Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler

16. Juni 2008

Analysis II
9. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 25. 6. 2008 bis 27. 6. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und die Bearbeitungen bis zum 23. 6. 2008, 10.00 Uhr, in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 33 Beweisen Sie anhand der Definition, dass der Kegel

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$$

und die Kugel

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$$

quadrierbar sind.

Aufgabe 34 Berechnen Sie das Mehrfachintegral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2+y^2+z^2 dxdydz.$$

Aufgabe 35 Seien $a_1, \ldots, a_n > 0$. Beweisen Sie, dass man das Volumen $V(a_1, \ldots, a_n)$ des Ellipsoiden

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1\}$$

per einfacher Formel durch das Volumen $V(1, \ldots, 1)$ der Einheitskugel ausdrücken kann.

Aufgabe 36 Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller beschränkten Rechtecke der Form $I_1 \times I_2$ mit Intervallen $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$. Betrachten Sie eine Funktion $m : \mathcal{R} \to [0, \infty)$, für die gilt:
(i) Sind $R_1, R_2, R \in \mathcal{R}$ mit $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ und $R_1 \cup R_2 = R$, so ist $m(R) = m(R_1) + m(R_2)$.
(ii) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^2$ gilt $m(\xi + R) = m(R)$.
(iii)$m([0,1] \times [0,1]) = 1$.
Zeigen Sie, dass für alle $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ gilt:

$$m([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$