2.8 Der Mittelwertsatz

Motivation

Wir wollen den mehrdimensionalen Fall durch Einschränkung auf ein Geradenstück auf den bereits bekannten Mittelwertsatz im Eindimensionalen zurückführen.

Im 1D gilt für differenzierbare Funktionen $f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Wir müssen im Mehrdimensionalen sicherstellen, dass c in U liegt.

Sei dazu $s_a^b : \begin{smallmatrix} [0,1] \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto a + t(b-a) \end{smallmatrix}$, dann $s'^b_a(t) = b - a$. Sei weiter $U \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(b) - f(a) = f(s_a^b(1)) - f(s_a^b(0)) \overset{\text{MWS}}{=} (f \circ s_a^b)'(\vartheta) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{f'(s_a^b(\vartheta))}_{=:c \in s_a^b((0,1))} s'^b_a(\vartheta) = f'(c)(b-a).$$

Satz (Mittelwertsatz)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf U und $s_a^b([0,1]) \subseteq U$.

Dann gibt es ein $c \in s_a^b((0,1))$, so dass

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Bemerkung

Für $f \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ gilt:

$$f(b) - f(a) = (f'(c_1)(b-a), ..., f'(c_m)(b-a))$$

mit $c_1, ..., c_m \in s_a^b((0,1))$.

Definition

Sei V ein Vektorraum. Dann heißt ein $C \subseteq V$ *konvex*, falls

$$\forall a, b \in C : s_a^b([0,1]) \subseteq C,$$

wobei $s : \begin{smallmatrix} [0,1] \to & V \\ t & \mapsto a + (b-a)t \end{smallmatrix}$.

Beispiele

(1) $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

(2) $B_\epsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

Seien $a, b \in B_\epsilon(x)$. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$:

$$||s_a^b(t) - x|| = ||a + t(b-a) - x|| = ||(1-t)a + tb - (1-t)x - tx|| \leq \underbrace{|1-t|}_{=1-t} \underbrace{||a-x||}_{<\epsilon} + \underbrace{|t|}_{=t} \underbrace{||b-x||}_{y\epsilon} < \epsilon.$$

Korollar

Gilt $\forall x \in C : f'(x) = 0$ auf einer konvexen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist f auf C konstant.

Beweis

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$\forall a, b \in C : \exists c \in C : f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = 0 \Rightarrow f(b) = f(a).$$

Korollar

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nicht leer und zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $f'(U) = 0$. Dann ist f konstant.

Beweis

Sei $x_0 \in U$. Setze $c := f(x_0)$ und $A := \{x \in U \mid f(x) = c\}$. Dann $A \neq \emptyset$ und $A = f^{-1}(\{c\})$ abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer differenzierbaren, also insbesondere stetigen Funktion.

Gleichzeitig ist A offen, denn zu $y \in A$ gibt es stets ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subseteq U$. Da $f_i' = 0$ auf $B_\epsilon(y)$ für $i = 1, ..., m$, sind alle f_i nach letztem Korollar konstant auf $B_\epsilon(y)$, also $\forall z \in B_\epsilon(y) : f(z) = f(y) = c$ und damit $B_\epsilon(y) \subseteq A$.

Da U zusammenhängend, sind nur U und $\emptyset$ offen und abgeschlossen zugleich, also $U = A$ (da $U \neq \emptyset$).

Bemerkung

Um eine weitere Konsequenz aus dem Mittelwertsatz zu erhalten, verallgemeinern wir zunächst den Begriff der Richtungsableitung:

Bisher hatten wir zu einer differenzierbaren Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert

$$f'(x,h) := D_h f(x) : \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{S}_n & \to & \mathbb{R}^m \\ (x,h) & \mapsto & f'(x)h \end{array} .$$

Analog setzen wir für höhere Ableitungen

$$f^{(k)}(x, h_1, ..., h_k) : \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{S}_n \times ... \times \mathbb{S}_n & \to & \mathbb{R}^m \\ (x, h_1, ..., h_k) & \mapsto & f^{(p)}(x, h_1, ..., h_k) \end{array} ,$$

wobei $f^{(p)}(x, h_1, ..., h_k)$ induktiv definiert ist durch $(((f^{(p)}(x)h_k)h_{k-1})...)h_1$.

Insbesondere erhalten wir so die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung:

$$\partial_{i_1} ... \partial_{i_k} f(x) := f(x, e^{(i_1)}, ..., e^{(i_k)}) \qquad (i_1, ..., i_k = 1, ..., n).$$

Satz (Schwarz)

Sei $f \in \mathfrak{C}^2(U, \mathbb{R})$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gelten:

$$\begin{array}{rcrcl} \forall h, k \in \mathbb{S}_n & : & f''(x,h,k) & = & f''(x,k,h) \\ \forall i,j \in \{1, ..., n\} & : & \partial_i \partial_j f & = & \partial_j \partial_i f. \end{array}$$

Bemerkung

Schließlich erhalten wir – wieder durch Rückführung auf den 1D-Fall – den ...

Satz (Taylor)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $s_x^{x+h} \subseteq U$ und $f \in \mathfrak{C}^{(k)}(U, \mathbb{R})$ mit $f^{(k)}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x,h) + ... + \frac{1}{k!} f(x, h, ..., h) + R_k(x,h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x, \overbrace{h, ..., h}^{k \text{ mal}})}{i!} + R_k(x,h),$$

wobei für das Restglied gilt

$$R_k(x,h) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x + \theta h, h, ..., h) \text{ für ein } \theta \in (0,1).$$