Satz über implizit gegebene Funktionen. Sei $V \subset \mathscr{R}^n$ offen, $g \in C^1(V, \mathscr{R}^l), l + d = n, 0 < d < n$. Schreibe $v \in \mathscr{R}^n$ als $v = (x, y)$ mit $x \in \mathscr{R}^d, y \in R^l$. Bei $(x_*, y_*) \in V$ sei

$$\text{rang}\frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) = l.$$

Dann gilt: Mit geeigneten Umgebungen W von $(x_*, g(x_*, y_*))$ und Y von y_* gibt es genau eine Funktion $H \in C^1(W, Y)$ mit

$$g(x, H(x, z)) = z.$$

Falls $g \in C^k, k > 1$, so ist auch $H \in C^1$.

Definition: Fläche. $M \subset \mathscr{R}^n$ ist C^k-Fläche der Dimension d in $\mathscr{R}^n$, $0 < d \leq n$. $:\Leftrightarrow$ Es gibt eine offene Teilmenge $U \subset \mathscr{R}^d$ und eine Funktion $f \in C^k(U, \mathscr{R}^n)$, die U bijektiv auf $M = f(U)$ abbildet und

$$\text{rang} Df(u) = d = \text{voll}, \quad \forall u \in U, \quad \text{kurz: "überall vollen Rang"}$$

hat. f heisst dann Parametrisierung oder Parameterdarstellung von M.

Beispiel. Jeder *Graph*

$$\{(x, h(x)) : x \in X\}$$

einer C^k-Funktion $h : X \to \mathscr{R}^{n-d}, X \subset \mathscr{R}^d$ offen, ist eine C^k-Fläche der Dimension d in $\mathscr{R}^n$.

Definition Diffeomorphismus. Eine bijektive Abbildung $\Phi : V \to U$ zwischen offenen Teilmengen $U, V \subset \mathscr{R}^n$ heisst C^k-Diffeomorphismus genau dann wenn Φ und Φ^{-1} (k-mal) stetig differenzierbar sind.

Definition Äquivalenzklassen von Parametrisierungen, Orientierung von Parametrisierungen. (i) Zwei Parametrisierungen $f : U \to \mathscr{R}^n, \tilde{f} : \tilde{U} \to \mathscr{R}^n$ heissen äquivalent genau dann wenn es einen Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{U} \to U$ gibt, mit dem $\tilde{f} = f \circ \Phi$. (ii) Zwei äquivalente Parameterdarstellungen heissen gleich orientiert genau dann wenn ein entsprechender Diffeomorphismus Φ die Eigenschaft $\det D\Phi > 0$ hat.

Satz/Definition Tangentialraum. $f : U \to \mathscr{R}^n$ sei Paramtrisierung einer Fläche $M = f(U)$. Dann ist zu jedem Parameterwert $u \in U$ auch

$$T_u f : h \mapsto f(u) + Df(u)h$$

Parametrisierung einer Fläche. Dieses von der Parametrisierung von M unabhängige affine Gebilde wird als Tangentialraum von M in $p = f(u)$, kurz $T_p M$, bezeichnet.

Satz: Jede Fläche ist lokal ein Graph. $M \subset \mathscr{R}^n$ sei C^k-Fläche der Dimension d, $f \in C^k(U, \mathscr{R}^n)$ Parametrisierung von M. Dann gibt es zu jedem Parameterwert $u_* \in U$ eine Umgebung $\tilde{U} \subset \mathscr{R}^d$, so dass bzgl. einer geeigneten (Nummerierung der) Basis(vektoren) die Teilfläche $\tilde{M} := f(\tilde{U}) =$ ein Graph ist:

$$\tilde{M} = \text{graph}(h) = \{(x, h(x)) : x \in X\}$$

mit einer C^k-Funktion $h : X \to \mathscr{R}^{n-d}, X \subset \mathscr{R}^d$ offen.

Satz über implizite Darstellung von Flächen. Sei $V \subset \mathscr{R}^n$ offen, $n = l + d, 0 \leq d \leq n$. Eine Abbildung $g \in C^k(V, \mathscr{R}^l)$ habe bei einem $v_* \in V$ vollen Rang,

$$\mathrm{rang} Dg(v_*) = l$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{V}$ von v_* und eine offene Umgebung Z von z_*, so dass die Mengen

$$M^z = \{v \in V : g(v) = z\}, \quad z \in Z$$

C^k-Flächen der Dimension d sind, falls $d > 0$, bzw. einpunktig, falls $d = 0$.

Satz über die lineare Dualität expliziter und impliziter Darstellungen von Flächen. Seien f, g explizite bzw. implizite Darstellungen dersleben Fläche. Dann gilt an jedem Punkt $p = f(u)$:

$$Dg(p)Df(u) = 0,$$

genauer: Die Zeilen $Dg_i(p)$ spannen den Links-kern von $Df(u)$ (das "Normalenbündel"), die Spalten $\partial_{u_j} f(u)$ den Rechts-Kern von $Dg(p)$ (das "Tangentialbündel") auf.

Satz über Extrema unter Nebenbedingungen. In der Situation des obigen Satzes über die implizite Darstellung von Flächen sei ausserdem eine reellwertige C^1-Funktion ϕ gegeben, deren Defnitionsbereich die Umgebng V des Punktes $v_* \in M \equiv M^{z_*}$ enthält. Falls $\phi|M$ bei v_* ein lokales Extremum hat, so ist

$$\nabla\phi(v_*) \in \mathrm{span}\{\nabla g_i(v_*), i = 1, \ldots, l\}.$$

Definition: Mannigfaltigkeit, Karten, Atlas. (i) Eine Menge $M \subset \mathscr{R}^n$ heißt d-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit im $\mathscr{R}^n$ $:\Leftrightarrow$ M ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler d-dimensionaler C^k-Flächen $M_i, i \in I$, deren paarweise Schnittmengen $M_i \cap M_j, i, j \in I$ allesamt ebenfalls d-dimensionale C^k-Flächen sind. (ii) In so einer Situation heißen die $M_i, i \in I$ Karten, die Menge $\{M_i, i \in I\}$ ein Atlas von M.

Beispiel. M Fläche $\Leftrightarrow$ M Mannigfaltigkeit mit einelementigem Atlas.

Satz über implizite Darstellung von Mannigfaltigkeiten. Es seien $U \subset \mathscr{R}^n, g \in C^k(U, \mathscr{R}^l)$, $0 < l < n$ und $z_* \in g(U)$ so dass

$$\mathrm{rang} Dg(v) = l = \mathrm{voll}$$

an allen Punkten v von

$$M = g^{-1}(z_*).$$

Dann ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit in $\mathscr{R}^n$ der Dimension $d = n - l$.

Beispiel. Falls $g^{-1}(z_*)$ beschränkt ist, so ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit, für die jeder Atlas mehr als eine Karte haben muss.