wir nennen $A \in K^{n\times n}$ eine *Trigonalmatrix*, falls $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. ♢

Definition 5.16

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *trigonalisierbar*, falls es eine Trigonalmatrix B gibt mit $A \sim B$.

$f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ heißt *trigonalisierbar*, falls eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{V}$ existiert, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ Trigonalgestalt hat.

Bemerkung 5.17

Genau dann ist eine Matrix A trigonalisierbar, wenn $\chi(A)$ in Linearfaktoren zerfällt. Die Eigenwerte von A sind dann gerade die Diagonalelemente der Trigonalmatrix zu A. ♢

Korollar 5.18

Nach dem Fundamentalsatz ist über $\mathbb{C}$ jede Matrix trigonalisierbar.

6 Euklidische und unitäre Vektorräume

6.1 Räume mit Skalarprodukt

Definition 6.1

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in \mathcal{V}$. Erfüllt eine Abbildung $s(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} s(\alpha x + \beta y, z) &= \overline{\alpha} s(x, z) + \overline{\beta} s(y, z) \quad \text{und} \\ s(x, y) &= \overline{s(y, x)}, \end{aligned}$$

dann heißt s eine *Bilinearform (Hermitesche Form)* auf $\mathcal{V}$.

Ist s zusätzlich *positiv definit*, d.h. $s(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$, dann heißt s ein *Skalarprodukt* auf $\mathcal{V}$. Wir schreiben dann $s := \langle \cdot, \cdot \rangle$ und wir nennen $\mathcal{V}$ einen *euklidischen (unitären) Vektorraum*.

Bemerkung 6.2

(1) Bilinearformen bzw. Hermitesche Formen sind stets linear in der zweiten Komponenten:

$$s(x, \alpha y + \beta z) = \overline{s(\alpha y + \beta z, x)} = \alpha \overline{s(y, x)} + \beta \overline{s(z, x)} = \alpha s(x, y) + \beta s(x, z).$$

(2) Ein Skalarprodukt induziert stets eine *Norm* auf $\mathcal{V}$: Definiere $|| \cdot || : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\boxed{||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}} \; (x \in \mathcal{V}),$$

dann gelten für alle $x \in \mathcal{V}$:

$$||x|| = 0 \Rightarrow x = 0, \qquad ||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||, \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

(3) Eine Norm wiederum induziert stets eine *Metrik* auf $\mathcal{V}$: Definiere $d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ durch

$$\boxed{d(x, y) := ||x - y||} \; (x, y \in \mathcal{V}),$$

dann gelten für alle $x, y, z \in \mathcal{V}$:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad d(x, y) = d(y, x), \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(4) Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$||x - y||^2 = ||x||^2 - 2\langle x, y \rangle + ||y||^2.$$

(5) Es gilt die Parallelogrammregel:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

(6) Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y|| \qquad \text{und} \qquad |\langle x, y \rangle| = ||x|| \, ||y|| \Leftrightarrow x, y \text{ sind linear abhängig.}$$

(7) Wir nennen x, y *orthogonal* (in Zeichen: $x \perp y$), falls gilt $\langle x, y \rangle = 0$.

(8) Ist $\mathcal{V}$ euklidisch, dann induziert $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine *Winkelfunktion* $\varphi := \sphericalangle(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [0, \pi]$ implizit durch

$$\boxed{\cos(\varphi) := \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||}} \qquad (x, y \in \mathcal{V}).$$

Da nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt $\frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||} \in [-1, 1]$ und $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv ist, ist $\sphericalangle(x, y)$ wohldefiniert. $\lozenge$

6.2 Orthogonalräume

Bemerkung 6.3 (Direkte Summen)

(1) Seien zunächst allgemein $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ Unterräume von $\mathcal{V}$. Dann definieren auch $U + W := \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$ und $U \cap W$ Unterräume von $\mathcal{V}$, die wir mit $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ bezeichnen.

(2) Ist $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}$, dann heißt $\mathcal{V}$ die *direkte Summe* von $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ ($\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$).

(3) Ist $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, dann lässt sich **jedes** $v \in \mathcal{V}$ **eindeutig** zerlegen in $v = u + w$ mit $u \in U,\ w \in W$.

Die *Projektionen* $\pi_U : V \to U,\ v \mapsto u$ und $\pi_W : V \to W,\ v \mapsto w$ sind surjektiv und linear.

(4) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, dann existiert genau ein $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

Sei $\mathfrak{U}$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Nach dem Basisergänzungssatz existiert dann eine endliche, linear unabhängige Teilmenge $\mathfrak{W}$ von V, so dass $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{W}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ bildet. Dann ist $\mathfrak{W}$ eine Basis von $\mathcal{W}$.

Insbesondere gilt die Erste Dimensionsformel: $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{W}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

(5) Seien $\mathcal{V}, \mathcal{X}$ zwei $\mathcal{K}$-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, X)$. Seien $\mathfrak{U}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathfrak{X}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathcal{X}$. Dann ist $\mathfrak{W} := f^{-1}(\mathfrak{X}) \subseteq V$ Basis eines Unterraumes $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathfrak{W} \cup \mathfrak{U}$ bildet eine Basis von $\mathcal{V}$, d.h. $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

Insbesondere gilt die Zweite Dimensionsformel: $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

(6) Seien $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ und $f \in \mathrm{Hom}(U, V),\ g \in \mathrm{Hom}(W, V)$. Dann existiert genau eine gemeinsame lineare Fortsetzung $h : V \to V$, d.h. genau ein $h \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $h|_U = f$ und $h|_W = g$.

Definition 6.4

Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $s = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$.

$\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ heißt ein *Orthogonalsystem*, falls $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$, und ein *Orthonormalsystem*, falls zusätzlich $||v_i|| = s(v_i, v_i) = 1$ für alle i.

Entsprechend heißt eine Basis $\mathfrak{O}$ von $\mathcal{V}$ *Orthogonalbasis* bzw. *Orthonormalbasis*, falls sie ein Orthogonalsystem bzw. ein Orthonormalsystem von $\mathcal{V}$ bildet.

Bemerkung 6.5 (Orthogonalsysteme)

(1) Sei $\mathfrak{O} := \{v_1, ..., v_m\}$ ein Orthogonalsystem. Dann ist $\mathfrak{O}$ linear unabhängig: Sei $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$, dann gilt für beliebiges $i \in \{1, ..., m\}$:

$$0 = \langle v_i, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m \rangle = \alpha_1 \langle v_i, v_1 \rangle + ... + \alpha_m \langle v_i, v_m \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i = 0.$$

(2) Orthonormalisierungsverfahren von Gram und Schmidt: Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann ist $\mathfrak{O} := \{w_1, ..., w_n\}$ mit

$$w_1 := \frac{v_1}{||v_1||}, \qquad w_{m+1} := \frac{w'_{m+1}}{||w'_{m+1}||}, \qquad w'_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v_{m+1} \rangle v_i$$

eine Orthobormalbasis von $\mathfrak{V}$.

(3) Seien $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Wir schreiben $\mathcal{U} \perp \mathcal{W}$, falls $u \perp w$ für alle $u \in U,\ w \in \mathcal{W}$, und $\mathcal{V} = \mathcal{U} \operatorname{⦹} \mathcal{W}$, falls $\mathcal{U} \perp \mathcal{W}$ und $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$. $\mathcal{V}$ heißt dann die *orthogonale Summe* von $\mathcal{U}, \mathcal{W}$.

Orthogonale Summen sind immer direkt, d.h. $\mathcal{V} = \mathcal{U} \operatorname{⦹} \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

(4) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Dann definiert auch $\mathcal{U}^\perp := \{v \in V \mid v \perp u\}$ einen Unterraum von $\mathcal{V}$, den *Orthogonalraum* zu $\mathcal{U}$. Es gelten dann $\mathcal{U} \perp \mathcal{U}^\perp$ und $\mathcal{V} = \mathcal{U} \operatorname{⦹} \mathcal{U}^\perp$.

(5) Gelte nur $M \subseteq V$, dann ist dennoch $M^\perp \subseteq \mathcal{V}$ und es gilt $M^\perp = (\mathrm{span}(M))^\perp$.

(6) Sei $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der kanonische euklidische Raum. Sei $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^n$ der Zeilenraum eines homogenen, linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{L} = \mathcal{Z}^\perp$ (da $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = x \bullet y$).

In $\mathbb{C}$ stimmt das nicht (denn dort ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht $\bullet$, sondern die Hermitesche Form). $\Diamond$

6.3 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Bemerkung 6.6

(1) Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum. $f \in \operatorname{Hom}(V,V)$ heißt ein *Endomorphismus* von $\mathcal{V}$ (in Zeichen: $f \in \operatorname{End}(V)$).

(2) Die Menge der invertierbaren Endomorphismen von $\mathcal{V}$ bildet eine Gruppe, die wir mit $\mathrm{GL}(V)$ bezeichnen. $\Diamond$

Definition 6.7

Sei $(\mathcal{V}, s)$ ein n-dimensionaler, euklidischer (unitärer) Raum.

$f \in \operatorname{End}(V)$ heißt *orthogonal (unitär)*, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $s(f(v), f(w)) = s(v, w)$.

Bemerkung 6.8

(1) Für $f \in \operatorname{End}(V)$ sind äquivalent:

$$f \text{ ist orthogonal (unitär)} \;\Leftrightarrow\; \forall v \in V : ||f(v)|| = ||v|| \;\Leftrightarrow\; ||v|| = 1 \Rightarrow ||f(v)|| = 1.$$

(2) Die orthogonalen bzw. unitären Endomorphismen auf $\mathcal{V}$ bilden bzgl. $\circ$ eine Untergruppe $\mathrm{O}(V)$ von $\mathrm{GL}(V)$, die *orthogonale (unitäre) Gruppe* auf $(\mathcal{V}, s)$:

(a) Seien $f, g \in \mathrm{O}(V)$, dann $||(f \circ g)(v)|| = ||f(g(v))|| = ||g(v)|| = ||v||$ für alle $v \in V$, d.h. $f \circ g \in \mathrm{O}(V)$.

(b) Wegen $f(v) = 0 \Rightarrow ||f(v)|| = 0 \Rightarrow ||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$ ist $f \in \mathrm{O}(V)$ stets injektiv, also (in $\operatorname{End}(V)$) invertierbar. Außerdem ist $||f^{-1}(v)|| = ||f(f^{-1}(v))|| = ||v||$ für alle $v \in V$, d.h. $f^{-1} \in \mathrm{O}(V)$.

(3) λ Eigenwert von $f \in \mathrm{O}(V) \Rightarrow |\lambda| = 1$, denn für $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$ gilt $|\lambda| = \frac{||f(v)||}{||v||} = 1$.

(4) Seien $\mathfrak{O} := (v_1, ..., v_n)$ Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$, $f \in \operatorname{End}(V)$, $\mathfrak{W} := (f(v_1), ..., f(v_n))$. Dann gilt:

$$f \text{ ist orthogonal (unitär)} \Leftrightarrow \mathfrak{W} \text{ ist eine Orthonormalbasis von } \mathcal{V}.$$ $\Diamond$

Definition 6.9

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *orthogonal (unitär)*, falls A invertierbar ist mit $A^{-1} = \overline{A^T}$.

Bemerkung 6.10

(1) Die orthogonalen bzw. unitären $(n \times n)$-Matrizen bilden eine Untergruppe $\mathrm{O}(n)$ von $\mathrm{GL}(n)$, die *orthogonale (unitäre) Gruppe*.

(2) Seien $\mathfrak{O}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$ und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

$$f \text{ ist orthogonal (unitär)} \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{O}}(f) \text{ ist orthogonal (unitär)}.$$

(3) $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist orthogonal (unitär) $\Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

(4) $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow |\det(A)| = 1$, denn $1 = \det(\mathrm{Id}) = \det(A\overline{A^T}) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2$. $\Diamond$

Satz 6.11 (Normalform unitärer Endomorphismen)

Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ unitär. Dann besitzt $\mathcal{V}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu f.

Beweis

Per Induktion über $\dim(V) = n$: $\chi(f)$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Sei $\chi(\lambda_1) = 0$ und v_1 normierter Eigenvektor zu λ_1, dann $\mathcal{V} = \operatorname{span}(v_1) \obot \operatorname{span}(v_1)^\perp =: \mathcal{W} \obot \mathcal{U}$ und $f|_W : W \to W$. Wir zeigen, dass $f|_U : U \to U$. Sei dazu $u \in U$, dann $0 = \langle v_1, u\rangle = \langle f(v_1), f(u)\rangle = \overline{\lambda_1}\langle v_1, f(u)\rangle$, also auch $f(u) \in U$.

Wegen $\dim(\mathcal{U}) = n - 1$ liefert die Ind.vor. dann, dass $\mathcal{U}$ eine Orthonormalbasis $(v_2, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren zu f besitzt; wegen $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$ ist damit $\mathfrak{V} := (v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ aus Eigenvektoren zu f. $\square$

Korollar 6.12 (Normalform unitärer Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, dann gibt es ein unitäres $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = CB\overline{C^T}$, $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $|\lambda_i| = 1$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

Beweis

Setze $f := \operatorname{Lin}(A)$, dann ist $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ nach 6.10.2 unitär, nach 6.11 gibt es also eine Orthonormalbasis $\mathfrak{O}$ aus Eigenvektoren zu f. Damit ist

$$\operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})\operatorname{Mat}^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{E}}(f)\operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})^{-1} = \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})\operatorname{Mat}(f)\operatorname{Mat}^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{O}}(\mathrm{id}) = \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{O}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

und nach 6.8.3 gilt $|\lambda_i| = 1$ für alle i. Nach 6.10.3 ist $\operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})$ unitär und wegen $A = \operatorname{Mat}(f)$ folgt mit $B := \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{O}}(f)$, $C := \operatorname{Mat}^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{O}}(\mathrm{id})$ die Behauptung. □

Satz 6.13 (Normalform orthogonaler Endomorphismen)

Zu $\theta_i \in [0, 2\pi)$ bezeichne $D_i := \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{smallmatrix}\right)$ die Drehmatrix (in $\mathbb{R}^2$) um den Winkel θ_i.

Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal. Für geeignete r, s, t und passende $\theta_1, ..., \theta_t$ lässt $\operatorname{Mat}(f)$ sich dann auf folgende Gestalt transformieren:

$$\operatorname{Mat}(A) \sim \left(\begin{array}{c|c|c} +\mathrm{Id}(r) & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{Id}(s) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{D}(t) \end{array}\right)$$

mit $\mathrm{Id}(r) := \mathrm{Id} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\mathrm{Id}(s) = \mathbb{R}^{s\times s}$ und $\mathrm{D}(t) := \operatorname{diag}(D_1, ..., D_t)$.

Beweis

Der euklidische Fall ist schwieriger zu behandeln, da das charakteristische Polynom $\chi(f)$ eines orthogonalen Endomorphismus f nicht immer in Linearfaktoren zerfällt (und damit f nicht diagonalisierbar sein muss).

(1) $\mathcal{V}$ besitzt einen f-invarianten Unterraum $\mathcal{W}$ der Dimension $\dim(\mathcal{W}) \in \{1, 2\}$:

Hat $\chi(f)$ eine reelle Nullstelle λ_1, dann sei $\mathcal{W}$ der von einem zugehörigen Eigemvektor v_1 aufgespannte Unterraum. Dann ist $f(W) = \lambda_1 W \subseteq W$ und $\dim(\mathcal{W}) = 1$.

Andernfalls betrachte $\chi(f) = \chi_1 \cdot ... \cdot \chi_k$ mit $\deg(\chi_i) = 2$. Setze außerdem $\chi_0 := \mathrm{id}$. Nach Hamilton-Cayley ist dann $\chi(f)(f) = \chi_k(f) \circ ... \circ \chi_1(f) = 0$.

Wähle $w \neq 0$ und $i \in \{1, ..., k\}$ mit $v := (\chi_{i-1}(f) \circ ... \circ \chi_0(f))(w) \neq 0$ und $\chi_i(f)(v) = 0$. $\chi_i(f)$ hat die Gestalt $f^2 + \alpha f + \beta\mathrm{id}$, also folgt aus $\chi_i(f)(v) = 0$, dass $f(f(v)) = -\alpha f(v) - \beta(v) \in \operatorname{span}(v, f(v)) =: W$. Dann sind $f(v), f(f(v)) \in W$, d.h. $\mathcal{W}$ ist f-invariant. Außerdem $\dim(\mathcal{W}) \leq 2$.

(2) $\mathcal{V}$ besitzt f-invariante $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \bigoplus ... \bigoplus \mathcal{U}_m$ und $\dim(\mathcal{U}_i) \in \{1, 2\}$:

Sei $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ f-invariant mit $\dim(\mathcal{W}) \in \{1, 2\}$. Analog zum unitären Fall zeigen wir, dass $\mathcal{W}^\perp$ ebenfalls f-invariant ist. Nach Ind.vor. besitzt $\mathcal{W}^\perp$ bereits die gewünschte Zerlegung in f-invariante Unterräume der Dimensionen $1, 2$, also dann auch $\mathcal{V} = \mathcal{W} \bigoplus \mathcal{W}^\perp$.

(3) Nach (2) können wir Œ annehmen, dass $\dim(\mathcal{V}) \in \{1, 2\}$. Im Fall $\dim(\mathcal{V}) = 1$ ist $\mathcal{V} = \operatorname{span}(v)$ mit $v \neq 0$ Eigenvektor zu f zu einem Eigenwert $\lambda = \pm 1$ und wir erhalten den gewünschten Eintrag ± 1 in $\mathrm{Id}(r)$ bzw. $-\mathrm{Id}(s)$.

Im Fall $\dim(\mathcal{V}) = 2$ wähle eine Orthonormalbasis $\mathfrak{O} = (v_1, v_2)$ von $\mathcal{V}$, dann ist $A := \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{O}}(f)$ orthogonal, d.h. $AA^T = \mathrm{Id}$. Komponentenweise Betrachtung dieser Bedingung liefert für geeignetes $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$A \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ □

Korollar 6.14 (Normalform orthogonaler Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann gibt es $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = CBC^T$ und $B = \operatorname{diag}(+\mathrm{Id}(r), -\mathrm{Id}(s), \mathrm{D}(t))$.

6.4 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 6.15

Sei $(\mathcal{V}, s)$ euklidisch (unitär). $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *selbstadjungiert* $:\Leftrightarrow \forall v, w \in V: s(f(v), w) = s(v, f(w))$.

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *selbstadjungiert* oder *symmetrisch (Hermitesch)*, falls $A = \overline{A^T}$.

Bemerkung 6.16

(1) Seien $\mathfrak{O} = (v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$, $v, w \in V$ und $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ die Koordinatenvektoren von v, w. Dann gilt $s(v, w) = \langle x, y\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$):

$$s(v,w) = s\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n s(x_i v_i, x_j v_j) = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i y_i = \langle x, y\rangle.$$

(2) Sei $A = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{O}}(f)$, dann sind Ax, Ay die Koordinatenvektoren von $f(v), f(w)$ bzgl. $\mathfrak{O}$, d.h.

$$\begin{aligned} f \text{ ist selbstadjungiert} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall v, w \in V: s(f(v), w) = s(v, f(w)) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n: \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n: \langle Ax, y\rangle = \langle \overline{A^T} x, y\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist selbstadjungiert.} \end{aligned}$$

Also: Ist $\mathfrak{O}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$, dann ist $f \in \mathrm{End}(V)$ genau dann selbstadjungiert, wenn $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{O}}(f) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert ist. ◊

Satz 6.17 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen)

Seien $(\mathcal{V}, s)$ ein euklidischer (unitärer), n-dimensionaler Raum und $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.

Dann besitzt $\mathcal{V}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu f und alle Eigenwerte von f sind reell.

Beweis

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi(f)$ und $x \neq 0$ mit $f(x) = \lambda x$, dann gilt

$$\lambda s(x,x) = s(x, \lambda x) = s(x, f(x)) = s(f(x), x) = s(\lambda x, x) = \overline{\lambda} s(x,x) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \overline{\lambda},$$

also $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach dem Fundamentalsatz ist also $\chi(f) = (t - \lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$ über $\mathbb{R}$.

(2) Wie üblich per Induktion: Sei λ_1 Eigenwert von f zum normierten Eigenvektor v_1, dann definiere $\mathcal{U} := \mathrm{span}(v_1)$. $\mathcal{U}$ ist f-invariant und wir müssen zeigen, dass auch $\mathcal{U}^\perp$ f-invariant ist. Seien dazu $v \in U^\perp$, $u \in U$, dann gilt $s(f(v), u) = s(v, f(u)) = 0$, also $f(v) \perp u$, d.h. $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Nach Ind.vor. besitzt $\mathcal{U}^\perp$ nun eine Orthonormalbasis $(v_2, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren zu $f|_{\mathcal{U}^\perp}$, also ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V} = \mathcal{U} \textcircled{\perp} \mathcal{U}^\perp$. □

Korollar 6.18 (Spektralsatz für selbstadjungierte Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, dann gibt es $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = CB\overline{C^T}$, $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

7 Ergänzungen

7.1 Ein Beispiel aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Definition 7.1

Ein *gewöhnliches Anfangswertproblem erster Ordnung* ist eine Funktionsgleichung der Form

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} . \tag{$*$}$$

Dabei sind $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gesucht.

Beispiel 7.2

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) := A \cdot x$ für ein $A \in \mathbb{R}$. Dann wird $(*)$ gelöst durch

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x(t) := \exp(tA) \cdot x_0,$$

denn $\dot{x}(t) = A \exp(tA)x_0 = Ax(t) = F(x(t))$ und $x(0) = \exp(0A)x_0 = x_0$. $\Diamond$

Aufgabe 7.3

Wir wollen das folgende lineare Anfangswertproblem lösen:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} , \tag{$**$}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben sind.

Wir verwenden aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen, dass der Ausdruck

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegen eine Matrix $\exp(M) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiert und dass $x(t) := \exp(tA) \cdot x_0$ eine Lösung von $(**)$ ist. Uns interessiert, wie $\exp(tA)$ explizit aussieht.

(1) Sei dazu zunächst A eine Diagonalmatrix: $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ für geeignete $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (t\lambda_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (t\lambda_n)^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Für Diagonalmatrizen A können wir $\exp(tA)$ also explizit berechnen.

Eine Lösung von $(**)$ ist dann

$$x(t) := \exp(tA) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1)x_0^1 \\ \cdots \\ \exp(t\lambda_n)x_0^n \end{pmatrix}. \qquad \Diamond$$

(2) Habe nun A nicht notwendig Diagonalgestalt, aber es gebe eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Diagonalgestalt hat, wobei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(x) := A \cdot x$. Dann ist

$$A = \mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{E}_n}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{E}_n}(\mathrm{id})\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}).$$

Zur Vereinfachung der Notation setze $B := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{E}_n}(\mathrm{id})$ und $\Lambda := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (dann insbesondere $B^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})$).

Es gilt für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$A^k = (B\Lambda B^{-1})^k = (B\Lambda B^{-1}) \cdots (B\Lambda B^{-1}) = B\Lambda(B^{-1}B) \cdots (B^{-1}B)\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1},$$

also

$$\exp(tA) = \exp(B(t\Lambda)B^{-1}) = B\exp(t\Lambda)B^{-1} \overset{(1)}{=} B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Also kennen wir auch für diesen Fall $\exp(tA)$ (und damit die Lösung x von $(**)$) explizit. $\Diamond$

Bemerkung 7.4

Jedes solche lineare Anfangswertproblem besitzt genau eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und diese hat stets die Darstellung

$$x(t) = \exp(tA) \cdot x_0.$$

Aber: Zu A muss nicht notwendig eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathbb{R}^n$ existieren, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Diagonalgestalt hat.

Antworten auf die Frage, wann und wie man so ein $\mathfrak{V}$ findet, gibt die Eigenwerttheorie, vgl. §5.

Ist $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, dann nennt man $v_1, ..., v_n$ *Eigenvektoren von f* (bzw. von A) und $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die zugehörigen *Eigenwerte von f* (bzw. von A).

Diese Definition macht auch allgemein für endlichdimensionale K-Vektorräume $\mathcal{V}$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ Sinn. $\Diamond$

7.2 Ein Beispiel zu Basistransformation und Darstellungsmatrizen

Aufgabe 7.5

Gegeben seien der $\mathbb{F}_5$-Vektorraum

$$\mathcal{V} := \mathbb{F}_5[X]_4 := \{p \in \mathbb{F}_5[X] \mid \deg(p) \leq 4\} \subseteq \mathbb{F}_5[X]$$

der Polynome über $\mathbb{F}_5$ vom Grad ≤ 4, die *formale Ableitung* $D : V \to V$, definiert durch

$$D(X^i) := \begin{cases} iX^{i-1} & i \geq 1 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

sowie die Teilmengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &:= (X+1;\ X^4;\ X^3+4X^2;\ X^2+4;\ X+4); \\ \mathfrak{W} &:= (2X^3+X^2;\ X^2+X;\ X^3+2X^2;\ X^4+X^2;\ X^2+4) \end{aligned}$$

von V.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ Vektorraumbasen von $\mathcal{V}$ sind.

(2) Drücken Sie die Elemente von $\mathfrak{V}$ als Linearkombination der Elemente aus $\mathfrak{W}$ aus und umgekehrt.

(3) Zeigen Sie, dass $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V},\ p \mapsto D((X+1) \cdot p)$ linear ist.

(4) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

(5) Berechnen Sie den Kern von F.

Lösung

(1) Es ist bekannt, dass $\dim(\mathcal{V}) = 5$ und $\mathfrak{E} := (1, X, X^2, ..., X^4)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist. Es genügt daher zu zeigen, dass $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ linear unabhängig sind.

(a) Seien also $\alpha_1, ..., \alpha_5 \in \mathbb{F}_5$ mit $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_5 v_5 = 0$, dann

$$\begin{aligned} & \alpha_1(X+1) + \alpha_2(X^4) + \alpha_3(X^3+4X^2) + \alpha_4(X^2+4) + \alpha_5(X+4) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_2 X^4 + \alpha_3 X^3 + (\alpha_4 + 4\alpha_3)X^2 + (\alpha_1 + \alpha_4)X + (\alpha_1 + \alpha_4 + 4\alpha_5) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 + 4\alpha_3 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_5 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_4 + 4\alpha_5 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_5)$ linear unabhängig. ◊

(b) Analog seien $\alpha_1, ..., \alpha_5 \in \mathbb{F}_5$ mit $\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_5 w_5 = 0$, dann

$$\begin{aligned} & \alpha_1(2X^3+X^2) + \alpha_2(X^2+X) + \alpha_3(X^3+2X^2) + \alpha_4(X^4+X^2) + \alpha_5(X^2+4) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_4 X^4 + (2\alpha_1 + \alpha_3)X^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)X^2 + \alpha_2 X + 4\alpha_5 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_4 = 0,\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_5 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0. \end{aligned}$$

Also ist auch $\mathfrak{W} = (w_1, ..., w_5)$ linear unabhängig. ◊

(2) (a) Wir suchen zu jedem $v_i \in \mathfrak{V}$ Skalare $\alpha_1, ..., \alpha_5 \in \mathbb{F}_5$, so dass gilt $v_i = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_5 w_5$ bzw. $\Psi_{\mathfrak{W}}(v_i) = (\alpha_1, ..., \alpha_5)$.

Berechnung von $\Psi_{\mathfrak{W}}$: Finde $\beta_1, ..., \beta_5$ (in Abhängigkeit von $\alpha_1, ..., \alpha_5$) mit

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 + \alpha_4 X^3 + \alpha_5 X^4 \\ \overset{!}{=}\ & \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \beta_4 w_4 + \beta_5 w_5 \\ =\ & \beta_1(2X^3+X^2) + \beta_2(X^2+X) + \beta_3(X^3+2X^2) + \beta_4(X^4+X^2) + \beta_5(X^2+4) \\ =\ & 4\beta_5 + \beta_2 X + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5)X^2 + (2\beta_1 + \beta_3)X^3 + \beta_4 X^4. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich (bzw. Anwendung von $\Psi_{\mathfrak{E}}$ auf die Gleichung) liefert

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&4\\0&1&0&0&0\\1&1&2&1&1\\2&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\\\beta_5\end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\\\beta_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&4\\0&1&0&0&0\\1&1&2&1&1\\2&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&2&3&4&2\\0&1&0&0&0\\4&1&4&3&1\\0&0&0&0&1\\4&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} & \Psi_{\mathfrak{W}}(\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3X^2+\alpha_4X^3+\alpha_5X^4) \\ = \; & (3\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+2\alpha_5,\ \alpha_2,\ 4\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3+3\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_5,\ 4\alpha_1) \\ =: \; & \Phi_{\mathfrak{W}}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5). \end{aligned}$$

Berechnung der $\mathfrak{W}$-Koordimaten der $v_i \in \mathfrak{V}$:

$$\begin{cases} \Psi_{\mathfrak{W}}(v_1) = \Phi_{\mathfrak{W}}(1,1,0,0,0) = (0,1,0,0,4); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_2) = \Phi_{\mathfrak{W}}(0,0,0,0,1) = (2,0,1,1,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_3) = \Phi_{\mathfrak{W}}(0,0,4,1,0) = (1,0,4,0,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_4) = \Phi_{\mathfrak{W}}(4,0,1,0,0) = (0,0,0,0,1); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_5) = \Phi_{\mathfrak{W}}(4,1,0,0,0) = (4,1,2,0,1). \end{cases} \qquad \Diamond$$

(b) Anstatt analog vorzugehen und all diese Berechnungen noch einmal durchzuführen, überlegt man sich Folgendes:

Ist $A := (\Psi_{\mathfrak{W}}(v_1)|\cdots|\Psi_{\mathfrak{W}}(v_5)) \in \mathbb{F}_5^{5\times 5}$, dann gilt

$$\Psi_{\mathfrak{W}}(v_i) = Ae^{(i)} = A\Psi_{\mathfrak{V}}(v_i) = (\mathrm{Lin}(A)\circ\Psi_{\mathfrak{V}})(v_i),$$

d.h. $\Psi_{\mathfrak{W}}$ und $\mathrm{Lin}(A)\circ\Psi_{\mathfrak{V}}$ stimmen auf der Basis $\mathfrak{V}$ und damit auf ganz V überein.

Insbesondere gilt

$$e^{(i)} = \Psi_{\mathfrak{W}}(w_i) = (\mathrm{Lin}(A)\circ\Psi_{\mathfrak{V}})(w_i) = A\Psi_{\mathfrak{V}}(w_i) \quad\Rightarrow\quad \Psi_{\mathfrak{V}}(w_i) = A^{-1}e^{(i)}.$$

Wir brauchen also nur die Matrix A zu invertieren:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}0&2&1&0&4\\1&0&0&0&1\\0&1&4&0&2\\0&1&0&0&0\\4&0&0&1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}4&1&4&3&0\\0&0&0&1&0\\2&0&1&0&0\\3&1&3&1&1\\1&0&1&2&0\end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{cases} \Psi_{\mathfrak{V}}(w_1) = (4,0,2,3,1); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_2) = (1,0,0,1,0); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_3) = (4,0,1,3,1); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_4) = (3,1,0,1,2); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_5) = (0,0,0,1,0). \end{cases} \qquad \Diamond$$

(3) F ist wohldefiniert, d.h. für jedes Polynom $p \in \mathbb{F}_5[X]_4$ ist auch $F(p)$ vom Grad ≤ 4.

Seien $p, q \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_5$, dann gilt

$$\begin{aligned} F(\alpha p+\beta q) &= D((X+1)\cdot(\alpha p+\beta q)) &&= D(\alpha(X+1)\cdot p+\beta(X+1)\cdot q) \\ &= \alpha D((X+1)\cdot p)+\beta D((X+1)\cdot q) &&= \alpha F(p)+\beta F(q). \end{aligned} \qquad \Diamond$$

(4) Berechnung der Darstellungsmatrix $B := \mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F)$: Wegen

$$B^i = Be^{(i)} = \mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F)e^{(i)} = (\Psi_{\mathfrak{W}} \circ F \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) = \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_i))$$

müssen wir zunächst die Bilder von $\mathfrak{V}$ unter F ausrechnen:

$$\begin{cases} F(v_1) &= D((X+1)(X+1)) &= D(X^2+2X+1) &= 2X+2; \\ F(v_2) &= D((X+1)(X^4)) &= D(X^5+X^4) &= 4X^3; \\ F(v_3) &= D((X+1)(X^3+4X^2)) &= D(X^4+4X^2) &= 4X^3+3X; \\ F(v_4) &= D((X+1)(X^2+4)) &= D(X^3+X^2+4X+4) &= 3X^2+2X+4; \\ F(v_5) &= D((X+1)(X+4)) &= D(X^2+4) &= 2X. \end{cases}$$

Nun können wir die Spalten von B bestimmen:

$$\begin{cases} \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_1)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(2,2,0,0,0) &= (0,2,0,0,3); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_2)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(0,0,0,4,0) &= (1,0,2,0,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_3)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(0,3,0,4,0) &= (2,3,0,0,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_4)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(4,2,3,0,0) &= (0,2,0,0,1); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_5)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(0,2,0,0,0) &= (4,2,2,0,0). \end{cases}$$

Also hat $\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F)$ die Gestalt

$$\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \Diamond$$

(5) Berechnung des Kerns von F:

$$x \in \mathrm{Kern}(B) \Leftrightarrow Bx = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{L}(B) = \mathrm{span}(\{(0,1,4,0,4)\}),$$

denn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{L}(B) = \mathrm{span}(\{(0,1,4,0,4)\}).$$

Wegen $F(p) = \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A \cdot \Psi_{\mathfrak{V}}(p))$ suchen wir also $p \in V$ mit $\Psi_{\mathfrak{V}}(p) = (0,1,4,0,4)$ bzw.

$$\begin{aligned} p &= \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}((0,1,4,0,4)) \\ &= v_2 + 4v_3 + 4v_5 \\ &= X^4 + 4(X^3+4X^2) + 4(X+4) \\ &= X^4 + 4X^3 + X^2 + 4X + 1. \end{aligned}$$

Also ist $F(p) = 0 \Leftrightarrow p \in \mathrm{span}(\{X^4+4X^3+X^2+4X+1\})$, d.h.

$$\mathrm{Kern}(F) = \mathrm{span}(\{X^4+4X^3+X^2+4X+1\}). \qquad \Diamond$$

7.3 Ein Beispiel zur Jordanschen Normalform

Bemerkung 7.6 (Jordan-Transformation)

Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lässt sich in *Jordan-Normalform* überführen, d.h. es gibt invertierbares $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}, \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \ i = 1, ..., m,$$

wobei λ_i die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte zu A sind, $i = 1, ..., m$.

Bis auf Permutation der *Jordan-Kästchen* $J_1, ..., J_m$ ist die Jordan-Normalform eindeutig bestimmt.

$J := UAU^{-1}$ heißt „die“ zu A gehörige *Jordan-Matrix*. ◊

Aufgabe 7.7

Wir suchen „die“ Jordanmatrix J und die Transformationsmatrix U zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

(1) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren, d.h. finde $x \neq 0$ und λ, so dass $Ax = \lambda x$.

Berechnung des charakteristischen Polynoms zu A:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) = -(\lambda-1)^3,$$

d.h. $\lambda = 1$ ist einziger Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $\mu_a(1) = 3$.

Ein Eigenvektor x zum Eigenwert λ erfüllt $(A - \lambda I)x = 0$, d.h.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Eine Basis des Lösungsraumes dieses Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$\mu_g(\lambda) = 2$, also geometrische Vielfachheit kleiner als algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ, d.h. A ist nicht diagonalisierbar.

Bestimme nun $\text{Bild}(A - \lambda I)$, hier

$$\text{Bild}(A - \lambda) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Bilde dann möglichst viele linear unabhängige Eigenvektoren, die in $\text{Bild}(A - \lambda I)$ liegen, und tausche alte Eigenvektoren gegen neue aus:

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Bild}(A - I) \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Ergänze mit *Hauptvektoren* zu einer Basis. Löse dazu für jeden Eigenvektor $h_0 \in \operatorname{Bild}(A - \lambda I)$ die Gleichung $(A-\lambda I)h_1 = h_0$. Wir erhalten so den ersten Hauptvektoren erster Stufe h_1 zum Eigenvektor h_0. Die Menge

$$\operatorname{Hau}(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda\operatorname{Id})^k x = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\} \supseteq \operatorname{Kern}(A - \lambda\operatorname{Id}) = \operatorname{Eig}(\lambda, A)$$

heißt der *Hauptraum* zum Eigenwert λ und $\mathbb{R}^n = \operatorname{Hau}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Hau}(\lambda_k)$ die *Hauptraumzerlegung* von $\mathbb{R}^n$.

Fahre fort: $(A - \lambda I)h_2 = h_1$, $(A - \lambda I)h_3 = h_2$ ..., bis das Gleichungssystem nicht mehr lösbar ist. Wiederhole den Prozess für alle anderen Eigenvektoren.

$$(A - \lambda I)h_1 = h_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} h_1^{(1)} + h_1^{(3)} & = & 1 \\ -h_1^{(1)} - h_1^{(3)} & = & -1 \\ -h_1^{(1)} - h_1^{(3)} & = & -1 \end{array} \right. ;\ \text{z.B. } h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir bereits genügend Vektoren für eine Basis.

(3) Sortiere die Eigen- und zugehörigen Hauptvektoren in die Spalten einer Transformationsmatrix (Hauptvektoren in der Reihenfolge der Iteration hinter die zugehörigen Eigenvektoren).

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Bestimme U^{-1}, z.B. mit dem Gauß-Algorithmus.

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) Stelle die Jordan-Matrix auf ($J = U^{-1}AU$).

Da unsere Transformationsmatrix aus zwei Eigenvektoren und einem Hauptvektor besteht, hat die zugehörige Jordan-Matrix die Gestalt

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \text{ mit } J_1 = (1),\ J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ ◊

Bemerkung 7.8

Damit können wir für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ den Ausdruck $\exp(A)$ explizit ausrechnen.

Sei nämlich $A = UJU^{-1}$ mit zu A gehöriger Jordan-Matrix J, d.h.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \{0, 1\}$ passend.

Wegen $D \cdot N = N \cdot D$ gilt die *Funktionalgleichung*

$$\exp(J) = \exp(D + N) = \exp(D) \cdot \exp(N),$$

d.h.

$$\exp(A) = \exp(UJU^{-1}) = U\exp(D + N)U^{-1} = U\exp(D)\exp(N)U^{-1} = U\exp(D)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}N^k\right)U^{-1}.$$

Beachte: N ist *nilpotent*, d.h. für alle $k \geq n$ gilt: $N^k = 0$. ◊

7.4 Ein Beispiel zur Hauptachsentransformation

Definition 7.9

Seien $(\mathcal{V}, s)$ der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ eine Vektorraumbasis von $\mathcal{V}$. Dann

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) := (b(v_i, v_j))_{1\le j\le n}^{1\le i\le n} = \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & \cdots & b(v_1,v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_n,v_1) & \cdots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

die *Darstellungsmatrix von b* bzgl. der Basis $\mathfrak{V}$.

Bemerkung 7.10

(1) Mit b ist für beliebige Basis $\mathfrak{V}$ auch $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ symmetrisch.

(2) Genau dann ist $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ eine Diagonalmatrix, wenn $\mathfrak{V}$ eine Orthogonalbasis ist.

(3) Seien $v, w \in \mathcal{V}$ und x, y die Koordinatenvektoren von v, w bzgl. $\mathfrak{V}$. Nach Bem. 6.16.1 gilt dann $b(v, w) = x^T \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) y$.

(4) Seien $\mathfrak{W} = (w_1, ..., w_n)$ eine weitere Basis von $\mathcal{V}$ und $P = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(\mathrm{id})$ die Darstellungsmatrix des Basiswechsel von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}$, dann ist $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = P^T \mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b) P$.

(5) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann definiert $b(x, y) := x^T Ay = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(b) = A$. $\Diamond$

Satz 7.11 (Hauptachsentransformation)

Seien b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$,.

Dann gibt es eine Basis $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ des $\mathbb{R}^n$, wobei $\mathfrak{V}$ eine Orthogonalbasis bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\},\ i = 1, ..., n$.

Beweis

Sei $A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(b)$, dann ist A symmetrisch, nach dem Spektralsatz 6.17 gibt es also n reelle Eigenwerte $\mu_1, ..., \mu_n$ von A und eine Orthonormalbasis $\mathfrak{W}$ (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$) von $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Wähle

$$v_i := \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\mu_i|}} & \mu_i \neq 0 \\ w_i & \mu_i = 0 \end{cases}, \qquad i = 1, ..., n,$$

dann ist (Œ $\mu_i, \mu_j \neq 0$)

$$b(v_i, v_j) = \frac{b(w_i, w_j)}{\sqrt{|\mu_i\mu_j|}} = \frac{\langle Aw_i, w_j\rangle}{\sqrt{|\mu_i\mu_j|}} = \frac{\mu_i\langle w_i, w_j\rangle}{\sqrt{|\mu_i\mu_j|}} = \begin{cases} \pm 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

also $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = (b(v_i, v_j))_{1\le j\le n}^{1\le i\le n} = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \{-1, 0, 1\}$. $\square$

Aufgabe 7.12

Wir betrachten die symmetrische Bilinearform b, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (= \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(b))$$

gegeben ist, d.h. $b(x, y) := \langle Ax, y\rangle$.

(1) Gesucht ist eine Orthonormalbasis $\mathfrak{O}$ von $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{O}}(b)$ Diagonalgestalt hat.

(2) Sei $q(x) := b(x, x)$ die zu b gehörige *quadratische Form*. Wie sieht $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) = 1\}$ aus?

(3) Bestimmen Sie eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$.

Lösung

(1) Um die A Eigenwerte von A zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi(A)$ von A:

$$\chi(A) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = -(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -1$ von A sind also paarweise verschieden und die zugehörigen Eigenräume damit alle eindimensional. Als zugehörige Eigenvektoren ermitteln wir

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normierung von w_1, w_2, w_3 liefert die gesuchte Basis $\mathfrak{O} = \{o_1, o_2, o_3\} = \{\frac{1}{3}w_1,\ \frac{1}{3}w_2,\ \frac{1}{3}w_3\}$.

(2) Sei $x = \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \alpha_3 o_3$. Dann ist $q(x) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \lambda_3 \alpha_3^2$, d.h.

$$E = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \lambda_3 \alpha_3^2 = 1\}.$$

E beschreibt also einen „Rotationselpisoid“ mit *Rotationsachsen* o_1, o_2, o_3 (d.h. bei einer Drehung um eine dieser Achsen ändert sich E nicht). Dies motiviert die Bezeichnung „Hauptachsentransformation“.

(3) Gemäß Der Hauptachsentransformation 7.11 ist $\mathfrak{V}$ gegeben als $\mathfrak{V} = (\frac{1}{\sqrt{2}}o_1,\ \frac{1}{\sqrt{5}}o_2,\ o_3)$. ◊

Satz 7.13 (Sylvesterscher Trägheitssatz)

Seien b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ Basen des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b)$ haben den gleichen Rang und die Anzahl an positiven bzw. negativen Eigenwerten von $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b)$ stimmt überein.

Folgerungen 7.14

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{V}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gelten:

(1) Genau dann ist b positiv definit, wenn alle Eigenwerte von $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ (strikt) positiv sind.

Seien nämlich $\mathfrak{W}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $v = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$, dann $b(v, v) = q(v) = \lambda_1 \alpha_1^2 + ... + \lambda_n \alpha_n^2$, also $b(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ genau dann, wenn alle $\lambda_i > 0$.

Da in dem Fall nach Sylvester auch $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ nur positive Eigenwerte hat, folgt die Behauptung.

(2) Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *positiv definit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $x^T A x = \langle x, Ax \rangle > 0$.

Sei nun A symmetrisch, dann gilt: A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

(3) Insbesondere ergibt sich aus (1): b ist genau dann positiv definit, wenn $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ positiv definit ist.

(4) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $\chi(A) = (-1)^n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0$ das zugehörige charakteristische Polynom. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn $(-1)^j \alpha_j > 0$ für alle $j = 1, ..., n-1$.

(5) Hauptminorenkriterium: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn für alle $k = 1, ..., n$ gilt $\det(A_k) > 0$, wobei $A_k := (a_{ij})_{1 \leq j \leq k}^{1 \leq i \leq k}$ der k-te *Hauptminor* von A.

(6) Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Dann haben A und $P^T A P$ die gleiche Anzahl positiver und negativer Eigenwerte.

(7) Alle Resultate dieses Kapitels lassen sich auf Hermitesche Formen in unitären ($\mathbb{C}$-)Vektorräumen übertragen. ◊

Index

Literatur

[1] Prestel, A.: *Lineare Algebra I.* Vorlesungsskript, Konstanz, WS 2005/2006.
`http://www.martingubisch.de/cms/skripte.html?action=getfile&file=upload/files/skripte/Lineare%20Algebra%201.pdf`

[2] Kersten, I.:*Analytische Geometrie und Lineare Algebra.* Vorlesungsskript, Göttingen, 2000/01.
`http://www.uni-math.gwdg.de/skripten/Aglaskript/agla.pdf`

[3] Stammbach, U.: *Lineare Algebra.* Vorlesungsskript, Zürich, 2002.
`http://www.math.ethz.ch~stammb/linalg.shtml`

[4] Scheiderer, C.: *Lineare Algebra.* Vorlesungsskript, Duisburg, 2000/2001.
`http://www.uni-duisburg.de/FB11/LEHRE/LINALG/LA.public.pdf`

[5] Fischer, G.: *Lineare Algebra.* Vieweg Verlag, 1997.

[6] Beutelspacher, A.: *Lineare Algebra.* Vieweg Verlag, 1998.

[7] Kowalsky-Michler: *Lineare Algebra.* De Gruyter-Verlag, 12. Auflage, 2003.

[8] Jänich, K.: *Lineare Algebra.* Springer Verlag, 1981.

[9] Lang, S.: *Linear Algebra.* Addison-Wesley, 1977.

[10] Wille, D.: *Repetitorium der Linearen Algebra* (Teil I). Binomi Verlag, 1997.

[11] Wille-Holz.: *Repetitorium der Linearen Algebra* (Teil II). Binomi Verlag, 2006.