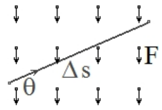
3 Mehrdimensionale Integralrechnung

3.1 Kurvenintegrale und Integration von 1-Formen

Beispiel (Arbeit im Kraftfeld)

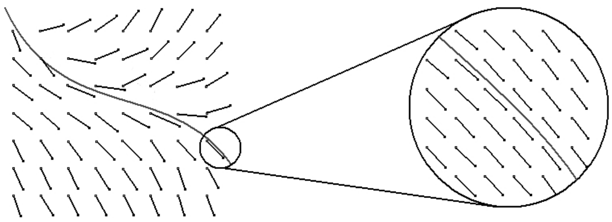
Gegeben seien ein konstantes Kraftfeld der Stärke F und eine Bewegung entlang einer geraden Strecke der Länge Δs in Richtung θ, ($||\theta|| = 1$). Dann beträgt die effektiv wirkende Kraft gerade $F\theta$ (Projektion von F auf θ). Für die vom Kraftfeld verrichtete Arbeit A gilt: $A = F\theta\Delta s$ („Arbeit = Kraft · Weg“).



Verallgemeinerung

Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig (ein sog. *Vektorfeld*) und Γ eine durch $\gamma \in \mathfrak{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ parametrisierte Kurve. Dann gilt approximativ für die Gesamtarbeit:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{F(\gamma(t_i))}_{\text{Kraft}} \underbrace{(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))}_{\text{Wegvektor (Richtung}\cdot\text{Länge)}} \\ &\overset{\text{MWS}}{=} \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(t_i))\gamma'(\theta_i)(t_{i+1} - t_i) \\ &\xrightarrow[\max|t_{i+1}-t_i|\to 0]{n\to\infty} \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$



Da das Vekorfeld stetig ist, ist F in einer kleinen Umgebung jedes Kurvenpunktes ungefähr konstant.

Definition

Die von F erzeugte Abbildung

$$\omega : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x, \cdot) \end{array} \quad \text{mit } \omega(x,h) = \langle F(x), h\rangle$$

nennt man eine *1-Form* und

$$\int_\Gamma \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))\mathrm{d}t$$

das *Integral* von ω entlang der Kurve Γ.

Bemerkung

Das *Kurvenintegral*

$$\int_\Gamma \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\mathrm{d}t$$

wird dann definiert als

$$A := \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))\mathrm{d}t.$$

Wir müssen zeigen, dass A nicht von der Parametrisierung γ abhängt.

Sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ ein monotoner, stetig differenzierbarer Parameterwechsel, o.B.d.A. $\varphi \geq 0$, $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ die umparametrisierte Kurve. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &:= \int_c^d \omega(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t)))\varphi'(t)\mathrm{d}t \\
&\overset{\tau := \varphi(t)}{=} \int_a^b \omega(\gamma(\tau), \gamma'(\tau))\mathrm{d}\tau \\
&= A.
\end{aligned}$$

Im Fall $\varphi' < 0$ erhalten wir $-A$ als Ergebnis; bei physikalischen Größen ignorieren wir Orientierungen aber grundsätzlich.

Physikalischer Hintergrund der Parametrisierungsinvarianz: Energieerhaltung.

Klassifizierung von Kurven

Zwei Parametrisierungen $\gamma \in \mathfrak{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{C}^1([c,d], \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma'(t), \tilde{\gamma}'(\tau) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und alle $\tau \in [c,d]$ heißen *äquivalent* (d.h. $\gamma \sim \tilde{\gamma}$), falls ein orientierungserhaltender Parameterwechsel φ existiert mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

Eine Äquivalenzklasse $\kappa := [\gamma]_\sim$ wird *orientierte, glatte Kurve* genannt.

Wir setzen $\Gamma_\kappa := \{\gamma(t) \mid t \in [a,b],\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in \kappa\}$.

Definition

Seien κ eine orientierte, glatte Kurve mit $\Gamma_\kappa \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \kappa$ und $\omega \in \mathfrak{C}^0(\Gamma_\kappa, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ eine 1-Form.

$$\int_\kappa \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))\mathrm{d}t$$

wird dann das *Kurvenintegral* der 1-Form ω längs der Kurve κ genannt.

Weitere Bezeichnungen

Seien κ eine orientierte, glatte Kurve und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\kappa = [\gamma]_\sim$.

(1) Dann heißen $A_\kappa := \gamma(a)$ der *Anfangspunkt* und $B_\kappa := \gamma(b)$ der *Endpunkt* von κ.

Mit monoton wachsendem Parameterwechsel $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ gilt $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$, d.h. Anfangs- und Endpunkt einer Kurve sind unabhängig von der jeweiligen Parametrisierung.

(2) Der Parameterwechsel $\varphi : \begin{smallmatrix} [0,1] & \to & [a,b] \\ t & \mapsto & b + t(a-b) \end{smallmatrix}$ ist orientierungsumkehrend.

Wir nennen die umgekehrt orientierte Kurve $-\kappa = [\gamma \circ \varphi]_\sim$.

Beachte dabei: $\int_{-\kappa} \omega = -\int_\kappa \omega$ ist orientiert.

(3) Sind $\kappa_1, ..., \kappa_N$ endlich viele glatte Kurven mit $B_{\kappa_i} = A_{\kappa_{i+1}}$, $i = 1, ..., N-1$, so heißt $\kappa := (\kappa_1, ..., \kappa_N)$ eine *stückweise glatte, orientierte Kurve* mit Anfangspunkt $A_\kappa := A_{\kappa_1}$, Endpunkt $B_\kappa := B_{\kappa_N}$ und Bild $\Gamma_\kappa := \Gamma_{\kappa_1} \cup ... \cup \Gamma_{\kappa_N}$.

(4) Eine stückweise glatte, orientierte Kurve κ heißt *geschlossen*, falls $A_\kappa = B_\kappa$.

(5) Sind $\omega \in \mathfrak{C}^0(\Gamma_\kappa, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ eine 1-Form und $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_N)$ eine stückweise glatte, orientierte Kurve, so definieren wir

$$\int_\kappa \omega := \sum_{i=1}^N \int_{\kappa_i} \omega.$$

Satz (Hauptsatz-Variante für Kurvenintegrale)

Seien κ eine stückweise glatte, orientierte Kurve, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_\kappa \subseteq U$, $f \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R})$ und $\omega = f'$, d.h. $\forall x \in \Gamma_\kappa, h \in \mathbb{R}^n : \omega(x,h) = f'(x)h$. Dann gilt:

$$\int_\kappa f' = f(B_\kappa) - f(A_\kappa).$$

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\kappa f' &= \sum_{i=1}^N \int_{\kappa_i} f' \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} f'(\gamma^{(i)}(t)){\gamma'}^{(i)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} (f \circ \gamma^{(i)})'(t)\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \sum_{i=1}^N (f \circ \gamma^{(i)})(b_i) - (f \circ \gamma^{(i)})(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^N f(B_{\kappa_i}) - f(A_{\kappa_i}) \\
&\overset{\text{Teleskopsumme}}{=} f(B_\kappa) - f(A_\kappa).
\end{aligned}$$

Korollar

Ist κ zusätzlich geschlossen, dann gilt:

$$\int_\kappa f' = 0.$$

Ausblick

Bezugnehmend auf die Hauptsatz-Variante für Kurvenintegrale werden wir später untersuchen, unter welchen Voraussetzungen wir zu einer 1-Form ω die Existenz einer $\mathfrak{C}^1$-Funktion f mit $\omega = f'$ folgern können.

1-Formen, welche diese Bedingung erfüllen, nennen wir *exakt*.