2.7 Ableitungsregeln

Satz (Kettenregel)

Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V$ differenzierbar in $x \in U$ und $g : V \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $f(x) \in V$.

Dann ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x und $(g \circ f)'(x) = f'(f(x)) \circ f'(x)$.

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned}
& g(f(x+h)) - g(f(x)) - g'(f(x))f'(x)h \\
= \; & g(f(x)) + f'(x)h + ||h||r_f(x,h) - g(f(x)) - g'(f(x))f'(x)h \\
= \; & \underbrace{g(f(x)) + f'(x)h + ||h||r_f(x,h) - g(f(x)+f'(x)h)}_{\substack{\text{stetig für } h \to 0, \text{ da } (g,h) \mapsto f'(x)h \\ \text{und } h \mapsto r_f(x,h) \text{ stetig für } h \to 0}} + \underbrace{\underbrace{g(f(x)+f'(x)h) - g(f(x)) - g'(f(x))f'(x)h}_{= ||f'(x)h|| r_g(f(x), f'(x)h)}}_{\substack{\text{stetig für } h \to 0, \text{ da} \\ r_g(f(x),\cdot) \text{ stetig in } 0 \\ \text{und } h \mapsto f'(x)h \text{ stetig}}} \\
\overset{h \to 0}{\longrightarrow} \; & 0.
\end{aligned}$$

Notation

Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^0(U,V) &:= \{f : U \to V \mid f \text{ stetig in } U\}; \\
\mathfrak{C}^k(U,V) &:= \{f : U \to V \mid \partial_i f \in \mathfrak{C}^{k-1}(U,V),\ i = 1, \ldots, n\}; \\
\mathfrak{C}^\infty(U,V) &:= \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{C}^k(U,V).
\end{aligned}$$

Satz (Ableitungsregeln)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in \mathfrak{C}C^1(U, \mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ *(Summenregel)*.

(2) $(fg)' = gf' + fg'$ *(Produktregel)*.

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, dann

(3) $(\frac{f}{g})' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$ *(Quotientenregel)*.

Beweis

Folgt unmittelbar aus den Ableitungsregeln für 1D-Funktionen: Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann

$$\begin{aligned}
\partial_i(\alpha f + \beta g) &= \alpha(\partial_i f) + \beta(\partial_i g); \\
\partial_i(fg) &= (\partial_i f)g + (\partial_i g)f; \\
\partial_i\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{(\partial_i f)g - (\partial_i g)f}{g^2}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha(\nabla f) + \beta(\nabla g); \\
\nabla(fg) &= (\nabla f)g + (\nabla g)f; \\
\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{(\nabla f)g - (\nabla g)f}{g^2}.
\end{aligned}$$

Korollar

(1) Alle rationalen Funktionen $R : U \to \mathbb{R}$ sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

(2) Die partiellen Ableitungen sind wieder rationale Funktionen.