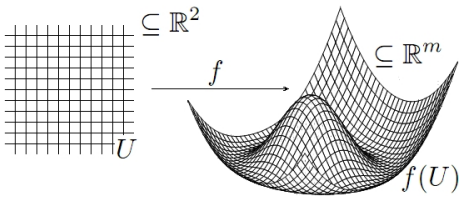
2.13 Flächenparametrisierung

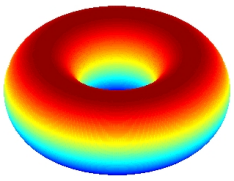
Definition

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}^m$. Dann parametrisiert f die *Fläche* $f(U)$.



Beispiel (Parametrisierung des Torus)

Wir parametrisieren den *Torus* $T = T(R, r) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit „Radius“ R und „Dicke“ $2r$.



Wir betrachten dazu zu jedem Punkt $R(\cos(u), \sin(u), 0)$ eines in der x_1-x_2-Ebene verlaufenden Kreises mit Radius R einen in der durch $a := (\cos(u), \sin(u), 0)$ und $b := (0, 0, 1)$ aufgespannten Ebene verlaufenden Kreis mir Radius r.

Dann parametrisiert $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (R\cos(u), R\sin(u), 0) + r\cos(v)a + r\sin(v)b \\ &= (R\cos(u) + r\cos(v)\cos(u), R\sin(u) + r\cos(v)\sin(u), r\sin(v)) \end{aligned}$$

den Torus T.

Zu $x = (u, v)$ untersuchen wir die Bedeutung der beiden Richtungsableitungen $D_{e_1} f(x) = \partial_1 f(x)$ und $D_{e_2} f(x) = \partial_2 f(x)$.

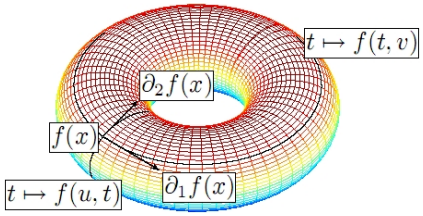
$$D_{e_1} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(u + t, v)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, v)|_{t=u}$$

beschreibt den Tangentialvektor an der Kurve $t \mapsto f(t, v)$ im Punkt $t = u$ („Koordinatenkurve“).

Analog ist

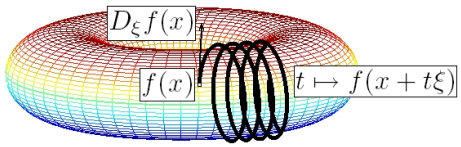
$$D_{e_2} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(u, v + t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(u, t)|_{t=v}$$

der Tangentialvektor an der Kurve $t \mapsto f(u, t)$ im Punkt $t = v$.



Da $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ zwei linear unabhängige Tangentialvektoren am Torus T im Punkt $f(x)$ sind, bilden sie die lineare Hülle (den Span) der Tangentialebene in $f(x)$.

Entsprechende Betrachtung können wir für allgemeines $\xi \in \partial B_1(0)$ durchführen:



Dann ist $D_\xi f(x)$ der Tangentialvektor am Bild $t \mapsto f(x+t\xi)$ der Geraden $t \mapsto x + t\xi$.

Beachte: Das Bild dieser Geraden beschreibt eine Kurve auf der Oberfläche des Torus.

Ist dabei ξ_i klein, dann ändert sich die i-Komponente langsam; ist ξ_i groß, so ändert sie sich schnell.

Bemerkung

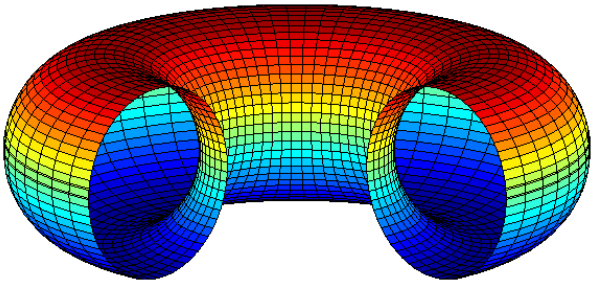
Die Torusparametrisierung $\Phi : [0, 2\pi)^2 \to \Phi([0, 2\pi)^2)$ mit

$$\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} R\cos(u) + r\cos(v)\cos(u) \\ R\sin(u) + r\cos(v)\sin(u) \\ r\sin(v) \end{pmatrix}$$

ist stetig differenzierbar und lokal injektiv mit

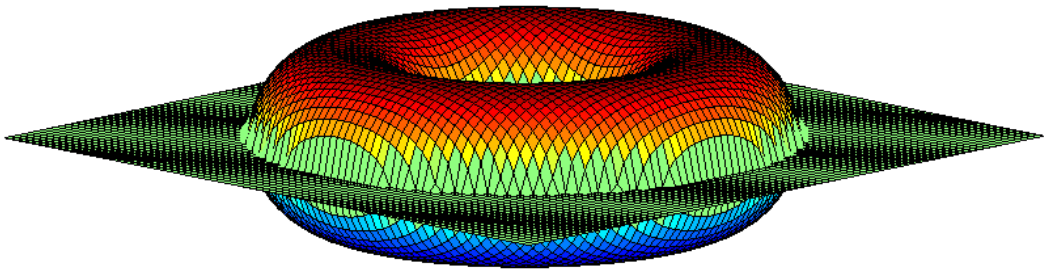
$$\mathfrak{J}_\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} -R\sin u - r\cos v\sin u & -r\sin v\cos u \\ R\cos u + r\cos v\cos u & -r\sin v\sin u \\ 0 & r\cos v \end{pmatrix}.$$

Man rechnet dabei leicht nach, dass $\mathfrak{J}_\Phi(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$ vollen Rang hat.



Der Torus lässt sich aber auch als Vereinigung der Graphen zweier Funktionen $\Psi_1, \Psi_2 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &:= +\sqrt{r - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2}; \\ \Psi_2(x, y) &:= -\sqrt{r - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2}. \end{aligned}$$

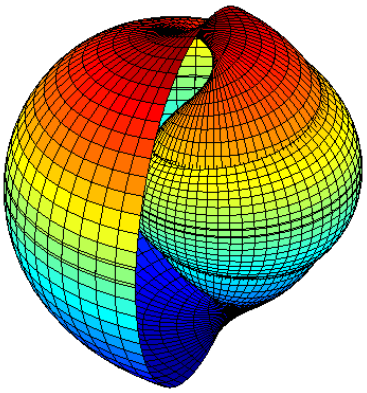


Wir setzen dabei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 \leq r\}$.

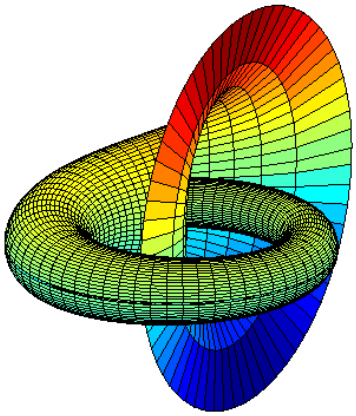
In Mengenschreibweise:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r\}$$

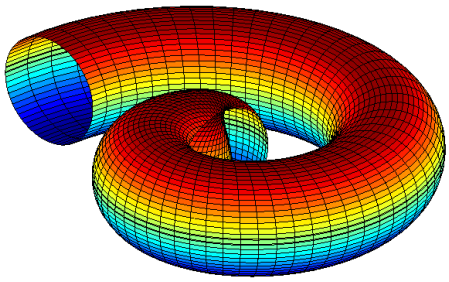
Als Letztes wollen wir noch einige verwandte Parametrisierungen von Φ ableiten:



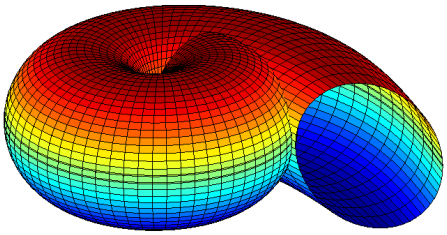
$$\Phi_1(u,v) := \begin{pmatrix} R\cos(u) + R(ur)\cos(v)\cos(u) \\ R\sin(u) + R(ur)\cos(v) \\ (ur)\sin(v) \end{pmatrix}$$



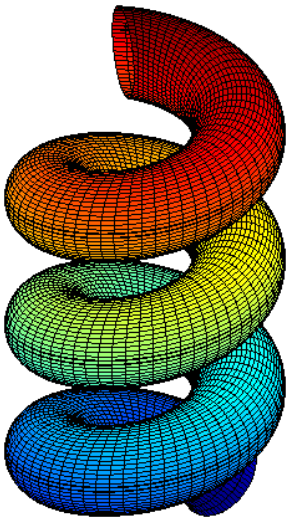
$$\Phi_2(u,v) := \begin{pmatrix} R\cos(u) + R(\frac{r}{\sqrt{u}})\cos(v)\cos(u) \\ R\sin(u) + R(\frac{r}{\sqrt{u}})\cos(v) \\ \frac{r}{\sqrt{u}}\sin(v) \end{pmatrix}$$



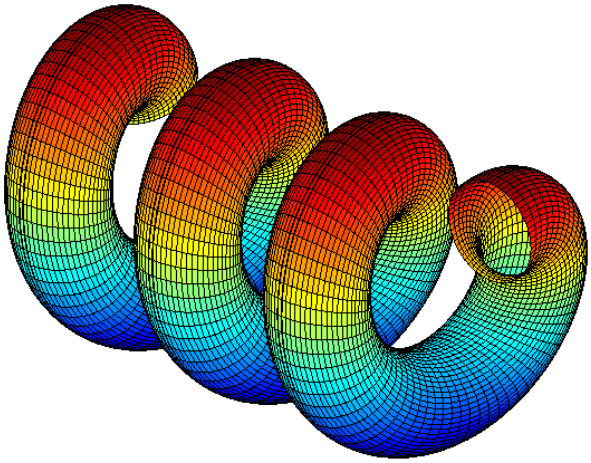
$$\Phi_3(u,v) := \begin{pmatrix} \frac{u}{4}R\cos(u) + Rr\cos(v)\cos(u) \\ \frac{u}{4}R\sin(u) + Rr\cos(v) \\ r\sin(v) \end{pmatrix}$$



$$\Phi_4(u,v) := \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{u}}\cos(u) + Rr\cos(v)\cos(u) \\ \frac{R}{\sqrt{u}}\sin(u) + Rr\cos(v) \\ r\sin(v) \end{pmatrix}$$



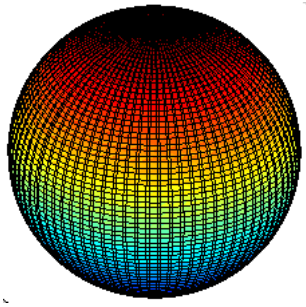
$$\Phi_5(u,v) := \begin{pmatrix} R\cos(u) + Rr\cos(v)\cos(u) \\ R\sin(u) + Rr\cos(v) \\ r\sin(v) + \frac{1}{2}u \end{pmatrix}$$



$$\Phi_6 := \begin{pmatrix} R\sin(u) + Rr\cos(v) \\ r\sin(v) + \frac{1}{2}u \\ R\cos(u) + Rr\cos(v)\cos(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_5(u,v)$$

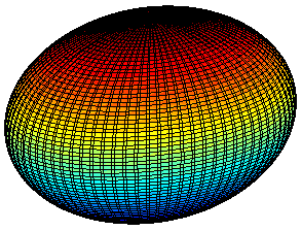
Beispiele (Standardparametrisierungen im $\mathbb{R}^3$)

Kugel mit Radius R



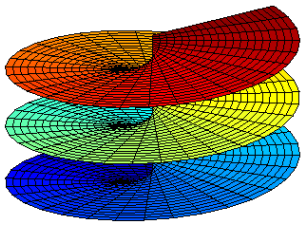
$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} R(\sin(u)\cos(v)) \\ R\sin(u)\sin(v) \\ R\cos(u)) \end{pmatrix}$$

Ellipsoid mit Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}^+$



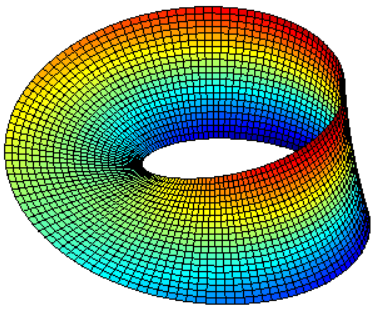
$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} a\sin(u)\cos(v) \\ b\sin(u)\sin(v) \\ c\cos(u) \end{pmatrix}$$

Wendelfläche der Höhe $2\pi h$



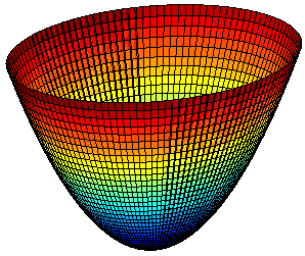
$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ hv \end{pmatrix}$$

Möbiusband



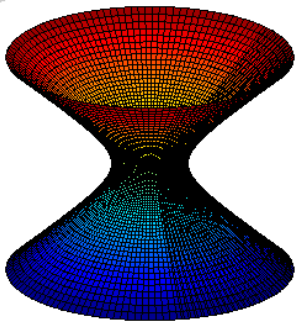
$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) + v\sin(\frac{u}{2})\cos(u) \\ \sin(u) + v\sin(\frac{u}{2})\sin(u) \\ v\cos(\frac{u}{2}) \end{pmatrix}$$

Elliptisches Paraboloid mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}^+$



$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} au\cos(v) \\ bu\sin(v) \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Hyperboloid mit Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}^+$



$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} a\cosh(u)\cos(v) \\ b\cosh(u)\sin(v) \\ c\sinh(u) \end{pmatrix}$$