2.5 Gradient und JACOBI-Matrix

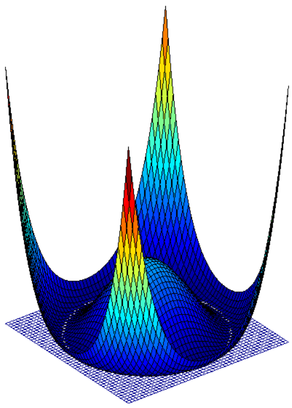
AUFGABE

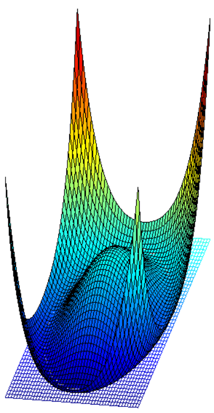
Gegeben sei für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2-1)^2 - cx \end{array}.$$

An welchen Punkten ist $\nabla f_c = 0$? Wo hat f_c sein globales Minimum?

LÖSUNG





Differenzieren nach x und y liefert

$$\nabla f_c(x,y) = (4(x^2+y^2-1)x - c, 4(x^2+y^2-1)y).$$

Wir betrachten zuerst den Fall $c = 0$.

Offenbar gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 = 1$, dass $f_0(x,y) = 0$, d.h. die Nullstellenmenge von f_0 ist genau der Einheitskreis

$$\mathbb{S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||(x,y)||_2 := x^2+y^2 = 1\}.$$

Da f_0 als Quadrat niemals negativ werden kann, ist $\mathbb{S}$ die Menge aller globalen Minima von f_0; isolierte Minima existieren nicht.

Sei nun $c \neq 0$. Der Graph von f_c wird dann in x-Richtung um den Faktor c „gekippt“.

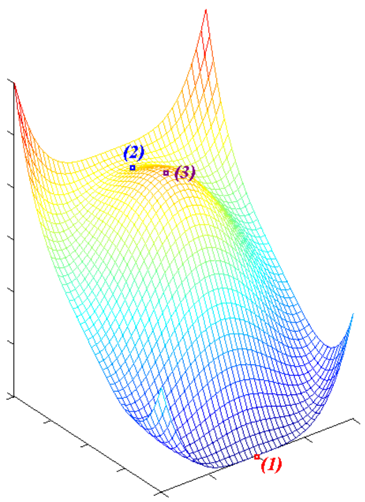
Wir zeigen zunächst, dass $\nabla f_c = 0 \Rightarrow y = 0$. Angenommen, y wäre nicht 0, dann muss für die zweite Koordinate von ∇f_c gelten $(x^2+y^2-1) = 0$, also $x^2+y^2 = 1$. Damit auch die erste Koordinate 0 wird, folgt $c = 0$, Widerspruch.

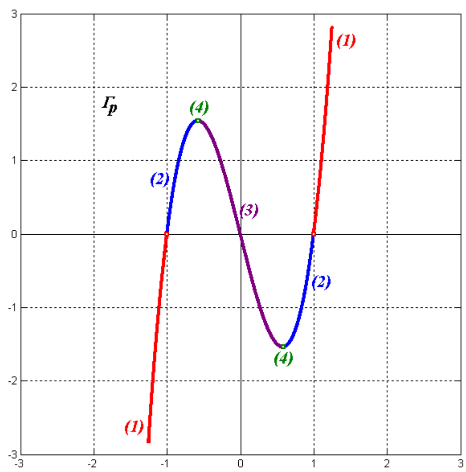
Da $\nabla f_c = 0$ eine notwendige Bedingung für das Vorliegen von Extrempunkten ist, folgt damit, dass alle globalen Minima von f auf der x-Achse liegen.

Wir suchen noch die (von c abhängenden) x-Koordinaten. Diese muss die Gleichung

$$4(x^2-1)x - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4x = c$$

erfüllen, d.h. wir suchen die c-Stellen des Polynoms $p(x) := 4x^3 - 4x$.





Die Extremstellen von p lassen sich berechnen durch

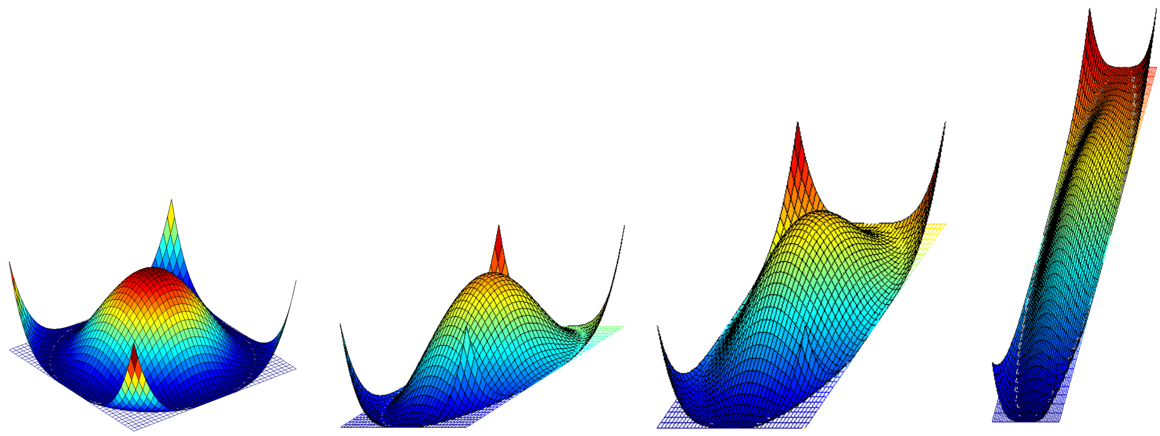
$$p'(x) = 12x^2 - 4 \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} =: \pm\overline{x}.$$

Wir können an Γ_p dann ablesen:

$$\text{Anzahl der } c\text{-Stellen von } p \text{ ist } \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > p(-\overline{x}) \text{ oder } c < p(\overline{x}) \\ c = \pm p(\overline{x}) \\ p(\overline{x}) < c < -p(\overline{x}) \end{cases}.$$

Die Urbilder der beiden Äste (1) sind genau die globalen Minima von f_c; die Urbilder von (2) sind lokale Minima und die von (3) globale Maxima, sofern vorhanden.

Sowohl an Γ_{f_c} als auch an Γ_p sehen wir, dass mit wachsendem c der Hochpunkt von f_c mehr und mehr abflacht, bis er schließlich für $c = \pm p(\overline{x})$ verschwindet. Die lokalen Minima gehen für diesen Wert in einen Sattelpunkt (also in einen Punkt, der $\nabla f_c = 0$ erfüllt, aber trotzdem kein lokaler oder globaler Extrempunkt ist) über (4) und verschwinden für $c > p(\overline{x})$ oder $c < -p(\overline{x})$ ebenfalls.



Wir halten als Ergebnis fest:

(1) Im Fall $c < 0$ hat f_c das globale Minimum $(x_c^-, 0)$, wobei x_c^- die auf $(-\infty, -1)$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $p(x) = c$ ist.

(2) Im Fall $c > 0$ hat f_c das globale Minimum $(x_c^+, 0)$, wobei x_c^+ die auf $(1, \infty)$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $p(x) = c$ ist.

Aufgabe

Wir betrachten die Abbildungen

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2, y) \end{array} \quad \text{und} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & ((x^2+y^2-1)x, (x^2+y^2-1)y). \end{array}$$

(1) An welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Jacobi-Matrix von f invertierbar?

(2) Man bestimme alle Mengen

$$M_k(f) := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{es gibt genau } k \text{ Punkte } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x,y) = (a,b)\} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

(3) Wo ist die Jacobi-Matrix von f invertierbar?

(4) Ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} M_k(g) = \mathbb{R}^2$?

Lösung

(1) Durch partielles Differenzieren erhalten wir

$$\mathfrak{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bekanntlich ist eine Matrix genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht verschwindet. In unserem Fall:

$$\det \mathfrak{J}_f(x,y) = 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Die Jacobi-Matrix von f ist also in allen Punkten außer auf der x-Achse invertierbar.

Was bringt's? Wir werden später sehen, dass eine in einer offenen Umgebung U stetig differenzierbare Funktion mit invertierbarem $\mathfrak{J}_f(\overline{x})$ in $\overline{x}$ lokal invertierbar ist ($\overline{x} \in U$).

(2) Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist M_k die Menge aller Punkte aus $\mathbb{R}^2$ mit genau k Urbildern, d.h.

$$\begin{aligned} M_0 &= \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < 0\}; \\ M_1 &= \{0\} \times \mathbb{R} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0\}; \\ M_2 &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\} \\ M_k &= \emptyset \text{ für } k > 2. \end{aligned}$$

Offenbar ist die Familie $(M_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ disjunkt.

(3) Die Jacobi-Matrix zu g ist

$$\mathfrak{J}_g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1+2x^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2-1+2y^2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von $\mathfrak{J}_g(x,y)$ ist dann

$$\begin{aligned} \det(J_g(x,y)) &= (3x^2+y^2-1)(x^2+3y^2-1) - 4x^2y^2 \\ &= 3x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 1 \\ &= 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 - 4y^2 - 4x^2 + 2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 1 \\ &= 2(x^2-y^2-1)^2 + x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 - 1 \\ &= 2(x^2+y^2-1)^2 + x^2(x^2+y^2) + y^2(x^2+y^2) - 1 \\ &= 2(x^2+y^2-1)^2 + (x^2+y^2)^2 - 1. \end{aligned}$$

Durch die Substitution $c(x,y) := x^2 + y^2$ erhalten wie

$$\begin{aligned} \det \mathfrak{J}_g(c) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(c-1)^2 + c^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2c^2 - 4c + 2 + c^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3c^2 - 4c + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad c = 1 \text{ oder } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{J}_g(x,y)$ ist also genau dann invertierbar, wenn (x,y) nicht auf einem der beiden Kreise

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \text{ und} \\ \mathbb{S}_{\frac{1}{3}} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = \tfrac{1}{3}\} \end{aligned}$$

liegt.

(4) Um diese Aussage zu widerlegen, genügt es, eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ anzugeben, die unendlich viele Urbilder hat.

Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ ist eine solche: Es gilt $(x,y) \in \mathbb{S}_1 \Rightarrow g(x,y) = 0$.