Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler

19. Mai 2008

Analysis II
5. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 28. 5. 2008 bis 30. 5. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und die Bearbeitungen bis zum 26. 5. 2008, 10.00 Uhr, in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 17 Gibt es eine Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^2$, so dass $f : U \to \mathbb{R}^3$,

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u_1) + \cos^2(u_2)}} \begin{pmatrix} \sin(u_1)\cos(u_2) \\ \sqrt{2}\cos(u_1)\cos(u_2) \\ \cos(u_1)\sin(u_2) \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung einer C^∞-Fläche M ist? Was ist die Schnittmenge von M und

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad ?$$

Aufgabe 18 Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 19 Bestimmen Sie

$$\max\{\sin \frac{(x + y + z)\pi}{4} : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Aufgabe 20 Mit $n \geq 2$ sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine reelle quadratische symmetrische Matrix.

(i) Charakterisieren Sie die kritschen Stellen der reellwertigen Funktion ϕ

$$\phi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

auf der Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$.
(ii) Geben Sie eine Bedingung an die Eigenwerte λ_j von A an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass ϕ sein Maximum auf S an genau zwei Punkten annimmt.
(iii) Zeigen Sie: Falls die Menge $M \subset S$ derjenigen Punkte, an denen ϕ sein Maximum auf S annimmt, mehr als zwei Punkte enthält, so ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wie hängt die Dimension von M mit den λ_j zusammen?