

2.11 Kugelkoordinaten

MOTIVATION

Statt einen Punkt P im \mathbb{R}^2 durch seine kartesischen Koordinaten (x, y) anzugeben, kann man ihn auch durch seinen Abstand r zum Ursprung und dem Winkel φ zwischen der Strecke \overline{PO} und der (positiven) x -Achse: den **Polarkoordinaten** von P .

Der Wechsel von Polar- in kartesische Koordinaten wird beschrieben durch die Transformation

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG

- (1) Φ ist stetig differenzierbar, surjektiv und lokal umkehrbar auf $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$.
- (2) Schränkt man Φ ein auf $I := (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, dann ist $\Phi|_I$ eine Bijektion zwischen I und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (3) Die Umkehrung $\Phi|_I^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow I$ ist gegeben durch

$$\Phi|_I^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan_{[0, 2\pi)}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}.$$

ANWENDUNG

Der Einheitskreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x, y\| = 1\}$ lässt sich darstellen als Bild der Abbildung

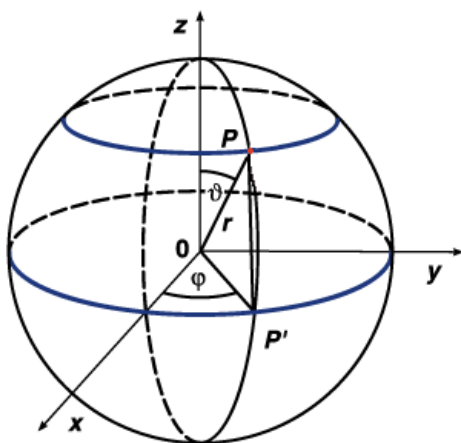
$$\Psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Psi(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

oder als Vereinigung der Graphen $\{(x, \Gamma_{\pm}(x)) \mid x \in [-1, 1]\}$ der Abbildungen

$$\Gamma_{\pm} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma_{\pm}(x) := \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ und alle $x \in [-1, 1]$ gilt nämlich

$$\|\Psi(\varphi)\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = 1 = \sqrt{x^2 + (\pm \sqrt{1 - x^2})^2} = \|(x, \Gamma_{\pm}(x))\|.$$



Entsprechend suchen wir jetzt eine stetig differenzierbare, surjektive, lokal invertierbare Abbildung Φ , die jeden Punkt P in kartesischen Koordinaten (x, y, z) durch zwei Winkel φ, θ und den Abstand $r = \overline{PO}$ von P zum Ursprung beschreibt.

Genauer: Wir suchen Abbildungen $\Phi_i : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi_i(r, \varphi, \theta) = x_i$ ($i = 1, 2, 3$), so dass

$$\Phi := \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

obige Eigenschaften hat.

Am einfachsten kommen wir an die z -Koordinate bzw. an Φ_3 :

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \theta =: \Phi_3(r, \varphi, \theta).$$

Für die anderen beiden Koordinaten berechne zunächst $d := |\overline{P'O}|$: Es gilt

$$\sin \theta = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r \sin \theta.$$

Damit

$$\begin{aligned}\sin \varphi = \frac{y}{d} &\Rightarrow y = d \sin \varphi = r \sin \varphi \sin \theta; \\ \cos \varphi = \frac{x}{d} &\Rightarrow x = d \cos \varphi = r \cos \varphi \sin \theta.\end{aligned}$$

Insgesamt wird der Koordinatenwechsel von den *Kugelkoordinaten* (r, φ, θ) in die kartesischen Koordinaten (x, y, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ vermittelt durch die Transformation

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist Φ surjektiv und stetig differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned}\det \mathfrak{J}_{\Phi}(r, \varphi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta\end{aligned}$$

ist Φ lokal umkehrbar für auf $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

Wir suchen noch die Umkehrabbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Es gilt

$$\begin{aligned}r &= r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ z = r \cos \theta &\Rightarrow \theta = \theta(x, y, z) = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}x = r \cos \varphi \sin \theta &\Rightarrow \cos \varphi = \frac{x}{r \sin \theta}; \\ x = r \sin \varphi \sin \theta &\Rightarrow \sin \varphi = \frac{y}{r \sin \theta}\end{aligned}$$

und damit $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, d.h.

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y < 0 \\ 0 & y = 0, x > 0 \\ \pi & y = 0, x < 0 \end{cases}.$$

Die gesuchte Umkehrfunktion ist dann gegeben durch

$$\Psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \\ \theta(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

ANWENDUNG

Die Einheitskugel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| = 1\}$ lässt sich parametrisieren durch

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$