2.6 Differenzierbarkeitskriterien

Satz

Seien U, V endlich dimensionale Vektorräume, U normiert, $\Omega \subseteq U,\ f : \Omega \to V$ in $x \in \Omega$ differenzierbar.
Dann ist f in x stetig.

Beweis

Wegen $A(x)$ stetig und $A(x)0 = 0$ gilt:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) + \lim_{h\to 0} A(x)h + \lim_{h\to 0} ||h||r(x,h) = f(x).$$

Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega,\ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x.
Dann existieren alle Richtungsableitungen von f in x und für $\xi \in \partial B_1(0)$ gilt

$$D_\xi f(x) = f'(x)\xi = \xi_1 \partial_1 f(x) + ... + \xi_n \partial_n f(x).$$

Insbesondere ist f in x partiell differenzierbar.

Beweis

Da f differenzierbar in x, gilt

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + ||h||r(x,h).$$

Wähle spezielle Inkrementvektoren $h = \epsilon e_i\ (i = 1, ..., n)$, dann $||h|| = \epsilon ||e_i|| = \epsilon$, d.h.

$$\frac{f(x+\epsilon e_i) - f(x)}{\epsilon} = f'(x)e_i + r(x, \epsilon e_i).$$

Also ist f partiell differenzierbar in x und $\forall i \in \{1, ..., n\} : \partial_i f(x) = f'(x)e_i$.
Weiter ist

$$f'(x)\xi = f'(x)(\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n) = \xi_1 f'(x)e_1 + ... + \xi_n f'(x)e_n.$$

Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega,\ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in einer Umgebung von x und $\partial_1 f, ..., \partial_n f$ stetig in x.
Dann ist f differenzierbar in x und für $h \neq 0$ gilt:

$$f'(x)h = h_1 \partial_1 f(x) + ... + h_n \partial_n f(x) = ||h|| D_{\frac{h}{||h||}} f(x).$$

Beweis

Wir müssen zeigen:

$$f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(x) = ||h||r(x,h),$$

wobei $r(x,h)$ stetig für $h \to 0$ mit $r(x,0) = 0$.
Im Fall $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} & f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{2} h_i \partial_i f(x) \\ = \quad & f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) - \sum_{i=1}^{2} h_i \partial_i f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)+f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\sum_{i=1}^{2}h_i\partial_i f(x)\\
&\overset{(\mathrm{MWS})}{=} \partial_1 f(\underbrace{x_1+\vartheta_1 h_1,x_2+h_2}_{=:x^{(1)}})h_1+\partial_2 f(\underbrace{x_1,x_2+\vartheta_2 h_2}_{=:x^{(2)}})h_2-\sum_{i=1}^{2}h_i\partial_i f(x)\ (\vartheta_1,\vartheta_2\in(0,1))\\
&= \sum_{i=1}^{2}h_i(\partial_i f(x^{(i)})-\partial_i f(x))\\
&= ||h||\sum_{i=1}^{2}\frac{h_i}{||h||}(\partial_i f(x^{(i)}(h)-\partial_i f(x))\\
&=: r(x,h).
\end{aligned}$$

Wir setzen $r(x,0):=0$. Dann ist r in 0 stetig, denn für $h\to 0$ gilt: $x^{(1)}\to x,\ x^{(2)}\to x$.

Da $\partial_i f$ stetig in x, folgt mit Induktion die Behauptung.

Bemerkung

Existieren bei einer Funktion f alle Richtungsableitungen, so muss f deswegen nicht differenzierbar sein.

Existieren alle partiellen Ableitungen einer Funktion f, sind aber nicht stetig, dann ist f nie differenzierbar.

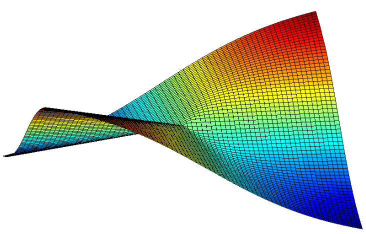
Wir betrachten dazu einige ...

Beispiele

Wir setzen die Funktionen $f,g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$\begin{aligned}
f(x,y) &:= \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}};\\
g(x,y) &:= \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2};\\
h(x,y) &:= \frac{(x-y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

im Nullpunkt durch 0 fort und untersuchen sie in diesem Punkt auf die Existenz aller Richtungsableitungen und totale Differenzierbarkeit. Sei dazu $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{S}$.



Dann ist

$$f(0+tv)=\frac{t^2v_1v_2}{|t|}=|t|v_1v_2,$$

also gilt für die Ableitung von f in Richtung v:

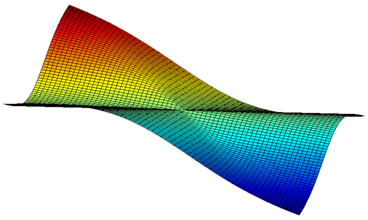
$$D_vf((0,0))=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}v_1v_2\mathrm{sgn}(t).$$

Gilt dann $v_1\neq 0$ und $v_2\neq 0$, so ist

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow 0}\mathrm{sgn}(t)v_1v_2 &= -v_1v_2\\
\lim_{t\downarrow 0}\mathrm{sgn}(t)v_1v_2 &= v_1v_2,
\end{aligned}$$

d.h. $D_vf((0,0))$ existiert nur für $v=e^{(1)}$ oder $v=e^{(2)}$.

Insbesondere ist f in $(0,0)$ nicht differenzierbar.



Entsprechend berechnen wir für g:

$$D_v g((0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0+tv)-g(0)}{t} = \frac{t(v_1-v_2)^3}{t} = (v_1-v_2)^3.$$

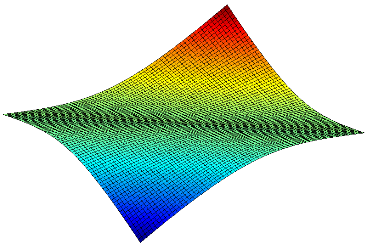
Also lässt sich g in alle Raumrichtungen v ableiten.

Dennoch ist g nicht differenzierbar. Wir zeigen dazu, dass es ein $v \in \mathbb{S}$ gibt mit

$$D_v g((0,0)) \neq \partial_1 g((0,0))v_1 + \partial_2 g((0,0))v_2.$$

Setze dazu $(v_1,v_2) := \frac{(1,-1)}{||(1,-1)||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, dann

$$\begin{aligned} D_v g((0,0)) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{2}^3; \\ \sum_{i=1}^{2} \partial_i g((0,0))v_i &= v_1 - v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$



Auch für h existieren die Ableitungen in alle Raumrichtungen:

$$\begin{aligned} D_v h((0,0)) &= \lim_{t\to 0}\frac{h(0+tv)-h(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3(v_1-v_2)^3}{t|t|} \\ &= \lim_{t\to 0} |t|(v_1-v_2)^3 = 0. \end{aligned}$$

h ist sogar differenzierbar. Um dies zu zeigen, berechnen wir die partiellen Ableitungen $\partial_x h(x,y)$ und $\partial_y h(x,y)$ und zeigen, dass diese stetig in einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von 0 sind.

Setze dazu $U := \mathbb{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h(x,y) &= \frac{3(x-y)^2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{(x-y)^3 2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}; \\ \frac{\partial}{\partial y} h(x,y) &= \frac{-3(x-y)^2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{(x-y)^3 2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Mittels der Abbildung

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & [0,\infty)\times[0,2\pi) \\ (x,y) & \mapsto & r(\cos\varphi, \sin\varphi) \end{array}$$

wechseln wir von kartesischen zu Polarkoordinaten und erhalten durch die Substitution

$$x := r\cos\varphi \text{ und } y := r\sin\varphi$$

für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_1 h(x,y) &= \frac{3(r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2\sqrt{r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)} - \frac{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}{\sqrt{r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}}2r\cos\varphi}{r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)} \\ &= \frac{3|r|r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2 - 2r\cos\varphi r^3\frac{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}{|r|}}{r^2} \\ &= 3|r|(\cos\varphi-\sin\varphi)^2 - 2|r|\cos\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)^3 \stackrel{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{und analog} \\ \partial_2 h(x,y) &= -3|r|(\cos\varphi-\sin\varphi)^2 - 2|r|\sin\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)^3 \stackrel{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$