Merkblatt "Umkehrabbildungen, Flächen, und Mannigfaltigkeiten"

A. Lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen

Definition: Diffeomorphismus. Eine bijektive Abbildung $\Phi : V \to U$ zwischen offenen Teilmengen $V, U \subset I\!R^n$ heisst (C^k-)Diffeomorphismus genau dann wenn Φ und Φ^{-1} (k-mal) stetig differenzierbar sind.

Satz über lokale Umkehrbarkeit. Sei $V \subset I\!R^n$ offen, $\Phi \in C^k(V, I\!R^n)$, $k \geq 1$. Wenn bei einem $v_* \in V$

$$\text{rang} D\Phi(v_*) = n = \text{voll}$$

ist, dann gibt es eine Umgebung $\tilde{V}$ von v_*, so dass die Restriktion $\Phi|\tilde{V} : \tilde{V} \to U := \Phi(V)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Satz über implizit gegebene Funktionen. Sei $V \subset I\!R^n$ offen, $g \in C^k(V, I\!R^l), 1 \leq l \leq n$. Schreibe $v \in I\!R^n$ als $v = (x, y)$ mit $x \in I\!R^{n-l}, y \in R^l$. Bei $(x_*, y_*) \in V$ sei

$$\text{rang} \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) = l.$$

Dann gilt: Mit geeigneten Umgebungen W von $(x_*, g(x_*, y_*))$ und Y von y_* gibt es genau eine Funktion $H \in C^1(W, Y)$ mit

$$g(x, H(x, z)) = z.$$

Tatsächlich ist auch $H \in C^k$.

Bemerkung. Der Satz über lokale Umkehrbarkeit ist in dem Satz über implizit gegebene Funktionen als Spezialfall $l = n$ ("kein x") enthalten.

B. Flächen

Definition: Fläche. Sei $0 < d \leq n$. $M \subset I\!R^n$ heisst offene, doppelpunktfreie C^k-Fläche der Dimension d in $I\!R^n$ genau dann wenn es eine offene Teilmenge $U \subset I\!R^d$ und eine Funktion $f \in C^k(U, I\!R^n)$ gibt, die U bijektiv auf $M = f(U)$ abbildet und

$$\text{rang} Df(u) = d = \text{voll}, \quad \forall u \in U, \quad \text{kurz: "überall vollen Rang"}$$

hat. f heisst dann Parametrisierung oder Parameterdarstellung von M.

Bemerkung. Auf diesem Merkblatt wird der Ausdruck "offene, doppelpunktfreie Fläche" meist einfach durch das Wort "Fläche" abgekürzt, da nicht offene oder nicht doppelpunktfreie Flächen hier nicht betrachtet werden.

Beispiel. Jeder *Graph*

$$\{(x, h(x)) : x \in X\}$$

einer C^k-Funktion $h : X \to I\!R^{n-d}, X \subset I\!R^d$ offen, ist eine C^k-Fläche der Dimension d in $I\!R^n$.

Definition: Äquivalenzklassen von Parametrisierungen, Orientierung von Parametrisierungen. (i) Zwei Parametrisierungen $f : U \to I\!R^n, \tilde{f} : \tilde{U} \to I\!R^n$ heissen äquivalent genau dann wenn es einen Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{U} \to U$ gibt, mit dem $\tilde{f} = f \circ \Phi$. (ii) Zwei äquivalente Parameterdarstellungen heissen gleich orientiert genau dann wenn ein entsprechender Diffeomorphismus Φ die Eigenschaft $\det D\Phi > 0$ hat.

Satz/Definition: Tangentialraum. $f : U \to I\!R^n$ sei Paramtrisierung einer Fläche $M = f(U)$. Dann ist zu jedem Parameterwert $u \in U$ auch

$$T_u f : x \mapsto f(u) + Df(u)x$$

Parametrisierung einer Fläche. Dieses von der Parametrisierung von M unabhängige affine Gebilde wird als Tangentialraum von M in $p = f(u)$, kurz T_pM, bezeichnet.

Satz: Jede Fläche ist lokal ein Graph. $M \subset I\!R^n$ sei C^k-Fläche der Dimension d, $f \in C^k(U, I\!R^n)$ Parametrisierung von M. Dann gibt es zu jedem Parameterwert $u_* \in U$ eine Umgebung $\tilde{U} \subset I\!R^d$, so dass bzgl. einer geeigneten (Nummerierung der) Basis(vektoren) die Teilfläche $\tilde{M} := f(\tilde{U}) =$ ein Graph ist:

$$\tilde{M} = \text{graph}(h) = \{(x, h(x)) : x \in X\}$$

mit einer C^k-Funktion $h : X \to I\!R^{n-d}, X \subset I\!R^d$ offen.

Satz über implizite Darstellung von Flächen. Sei $V \subset I\!R^n$ offen, $n = l + d, 0 \leq d \leq n$. Eine Abbildung $g \in C^k(V, I\!R^l)$ habe bei einem $v_* \in V$ vollen Rang,

$$\text{rang} Dg(v_*) = l$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{V}$ von v_* und eine offene Umgebung Z von z_*, so dass die Mengen

$$M^z = \{v \in V : g(v) = z\}, \quad z \in Z$$

C^k-Flächen der Dimension d sind, falls $d > 0$, bzw. einpunktig, falls $d = 0$.

Satz über die lineare Dualität expliziter und impliziter Darstellungen von Flächen. Seien f, g explizite bzw. implizite Darstellungen derselben Fläche. Dann gilt an jedem Punkt $p = f(u)$:

$$Dg(p)Df(u) = 0,$$

genauer: Die Zeilen $Dg_i(p)$ spannen den Links-kern von $Df(u)$ (das "Normalenbündel"), die Spalten $\partial_{u_j} f(u)$ den Rechts-Kern von $Dg(p)$ (das "Tangentialbündel") auf.

Satz über Extrema unter Nebenbedingungen. In der Situation des obigen Satzes über die implizite Darstellung von Flächen sei ausserdem eine reellwertige C^1-Funktion ϕ gegeben, deren Defnitionsbereich die Umgebng V des Punktes $v_* \in M \equiv M^{z_*}$ enthält. Falls $\phi|M$ bei v_* ein lokales Extremum hat, so ist

$$\nabla\phi(v_*) \in \text{span}\{\nabla g_i(v_*), i = 1, \ldots, l\}.$$

Bemerkung. Die Koeffizienten α_i in der dann möglichen Darstellung $\nabla\phi(v_*) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \nabla g_i(v_*)$ werden auch als Lagrangesche Multiplikatoren bezeichnet.

C. Mannigfaltigkeiten

Definition: Mannigfaltigkeit, Karten, Atlas. (i) Eine Menge $M \subset I\!R^n$ heißt d-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit im $I\!R^n$ $:\Leftrightarrow$ M ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler offener, doppelpunktfreier d-dimensionaler C^k-Flächen $M_i, i \in I$, deren paarweise Schnittmengen $M_i \cap M_j, i, j \in I$ allesamt ebenfalls offene, doppelpunktfreie d-dimensionale C^k-Flächen sind. (ii) In so einer Situation heißen Parametrisierungen

$$f_i : U_i \to M_i, i \in I,$$

Karten, die Menge

$$\{M_i, i \in I\}$$

Atlas von M.

Beispiel. M (offene, doppelpunktfreie) Fläche $\Leftrightarrow$ M Mannigfaltigkeit mit einelementigem Atlas.

Definition / Lemma. Seien M eine Mannigfaltigkeit und $f_i : U_i \to M$, $f_j : U_j \to M$ zwei Karten.dazu. Falls sie sich "überlappen", also

$$\tilde{M} := f_i(U_i) \cap f_j(U_j) \neq \emptyset,$$

so heisst die Abbildung

$$\Phi = f_j^{-1} \circ f_i | \tilde{U}_i : \tilde{U}_i \to \tilde{U}_j$$

mit

$$\tilde{U}_i := f_i^{-1}(\tilde{M}), \quad \tilde{U}_j := f_j^{-1}(\tilde{M})$$

Kartenwechsel. Kartenwechsel sind Diffeomorphismen.

Satz über implizite Darstellung von Mannigfaltigkeiten. Es seien $U \subset I\!R^n, g \in C^k(U, I\!R^l)$, $0 < l < n$ und $z_* \in g(U)$ so dass

$$\text{rang} Dg(v) = l = \text{voll}$$

an allen Punkten v von

$$M = g^{-1}(z_*).$$

Dann ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit in $I\!R^n$ der Dimension $d = n - l$.

Beispiel. Falls $g^{-1}(z_*)$ beschränkt ist, so ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit, für die jeder Atlas mehr als eine Karte haben muss.