2.12 Kurvenparametrisierung

Definition

Funktionen $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ beschreiben *Kurven* im $\mathbb{R}^m$.

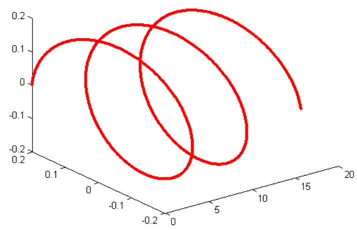
Bemerkung

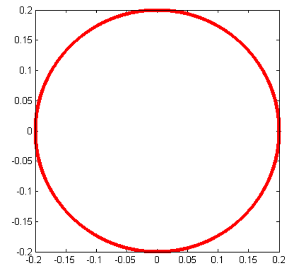
Kurven lassen sich visualisieren durch ...

(1) den Graphen $\Gamma_\gamma = \{t, \gamma(t) \mid t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ oder
(2) die Bildmenge $\gamma([a,b])$.

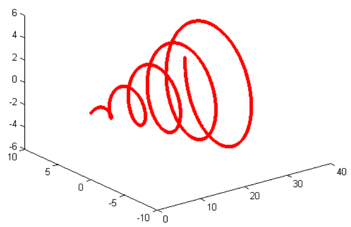
Beispiele

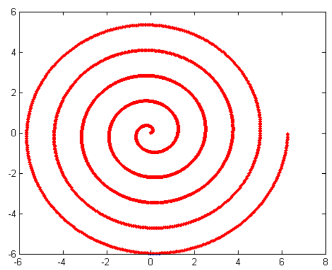
(1) Zu $r > 0$ betrachte $\gamma : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto r(\cos(t), \sin(t)) \end{array}$.



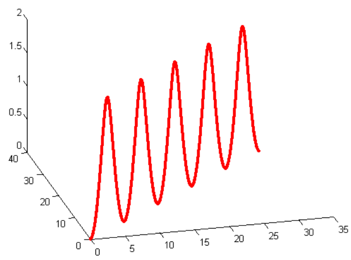


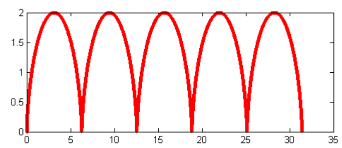
(2) Modifikation: $\gamma : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto t(\cos(t), \sin(t)) \end{array}$.





(3) *Zykloide*: $\gamma : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto t - \sin(t), 1 - \cos(t) \end{array}$.





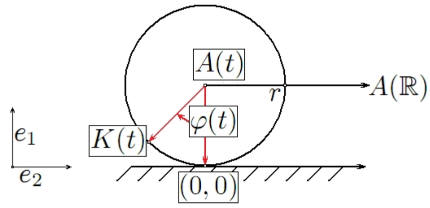
Beispiel (rotierendes Rad)

Ein Rad mit Radius $r > 0$ bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$.

Kurve der Radachse:

$$A(t) = (0,r) + (tv, 0) = \underbrace{re_1}_{\text{Startpunkt}} + t \underbrace{ve_2}_{\text{Geschwindigkeitsvektor}}.$$

Sei $K = K(t)$ ein ausgezeichneter Punkt auf dem Rand des Rades („Kieselstein“). Wir untersuchen die Bewegung des Verbindungsvektors $B(t) := K(t) - A(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t.



$K(t) - A(t)$ dreht sich im Uhrzeigersinn mit konstanter Drehgeschwindigkeit, also

$$\varphi(t) = -\omega t,$$

wobei $\omega \in \mathbb{R}^+$ konstant und $\varphi(t)$ Winkel zwischen $B(t)$ und $B(0)$.

Wir bestimmen zunächst ω. Nach einer Umdrehung hat das Rad den Weg $2\pi r$ zrück gelegt und dafür die Zeit $t_1 = \frac{2\pi r}{v}$ benötigt, also

$$-\omega t_1 = \varphi(t_1) = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{t_1} = \frac{2\pi v}{2\pi r} = \frac{v}{r}.$$

Bezeichnet also R_α die Drehung um den Winkel α in mathematisch positiver Richtung, dann

$$B(t) = R_{\varphi(t)}B(0).$$

Durch Einsetzen von $A(t)$ in $B(t) = A(t) - K(t)$ erhalten wir als Koordinatendarstellung bzgl. der Standardbasis:

$$\begin{pmatrix} K_1(t) \\ K_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv + r\sin\varphi(t) \\ r - r\cos\varphi(t) \end{pmatrix},$$

die *allgemeine Zykloidenkurve* mit Radius r und Geschwindigkeit v.

Im Fall $r = v = 1$ erhalten wir dann gerade die schon bekannte Parametrisierung

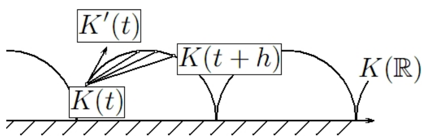
$$K(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Allgemein wird zu einer partiell differenzierbaren Funktion f durch

$$D_\xi f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)|_{t=0}$$

mit $g(t) = f(x + t\xi)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ beschrieben.

Wir wollen die physikalische Bedeutung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}K}(t)$ bestimmen.



Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) = \lim_{h\to 0} \frac{K(t+h) - K(t)}{h}$$

gibt die Ableitung von K bei t den Momentangeschwindigkeitsvektor (Quotient aus zurückgelegtem Weg und benötigter Zeit) an.

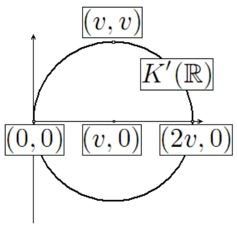
Es gilt:

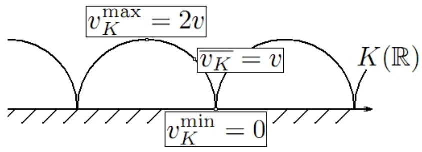
$$K'(t) = (v - v\cos\varphi(t), -v\sin\varphi(t)) = (v, 0) - v(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)).$$

Damit folgt weiter:

$$||K'(t)||_2 = \sqrt{v^2 - 2v^2\cos\varphi(t) + v^2\cos^2\varphi(t) + v^2\sin^2\varphi(t)} = \sqrt{2}v\sqrt{1 - \cos\varphi(t)}$$

ist die Momentangeschwindigkeit des Kiesels zum Zeitpunkt t.





Dabei nimmt $K'(t) = v_K(t)$ sein Maximum $v_K^{\max}$ an bei $\cos\varphi(t) = -1$ mit Wert $||K'(t)|| = 2v$ und sein Minimum $v_K^{\min}$ bei $\cos\varphi(t) = 1$ mit Wert $||K'(t)|| = 0$; bei $\cos\varphi(t) = \frac{1}{2}$ wird die Geschwindigkeit v angenommen.

$v_K(t)$ ist periodisch: Für $t \in \frac{2\pi r}{v}\mathbb{N}_0$ gilt $v_K(t) = 0$; für $t \in \frac{\pi r}{v}(1+\mathbb{N}_0)$ ist $v_K(t) = 2v$.

Physikalische Bedeutung von $(K')'(t)$: Momentanbeschleunigungsvektor zur Zeit t; hier:

$$K''(t) = \frac{v^2}{r}(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t)).$$

Für den Wert der Beschleunigung bei t gilt:

$$||K''(t)|| = \frac{v^2}{r}\sqrt{\sin^2\varphi(t) + \cos^2\varphi(t)} = \frac{v^2}{r} = \text{ const.}$$

Interpretation

Der Stein bleibt stecken, so lange die Haftreibung die benötigte Kraft $m\frac{v^2}{r}$ aufbringt.

Verallgemeinerung

Sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ eine Kurve. Falls alle Komponenten $\gamma_i,\ i = 1, ..., m$, differenzierbar in t sind, existiert der Tangentialvektor $\gamma'(t)$ zum Parameterwert t. Dieser Beschreibt die Änderungsrate und die Richtung von γ in t.

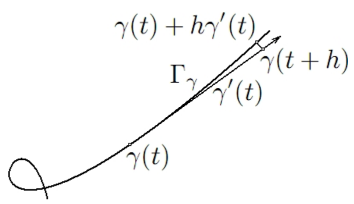
Bei glatten Kurven gilt nach dem Satz von Taylor:

$$\gamma_i(t+h) = \gamma_i(t) + \gamma_i'(t)h + \frac{1}{2}\gamma_i''(\vartheta_i)h^2,\ \forall 1 \le i \le m : \vartheta_i \in (t, t+h),\ h > 0.$$

Also:

$$||\gamma(t+h) - \gamma(t) + h\gamma'(t)|| = \frac{h^2}{2}||\gamma_1''(\vartheta_1), ..., \gamma_m''(\vartheta_m)|| \le Ch^2 \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

falls γ'' beschränkt ist.



Interpretation

Für $||\gamma'(t)||$ groß wird die Kurve bei t schnell durchlaufen und falls $\gamma'(t) \ne 0$, läuft die Kurve bei t in Richtung $\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$.

Definition

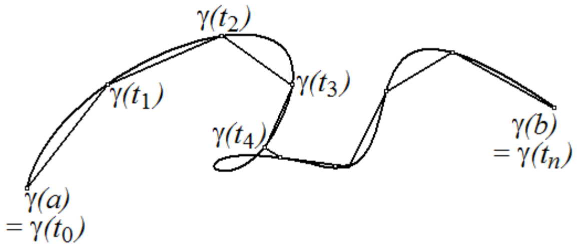
Sei $\gamma \in \mathfrak{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_2 \mathrm{d}t$$

die *Länge* der durch γ parametrisierten Kurve.

Interpretation

Ist γ stetig differenzierbar, dann ist die Länge von γ approximativ gleich der Länge eines Polygonzugs:



Dann gilt

$$\begin{aligned}
L_n \quad &:= \quad \sum_{i=1}^{n} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||_2 \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\|_2 (t_i - t_{i-1}) \\
&\overset{\text{MWS}}{=} \quad \sum_{i=1}^{n} ||\gamma'(\vartheta_i)||_2 (t_i - t_{i-1}) \qquad (\vartheta_i \in (t_{i-1}, t_i)) \\
&\xrightarrow[\max|t_i - t_{i-1}| \to 0]{n\to\infty} \quad \int_a^b ||\gamma'(t)|| \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $\gamma(t) = r(\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi],\ r > 0$.

Dann $\gamma'(t) = r(-\sin(t), \cos(t))$ und $||\gamma'(t)|| = (r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t))^{\frac{1}{2}} = r$.

Also $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r \mathrm{d}t = 2\pi r$.

Bemerkung

Die Definition macht nur Sinn, wenn $L(\gamma)$ unabhängig von der Parametrisierung von γ ist.

Betrachte $\tilde{\gamma} : \begin{smallmatrix} [c,d] \to & \mathbb{R}^n \\ \tau \mapsto & \gamma(\varphi(\tau)) \end{smallmatrix}$ mit *Parameterwechsel* $\varphi : \begin{smallmatrix} [c,d] \to & [a,b] \\ t \mapsto & \varphi(t) \end{smallmatrix}$. Dann

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_c^d ||\tilde{\gamma}'(\tau)||_2 \mathrm{d}\tau = \int_c^d ||\gamma'(\varphi(\tau))|||\varphi'(\tau)| \mathrm{d}\tau.$$

Mit der Substitution $t \mapsto \varphi(\tau)$ und $\mathrm{d}t = \varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau$ ergibt sich ...

(1) mit $\varphi' > 0$:

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_{a=\varphi(c)}^{b=\varphi(d)} ||\gamma'(t)|| \mathrm{d}t = L(\gamma).$$

(2) mit $\varphi' < 0$, d.h. $|\varphi'| = -\varphi'$:

$$L(\tilde{\gamma}) = -\int_{b=\varphi(c)}^{a=\varphi(d)} ||\gamma'(t)||_2 \mathrm{d}t = \int_a^b ||\gamma'(t)||_2 \mathrm{d}t = L(\gamma).$$

Spezialfall

Sei $\Psi(t) = \int_a^t ||\gamma'(\tau)|| \mathrm{d}\tau$. Dann $\Psi'(t) = ||\gamma'(t)|| > 0$, falls $\gamma'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$.

$\Psi : [a, b] \to [0, L(\gamma)]$ ist bijektiv mit Umkehrfunktion $\Psi^{-1} = \varphi : [0, L(\gamma)] \to [a, b]$, wobei

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\Psi'(\Psi^{-1}(s))} = \frac{1}{||\gamma'(\varphi(s))||},$$

also mit $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$:

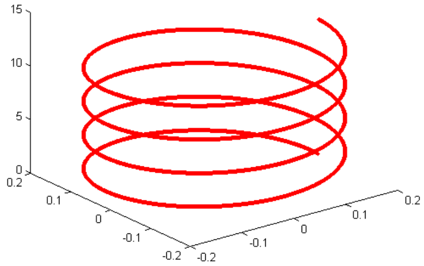
$$||\tilde{\gamma}'(s)|| = ||\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)|| = \frac{||\gamma'(\varphi(s))||}{||\gamma'(\varphi(s))||} = 1,$$

d.h. mit $\tilde{\gamma}$ wird die Kurve mit konstanter „Geschwindigkeit“ durchlaufen.

$\tilde{\gamma}$ wird dann als die *Bogenlängenparametrisierung* der Kurve bezeichnet.

Beispiel

Wir betrachten die durch $\gamma : \begin{array}{ll} [0,6\pi] \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (r\cos(t), r\sin(t), ct) \end{array}$ gegebene *Helix* ($c \in \mathbb{R}$).



Dann

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-r\sin(t), r\cos(t), c);\\
||\gamma'(t)|| &= \sqrt{r^2+c^2};\\
\Psi(t) &= \int_0^t \sqrt{(r^2+c^2)}\mathrm{d}\tau = t\sqrt{r^2+c^2};\\
\varphi(s) &= \frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}},
\end{aligned}$$

d.h. die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{\gamma}$ der Kurve ist gegeben durch

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{cs}{\sqrt{r^2+c^2}}\right).$$

Beobachtungen

(1) Der *Tangenteneinheitsvektor* $\theta(s) = \tilde{\gamma}'(s)$ der Bogenlängenparametrisierung $\tilde{\gamma}$ einer Kurve Γ erfüllt $||\theta(s)|| := \theta(s)\theta(s) = 1$.

(2) Generell gilt für die Ableitungen von Einheitsvektoren: $\theta'(s)\theta(s) = 0$, d.h. die Ableitung des Einheitsvektors ist orthogonal zum Einheitsvektor:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}1 = \theta'(s)\theta(s) + \theta(s)\theta'(s) = 2\theta(s)\theta'(s) \Rightarrow \theta(s)\theta'(s) = 0.$$

(3) Die *Krümmung* $K(s) = ||\theta'(s)||$ gibt an, wie „schnell“ sich die Richtung der Kurve lokal ändert:

(4) Im Fall $K(s) \neq 0$ bezeichnet $n(s) := \frac{\theta'(s)}{K(s)}$ den *Einheitsnormalenvektor*.

(5) Die Kurve Γ verläuft lokal annähernd in der θ-n-Ebene:

In einer Umgebung von $\gamma(s)$ wählen wir als Basisvektoren $a := \gamma(s) - \gamma(s-h)$ und $b := \gamma(s+h) - \gamma(s)$ bzw. äquivalent dazu (d.h. über Basiswechsel) $\frac{b+a}{2h}$ und $\frac{b-a}{h^2}$, dann

$$\begin{aligned}
\frac{b+a}{2h} &= \frac{\gamma(s+h)-\gamma(s-h)}{2h} \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} \gamma'(s) = \theta(s);\\
\frac{b-a}{h^2} &= \frac{\gamma(s+h)-2\gamma(s)+\gamma(s-h)}{h^2} \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} \gamma''(s) = \theta'(s) = K(s)n(s),
\end{aligned}$$

denn mit Taylor-Entwicklung (um den Punkt s) gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma(s+h) &= \gamma(s) + h\gamma'(s) + \frac{h^2}{2}\gamma''(s) + \frac{h^3}{6}\gamma'''(\vartheta);\\
\gamma(s-h) &= \gamma(s) - h\gamma'(s) + \frac{h^2}{2}\gamma''(s) - \frac{h^3}{6}\gamma'''(\vartheta)
\end{aligned}$$

mit gleichmäßig beschränktem Restglied, falls $\gamma \in \mathfrak{C}^3([a,b],\mathbb{R}^n)$.

(6) Im Dreidimensionalen ergänzen wir $\theta(s)$ und $n(s)$ mit dem *Binormalenvektor* $b(s) := \theta(s) \times n(s)$ zu einer Orthonormalbasis.

Dabei definieren wir das *Vektorprodukt (Kreuzprodukt)* folgendermaßen:

$$a, b \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow a \times b := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

n' liegt in der θ-b-Ebene, denn $n'(s)n(s) = 0$. Weiter gilt für die Krümmung der Kurve:

$$-K = -n(Kn) = -n\theta' = \underbrace{(n\theta)'}_{=0} - n\theta' = n'\theta.$$

Wir wollen noch untersuchen, wie stark sich Γ lokal aus der n-θ-Ebene entfernt. Betrachte dazu $\tau(s) := n'(s)b(s)$. τ gibt die Änderung des Normalenvektors n in Richtung b an und wird als die *Torsion* der Kurve bezeichnet.

Beispiel

Wir betrachten wieder die Bogenlängenparametrisierung der Helix

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{cs}{\sqrt{r^2+c^2}} \right).$$

(1) Die Krümmung der Kurve beträgt

$$K(s) = ||\theta'(s)|| = \frac{r}{r^2+c^2}.$$

Im Fall $c = 0$ ist Γ ein Kreis mit $K(s) = \frac{1}{r}$ konstant und abhängig vom Radius. Man nennt $\frac{1}{K}$ daher auch den *Krümmungsradius* der Kurve Γ.

(2) Der Normalenveltor

$$n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), 0 \right)$$

zeigt nach innen (d.h. auf die z-Achse).

(3) Für den Binormalenveltor erhalten wir

$$b(s) = \left(\frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} \right);$$

bei $c = 0: \; b(s) = (0, 0, \frac{1}{r})$.

(4) Die Torsion von Γ ist

$$T(s) = \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}};$$

bei $c = 0: \; \tau(s) = 0$.