Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler

21. April 2008

Analysis II
1. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 30. 4. 2008 bis 2. 5. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 28. 4. 2008 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 1 Die Funktionen $f, g, h : \mathscr{R}^2 \to \mathscr{R}$ seien gegeben durch $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$ und

$$f(x) = \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \; g(x) = \frac{x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, \; h(x) = \frac{x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - x_2^3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Sind sie im Punkt $(x_1, x_2) = (0, 0)$ differenzierbar oder nicht? Für welche Richtungen $v \in \mathscr{R}^2$ existieren die Richtungsableitungen $D_v f(0,0), D_v g(0,0), D_v h(0,0)$?

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Ableitung (Jacobimatrix) der folgenden Funktionen:

(a) $\quad f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (x_1, x_2, x_3) \neq 0,$

(b) $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_3^2 \ln(x_1 \cdot x_2), x_1 + \sin(x_3/x_2), \cos(x_1^2 + x_2^2)), \quad (x_1, x_2, x_3) \in (0, \infty)^2 \times \mathscr{R},$

(c) $\quad f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \neq 0,$

(d) $\quad u(t, x) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\dfrac{\|x\|_2^2}{4t}\right), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathscr{R}^n.$

Aufgabe 3 Berechnen Sie jeweils $f'(x)$, $g'(y)$ und $(g \circ f)'(x)$ für alle x und $y \in \mathscr{R}^2$:

$$(i) \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1^3 - 3y_1 y_2^2 \\ 3y_1^2 y_2 - y_2^3 \end{pmatrix},$$

$$(ii) \quad f(x) = \begin{pmatrix} \exp(x_1 x_2)\cos(x_2^2) \\ \ln(x_1^2 + x_2^2 + 1)\exp(\cos(x_1)) \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \cos(y_2) \\ y_1 \sin(y_2) \end{pmatrix},$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1^3 + x_2^4) \\ \cos(x_1^2 x_2^2) \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1(1 + y_2^2)^{-1} \\ y_2(1 + y_1^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Sei $f : \mathscr{R}^3 \to \mathscr{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 + x_1 \cos(x_3) + x_2 \sin(x_3) \\ 2 - x_1 \sin(x_3) + x_2 \cos(x_3) \\ 3 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

und g die Umkehrabbildung von f. Berechnen Sie $g'(1, 2, 3)$.