Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler

9. Mai 2008

Analysis II
4. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 21. 5. 2008 bis 23. 5. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und die Bearbeitungen bis zum 19. 5. 2008, 10.00 Uhr, in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 13 (i) Geben Sie eine Abbildung $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ an, so dass

$$(*) \qquad \det J_f(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0, \quad \det J_f(0) = 0$$

und f umkehrbar ist. Ist die Umkehrfunktion stetig differenzierbar?
(ii) Geben Sie eine Abbildung $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ an, die die Eigenschaft $(*)$ hat und so beschaffen ist, dass es keine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^2$ von 0 gibt, so dass $f|V : V \to f(V)$ bijektiv wäre.

Aufgabe 14 Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cos(\xi_2) \sin(\xi_3) \\ x_2 &= \xi_1 \sin(\xi_2) \sin(\xi_3) \\ x_3 &= \xi_1 \cos(\xi_3). \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie die Punkte $\xi \in \mathbb{R}^3$, bei denen f lokal umkehrbar ist.
(ii) Charakterisieren Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ die Urbildmenge $f^{-1}(x)$.
(iii) Geben Sie eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ an, so dass M durch die Restriktion $f|M$ bijektiv auf $\mathbb{R}^3$ abgebildet wird.

Aufgabe 15 Bestimmen Sie die Menge $A \subset [0, \infty)$ derjenigen Startwerte $a_0 \geq 0$, für die die durch

$$a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}$$

definierte Folge konvergiert, und bestimmen Sie zu jedem $a_0 \in A$ den jeweiligen Grenzwert $g(a_0)$ der Folge.

Aufgabe 16 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f(x_*) = 0 \neq f'(x_*)$. Zeigen Sie, dass mit einem $r > 0$ gilt: Wenn $|x_0 - x_*| < r$, dann ist durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

eine Folge wohldefiniert mit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_*.$$