

23. Juni 2008

Analysis II
10. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 2.7.2008 bis 4.7.2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und die Bearbeitungen bis zum 30.6.2008, 10.00 Uhr, in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 37 (a) Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Zeigen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_A x_1^n x_2^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+2)!}$$

gilt.

(b) Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - (0, 1)^T| \leq 2\}$. Berechnen Sie

$$\int_B (x_1^2 + 3x_2^2 + 1) dx.$$

Aufgabe 38 Berechnen Sie die Volumina folgender Körper anhand geeigneter Koordinaten:

- (a) Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, $R, h > 0$
- (b) Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h(1 - \sqrt{x^2 + y^2}/R)\}$, $R, h > 0$
- (c) Torus $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$, $0 < r < R$.

Aufgabe 39 Berechnen Sie für $h > 0$ das Volumen der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_3 \leq h \text{ und } |x - (2 \cos x_3, 2 \sin x_3, x_3)^T| \leq 1\}.$$

Aufgabe 40 Wenn ein Körper einen Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ mit der Massendichte $\rho(x), x \in B$, ausfüllt, so ist sein Schwerpunkt $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ gegeben durch

$$\bar{x}_i := \left(\int_B x_i \rho(x) dx \right) / \left(\int_B \rho(x) dx \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kugeloktanten $B = \{x \in [0, \infty)^3 : |x| \leq R\}, R > 0$, dessen Masse mit der konstanten Dichte $\rho = 1$ verteilt ist.