2.10 Lokale Funktionsanalyse

Aufgabe

Gegeben sei die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) := (x^3 - yx, y)$.

Man bestimme alle Mengen $M_k := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid g^{-1}(\xi, \eta) \text{ hat genau } k \text{ Elemente}\}$.

Wie verhält g sich in der Nähe von Punkten aus $\Sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \det Dg(x, y) = 0\}$?

Lösung

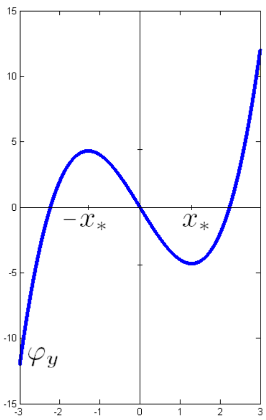
Die zweite Komponente von g ist ohnehin bijektiv. Betrachten wir also zu festem $y \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\varphi_y(x) := x^3 - yx$.

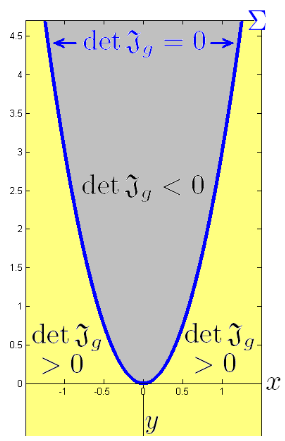
Für $y < 0$ beliebig gilt $\varphi_y'(x) = 3x^2 - y > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. φ_y ist streng monoton wachsend, insbesondere bijektiv und damit haben alle $(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ genau einen Urbildpunkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

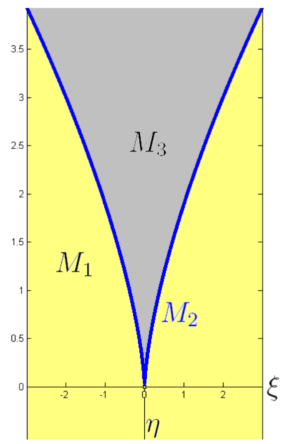
Auch der Punkt $(0, 0)$ hat genau ein Urbild, nämlich sich selbst, und gehört damit ebenfalls zu M_1.

Sei nun $y < 0$. Dann ist

$$\varphi_y'(x) = 3x^2 - y \begin{cases} > 0 & |x| > \sqrt{\frac{y}{3}} \\ = 0 & |x| = \sqrt{\frac{y}{3}} =: x_* \\ < 0 & |x| < \sqrt{\frac{y}{3}} \end{cases}$$







Wegen $\varphi_y(\pm x_*) = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}} y^{\frac{3}{2}}$ gilt mit $y_* := \frac{2}{3\sqrt{3}} y^{\frac{3}{2}}$:

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) \in M_1 &\quad\Leftrightarrow\quad |\xi| > y_*(\eta); \\ (\xi, \eta) \in M_2 &\quad\Leftrightarrow\quad |\xi| = y_*(\eta); \\ (\xi, \eta) \in M_3 &\quad\Leftrightarrow\quad |\xi| < y_*(\eta). \end{aligned}$$

Also werden M_1 und M_2 durch die Kurve M_2 aller Punkte getrennt, die die Gleichung $(\frac{\xi}{2})^2 = (\frac{\eta}{3})^3$ erfüllen. Man nennt diese Kurve auch Neil*sche Parabel*.

Die Punkte von $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x^2\}$ sind Träger zweier „Falten“ (bei $x < 0$ bzw. $x > 0$) bzw. eines „Zwickels“ (bei $x = 0$).

Lemma (Banachscher Fixpunktsatz)

Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Phi : X \to X$ *kontrahierend*, d.h.

$$\exists q < 1 : \forall x, y \in X : d(\Phi(x), \Phi(y)) < qd(x, y).$$

Dann besitzt Φ genau einen *Fixpunkt* $x \in X$, d.h. $\Phi(x) = x$ für genau ein $x \in X$.

Dieser kann iterativ gewonnen werden durch $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ mit beliebigem Startpunkt $x_0 \in X$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung $d(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$.

Satz (lokale Umkehrbarkeit)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, $f \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $\overline{x} \in U$ und $\det(f'(\overline{x})) \neq 0$.

Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von $\overline{x}$, so dass gilt:

(1) $f|_V$ ist injektiv.
(2) $f(V)$ ist offen.
(3) $(f|_V)^{-1} \in \mathfrak{C}^1(f(V), \mathbb{R}^n)$.
(4) $((f|_V)^{-1})(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$.

Beispiel

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Jacobi-Matrix von f gegeben durch

$$\mathfrak{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

also $\det \mathfrak{J}_f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 > 0$, falls $(x, y) \neq (0, 0)$. f ist also auf ganz $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ lokal invertierbar. Allerdings ist f nicht global invertierbar, denn f ist nicht injektiv: $f(x, y) = f(-x, -y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Definition

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so dass zu jedem $x \in I$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ existiert mit $(x, y) \in U$ und $\Phi(x, y) = 0$.

Wir setzen dann

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \qquad \text{(d.h. } \forall x \in I : \Phi(x, \varphi(x)) = 0)$$

und sagen, dass φ durch die Gleichung $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$ „*implizit*“ gegeben ist.

Beispiel (Optimierungsproblem mit Nebenbedingung)

Wir sollen einen Zylinder mit möglichst kleiner Oberfläche („Optimierungsproblem“) bei gegebenem Volumen („Nebenbedingung“) konstruieren. Für die Oberfläche O und das Volumen V gelten die Formeln

$$O : \begin{array}{cc} [0, \infty)^2 \to & \mathbb{R} \\ (r, h) & \mapsto 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{array} \quad \text{und} \quad V : \begin{array}{cc} [0, \infty)^2 \to & \mathbb{R} \\ (r, h) & \mapsto \pi r^2 h \end{array}.$$

Mathematische Formulierung der Nebenbedingung:

$$V(r, h) = V_0 \text{ (als Gleichung)} \qquad \text{bzw.} \qquad \Phi(r, h) := V(r, h) - V_0 = 0 \text{ (als Nullstellenproblem)}.$$

Also: Suche optimalen Punkt (r, h) in der Menge $\Gamma = \{(r, h) \in [0, \infty) \mid \Phi(r, h) = 0\}$.

Allgemeine Situation

Gegeben seien n implizite Bedingungen und $m + n$ Variablen. Wir wollen untersuchen, ob mit m frei gewählten Variablen $v_1, ..., v_m$ die übrigen n Variablen $u_1, ..., u_n$ durch die n Nebenbedingungen festgelegt werden und wie dann $v_1, ..., v_m$ und $u_1, ..., u_n$ zusammenhängen können.

Wir sortieren dazu zunächst die Variablen und schreiben die Bedingungen in der Form $\Phi(u, v) = 0$ mit $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Ist Φ eine $\mathfrak{C}^1$-Funktion, dann

$$\Phi'(u, v)(h, k) = \underbrace{h_1 \partial_1 \Phi(u, v) + ... + h_n \partial_n \Phi(u, v)}_{=:\Phi'_{(1)}(u,v)h} + \underbrace{k_1 \partial_{n+1} \Phi(u, v) + ... + k_m \partial_{n+m} \Phi(u, v)}_{=:\Phi'_{(2)}(u,v)k}.$$

Satz (implizite Funktionen)
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi \in \mathfrak{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $(\overline{u}, \overline{v}) \in D$ mit $\Phi(\overline{u}, \overline{v}) = 0$ und

$$\Phi'_{(1)}(\overline{u}, \overline{v}) := \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1(\overline{u}, \overline{v}) & \cdots & \partial_n \Phi_1(\overline{u}, \overline{v}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \Phi_n(\overline{u}, \overline{v}) & \cdots & \partial_n \Phi_n(\overline{u}, \overline{v}) \end{pmatrix}$$

invertierbar.
Dann gibt es eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^m$ von $\overline{v}$ und eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi \in \mathfrak{C}^1(W, \mathbb{R}^n)$, so dass $\Phi(\varphi(v), v) = 0$ für alle $v \in W$.

Beweis
Wende den Satz über inverse Funktionen an auf die Abbildung

$$F : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (u,v) & \mapsto & (\Phi(u,v), v) \end{array} .$$

Dann ist F in einer Umgebung V von $(\overline{u}, \overline{v})$ lokal invertierbar, d.h. es gibt eine Funktion

$$G := F^{-1}|_V : \begin{array}{ccc} F(V) & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x,y) & \mapsto & (\widetilde{\varphi}(x,y), \widetilde{\psi}(x,y)) \end{array} ,$$

denn für die Determinante von $F'(\overline{u}, \overline{v})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\det \mathfrak{J}_F(\overline{u}, \overline{v}) &= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \partial_1 F_1 & \cdots & \partial_n F_1 & \partial_{n+1} F_1 & \cdots & \partial_{n+m} F_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_n & \cdots & \partial_n F_n & \partial_{n+1} F_n & \cdots & \partial_{n+m} F_n \\ \hline \partial_1 F_{n+1} & \cdots & \partial_n F_{n+1} & \partial_{n+1} F_{n+1} & \cdots & \partial_{n+m} F_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_{n+m} & \cdots & \partial_n F_{n+m} & \partial_{n+1} F_{n+m} & \cdots & \partial_{n+m} F_{n+m} \end{array}\right)(\overline{u}, \overline{v}) \\
&= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \partial_1 \Phi_1 & \cdots & \partial_n \Phi_1 & \\ \vdots & & \vdots & * \\ \partial_1 \Phi_n & \cdots & \partial_n \Phi_n & \\ \hline & 0 & & I \end{array}\right)(\overline{u}, \overline{v}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1(\overline{u}, \overline{v}) & \cdots & \partial_n \Phi_1(\overline{u}, \overline{v}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \Phi_n(\overline{u}, \overline{v}) & \cdots & \partial_n \Phi_n(\overline{u}, \overline{v}) \end{pmatrix} \\
&\neq 0 \quad \text{nach Voraussetzung.}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$F(G(x,y)) = (\Phi(\widetilde{\varphi}(x,y), \widetilde{\psi}(x,y)), \widetilde{\psi}(x,y)) = (x,y),$$

d.h.

$$\begin{aligned} y &= \widetilde{\psi}(x,y) \\ x &= \Phi(\widetilde{\varphi}(x,y), y) \end{aligned}$$

Also $F(\overline{u}, \overline{v}) = (\Phi(\overline{u}, \overline{v}), \overline{v}) = (0, \overline{v})$, d.h. $(0, \overline{v}) \in F(V)$.
Setze $W := \pi(F(V))$ mit $\pi(x,y) = y$ („Projektion“). Dann ist $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen.
Mit $\varphi(v) := \widetilde{\varphi}(0, v)$ ist $\varphi \in \mathfrak{C}^1(W, \mathbb{R}^n)$ (da $\widetilde{\varphi}$ $\mathfrak{C}^1$-Funktion) und wegen $\Phi(\widetilde{\varphi}(x,y), y) = x$ gilt

$$\Phi(\varphi(v), v) = \Phi(\widetilde{\varphi}(0, v), v) = 0.$$

Bemerkung (Implizites Ableiten)

Wir haben gesetzt

$$\Phi'(u,v)(h,k) = (\underbrace{h_1\partial_1\Phi + ... + h_n\partial_n\Phi}_{=:\Phi'_{(1)}(u,v)h} + \underbrace{k_1\partial_{n+1}\Phi + ... + k_m\partial_{n+m}\Phi}_{=:\Phi'_{(2)}(u,v)k})|_{(u,v)}.$$

Wegen $\Phi(\varphi(v),v) = 0$ für alle $v \in W$ ist auch $\Phi'(\varphi(v),v) = 0$.

Setze $G(v) := (\varphi(v),v)$ (d.h. $G'(v)h = (\varphi'(v)h,h)$). Dann

$$\begin{aligned}
0 &= (\Phi'(\varphi(v),v))h \\
&= (\Phi \circ G)'(v)h \\
&= \Phi'(G(v))G'(v)h \\
&= \Phi'(\varphi(v),v)(\varphi'(v)h,h) \\
&= (\Phi')_{(1)}(\varphi(v),v)\varphi'(v)h + (\Phi')_{(2)}(\varphi(v),v)h \\
\Rightarrow \varphi'(v)h &= ((\Phi')_{(1)}(\varphi(v),v)^{-1}(-(\Phi')_{(2)}(\varphi(v),v)h)) \\
\Rightarrow \varphi'(v) &= -(\Phi')_{(1)}(\varphi(v),v)^{-1}(\Phi')_{(2)}(\varphi(v),v)
\end{aligned}$$

Beispiel (lokale Beschreibung des Einheitskreises)

Sei $\Phi(\overline{u},\overline{v}) = u^2 + v^2 - 1$, dann entspricht $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(u,v) = 0\}$ dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$.

$(\overline{u},\overline{v}) = (1,0)$ erfüllt (z.B.) $\Phi(\overline{u},\overline{v}) = 0$ und es gilt

$$\Phi'(1,0)(h,k) = h\partial_1\Phi(1,0) + k\partial_2\Phi(1,0) = (\underbrace{h2u}_{=\Phi'_{(1)}(u,v)h} + \underbrace{k2v}_{=\Phi'_{(2)}(u,v)k})|_{(1,0)}.$$

Dann ist $\Phi'_{(1)}(1,0) = 2$ invertierbar und der Satz über implizite Funktionen liefert in einer Umgebung W von $\overline{v} = 0$ eine Abbildung $\varphi \in \mathfrak{C}^1(W,\mathbb{R})$ mit $(\varphi(v))^2 + v^2 - 1 = 0$.

Hier ist φ auch berechenbar: Auflösung nach φ liefert $\varphi(v) = \pm\sqrt{1-v^2}$ und mit der zusätzlichen Bedingung $\varphi(0) = 1$ erhalten wir die eindeutige Lösung $\varphi : \begin{smallmatrix} W & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \sqrt{1-v^2} \end{smallmatrix}$.

Mit implizitem Ableiten folgt

$$\varphi'(v) = -(\Phi')_{(1)}(\varphi(v),v)^{-1}(\Phi')_{(2)}(\varphi(v),v) = (-2\varphi(v))^{-1}2v = \frac{-v}{\varphi(v)} \text{ (Differenzialgleichung)},$$

d.h. wir können φ' angeben, ohne φ explizit zu berechnen.

Für den Punkt $(0,1)$ ist $\Phi'_{(1)}(0,1) = 0$, d.h. der Satz über implizite Funktionen ist nicht anwendbar. Hier ist Φ auch in keiner Umgebung von $(0,1)$ lokal auflösbar.

Beispiel (lokale Auflösung von Gleichungssystemen)

Zu zeigen ist die lokale Auflösbarkeit des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

in $(1,1,1)$ nach (y,z) (mit $x,y,z \in \mathbb{R}$).

Definiere

$$\Phi(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix},$$

dann $\Phi \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $D(\Phi)$ offen, $\Phi(1,1,1) = 0$ und

$$\mathfrak{J}_\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \end{pmatrix},$$

also $\Phi'_{(2)}(1,1,1)$ wegen $\det \Phi'_{(2)}(1,1,1) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 4$ invertierbar.

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist Φ dann in einer Umgebung von $(1,1)$ lokal nach (y,z) auflösbar.

Wir berechnen noch die Ableitung der Auflösungsfunktion φ. Es gilt

$$\Phi'(x,\varphi(x)) = \Phi'(x) + \Phi'(\varphi(x))\varphi'(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 2y & -2z \end{pmatrix} \varphi'(x).$$

Berechnung von $(\Phi'(\varphi(x)))^{-1}$ ergibt

$$\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 2y & -2z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2y} & 0 \\ \frac{1}{2z} & \frac{1}{2z} \end{pmatrix}$$

und wir können nach $\varphi'(x)$ auflösen:

$$\varphi'(x) = -(\Phi'(\varphi(x)))^{-1}\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2y} & 0 \\ \frac{1}{2z} & \frac{1}{2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y} \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix}.$$

Beispiel (Burgers-Gleichung)

Gegeben sei $\Phi(t,x,u) = e^{x-tu} - u$ $(t,x,u \in \mathbb{R})$. Zu zeigen sind:

(a) $\Phi(t,x,u) = 0$ ist in einer Umgebung von $(0,x,e^x)$ nach u auflösbar.

(b) Die partiellen Ableitungen der Auflösung $U(t,x)$ aus der impliziten Gleichung $\Phi(t,x,U(t,x)) = 0$ lösen die sog. Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}U(t,x)^2 = 0.$$

Für die partiellen Ableitungen von Φ gilt:

$$\begin{aligned} D_1\Phi(t,x,u) &= \exp(x-tu)(-u) \\ D_2\Phi(t,x,u) &= \exp(x-tu) \\ D_3\Phi(t,x,u) &= \exp(x-tu)(-t) - 1. \end{aligned}$$

Wegen $D_3(0,x,e^x) = e^x 0 - 1 = -1 \neq 0$ und $\Phi(0,x,e^x) = e^x - e^x = 0$ ist Φ lokal nach u auflösbar.

Weiter gilt für die partiellen Ableitungen:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x,U(t,x)) = D_1\Phi(t,x,U(t,x)) + D_3\Phi(t,x,U(t,x))\frac{\partial}{\partial t}U(t,x)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}U(t,x) &= \frac{-D_1\Phi(t,x,U(t,x))}{D_3\Phi(t,x,U(t,x))} \\ &= \frac{-\exp(x-tU(t,x))(-U(t,x))}{\exp(x-tU(t,x))(-t)-1}; \\ \frac{\partial}{\partial x}U(t,x) &= \frac{-D_2\Phi(t,x,U(t,x))}{D_3\Phi(t,x,U(t,x))} \\ &= \frac{-\exp(x-tU(t,x))}{\exp(x-tU(t,x))(-t)-1}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Burgers-Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}U(t,x)^2 \\ = & \frac{-\exp(x-tU(t,x))(-U(t,x))}{\exp(x-tU(t,x))(-t)-1} + \frac{1}{2}2U(t,x)\frac{-\exp(x-tU(t,x))}{\exp(x-tU(t,x))(-t)-1} \\ = & \frac{-\exp(x-tU(t,x))(-U(t,x)) + U(t,x)(-\exp(x-tU(t,x)))}{\exp(x-tU(z,x))(-t)-1} \\ = & \ 0. \end{aligned}$$