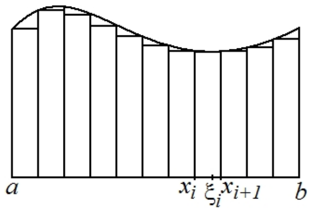
3.2 Das RIEMANN-Integral im Mehrdimensionalen

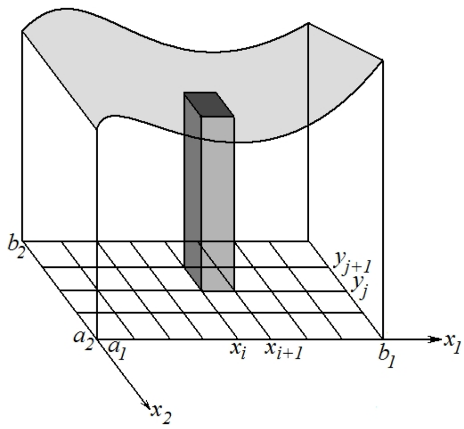
MOTIVATION

(1) Fläche zwischen Graph und x-Achse im 1D:



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Höhe}} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\text{Breite}}.$$

(2) Übertragung auf 2D:



Wir betrachten das Volumen zwischen x_1-x_2-Achse und 2D-Graph. Mit $[a,b] = [(a_1,a_2) \times (b_1,b_2)] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$:

$$\int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{f(\xi_{ij})}_{\text{Höhe}} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}_{\text{Grundfläche}}$$

(3) In 3D analoge Konstruktion ... ohne geometrische Bedeutung.

Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ werden als *Dichten* bezeichnet („Massendichte“, „Ladungsdichte“, ...).

$$\int_{[a,b]} \varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{o} \underbrace{\varphi(\xi_{ijk}) \in R}_{\text{Dichte}} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} - x_j)(x_{k+1} - x_k)}_{\text{Volumen von } R}.$$

Wir erhalten also zu einem (kleinen) Quader $R = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$ und einem $\xi_{ijk} \in R$ die ungefähre Masse von R durch das Produkt $\varphi(\xi_{ijk}) \cdot \operatorname{vol}(R)$ und mit

$$\int_{[a,b]} \varphi(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z)$$

die Gesamtmasse im Quader $[a,b]$.

(4) Typische Anwendung im Höherdimensionalen: *Wahrscheinlichkeitsdichte* einer n-dimensionalen Zufallsvariablen.

$$\int_a^b f(x_1,...,x_n)\mathrm{d}(x_1,...,x_n)$$

liefert dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable ein Ergebnis in $[a,b]$ liefert.

Begriffsbildung

Aus schreibtechnischen Gründen notieren wir nur den Fall $n = 2$; alle Definitionen lassen sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Seien $[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $X = \{x_0, ..., x_N\} \in \mathcal{Z}([a_1, b_1])$ und $Y = \{y_0, ..., y_M\} \in \mathcal{Z}([a_2, b_2])$ Zerlegungen, $Z(X, Y)$ erzeugte Zerlegung von $[a, b]$.

Dann bilden die *Teilrechtecke* $R := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ eine Menge, die wir mit $T(Z)$ bezeichnen.

Das Teilrechteck $R \in T(Z)$ hat dann das *Volumen*

$$\operatorname{vol}(R) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

$\mathcal{Z}([a, b])$ bezeichnet die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$. Wie in 1D definieren wir dann

$$\begin{aligned}
\overline{\sum}(f, Z) &:= \sum_{R \in T(Z)} \sup_{x \in R} f(x) \operatorname{vol}(R) && \textit{(Obersumme)} \\
\underline{\sum}(f, Z) &:= \sum_{R \in T(Z)} \inf_{x \in R} f(x) \operatorname{vol}(R) && \textit{(Untersumme)} \\
\overline{\sum}(f) &:= \inf_{Z \in \mathcal{Z}([a,b])} \overline{\sum}(f, Z) && \textit{(Oberintegral)} \\
\underline{\sum}(f) &:= \sup_{Z \in \mathcal{Z}([a,b])} \underline{\sum}(f, Z) && \textit{(Unterintegral)}
\end{aligned}$$

Definition

Gilt $\overline{\sum}(f) = \underline{\sum}(f)$, dann heißt f RIEMANN-*integrierbar* auf $[a, b]$ und

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x := \underline{\sum}(f) = \overline{\sum}(f)$$

das RIEMANN-*Integral* von f.

Weitere Schreibweisen

$$\int_{[a,b]} f(x, y)\mathrm{d}(x, y), \quad \int_{[a,b]} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \int_{[a,b]} f.$$

Bemerkung

Wie in 1D zeigt man für $f, g : Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(1) $\lambda f + \mu g$ ist integierbar und $\int_Q \lambda f + \mu g = \lambda \int_Q f + \mu \int_Q g$ (Linearität);
(2) $f \leq g \Rightarrow \int_Q f \leq \int_Q g$ (Monotonie);
(3) $|f|$ ist integrierbar und $|\int_Q f| \leq \int_Q |f|$ (Dreiecksungleichung);
(4) Alle stetigen Funktionen auf Q sind integrierbar.

Problem

Wir haben Integrierbarkeit nur auf Quadern definiert. Wir wollen Funktionen nun über allgemeineren Mengen integrieren.

Seien Q ein Quader, $V \subseteq Q$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ stetig. Dann setzen wir

$$g(x) := \mathbb{1}_V(x)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in V \\ 0 & x \notin V \end{cases}$$

Dann ist g auf dem ganzen Quader Q definiert. Allerdings ist g im Allgemeinen nicht stetig.

g ist aber „fast überall" stetig (nur nicht auf ∂V). Genauer:

DEFINITION

Seien $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n,\ f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, $N := \{x \in Q \mid f \text{ unstetig in } X\}$.

Dann heißt f *fast überall stetig* in Q, wenn N *unwesentlich* ist, d.h. falls zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Quader $Q_1, ..., Q_r$ existieren mit $N \subseteq \bigcup Q_i$ und $\sum_{i=1}^r \text{vol}(Q_i) < \epsilon$.

BEMERKUNG (Elementare Eigenschaften unwesentlicher Teilmengen von Q)

(1) A unwesentlich $\Rightarrow \overline{A}$ unwesentlich.

(2) A, B unwesentlich $\Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \backslash B$ unwesentlich.

(3) A unwesentlich, $B \subseteq A \Rightarrow B$ unwesentlich.

BEISPIELE

(1) $\{x\}$ ist unwesentlich.

(2) $\{x \mid \Phi(x) = 0\}$ mit $\Phi \in \mathfrak{C}^1([a, b] \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\text{Rang}(\Phi'(x)) = r$ auf A ($\to$ implizite Funktionen).

(3) $\mathbb{Q}$ ist nicht unwesentlich.

BEMERKUNG (Integration auf allgemeinen Gebieten)

Seien $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n,\ f : Q \to \mathbb{R}$ fast überall stetig und $A \subseteq Q$ mit ∂A unwesentlich.

Dann setzen wir

$$\int_A f := \int_Q \mathbb{1}_A f$$

mit $\mathbb{1}_A(x) := \{\begin{smallmatrix} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{smallmatrix}$.

BEISPIEL

Gegeben sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig mit $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist f über K integrierbar, denn $\partial K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist unwesentlich, also ist $g : \begin{smallmatrix} [-1, 1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{1}_K(x) f(x) \end{smallmatrix}$ fast überall stetig und damit integrierbar mit

$$\int_K f = \int_{[-1,1]^2} \mathbb{1}_K f.$$

BEMERKUNG (Volumen und Schwerpunkt einer Menge)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt mit ∂A unwesentlich. Dann setzen wir

$$\text{vol}(A) := \int_A 1 = \int_Q \mathbb{1}_A \ (A \subseteq Q).$$

Im Fall $\text{vol}(A) \neq 0$ nennen wir den Wert

$$\frac{1}{\text{vol}(A)} \int_A x \text{d}x := \frac{1}{\text{vol}(A)} \left(\int_A x_1 \text{d}x, \int_A x_2 \text{d}x, ..., \int_A x_n \text{d}x \right)$$

den *Schwerpunkt* von A.

3.3 Der Reduktionssatz von Fubini

Satz (Reduktionssatz von Fubini)

Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $Q = S \times T$ mit S Quader in $\mathbb{R}^p$ und T Quader in $\mathbb{R}^{n-p}$, $p \leq n$. Weiter seie4n $f : Q \to \mathbb{R}$ integirerbar und zu jedem $y \in T$ sei $f_y : \begin{smallmatrix} S \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x,y) \end{smallmatrix}$ integrierbar auf S.

Dann ist $F : \begin{smallmatrix} R \to & \mathbb{R} \\ y \mapsto & \int_S f_y \end{smallmatrix}$ integrierbar und es gilt:

$$\int_Q f = \int_T F = \int_T \left(\int_S f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Anwendungen

(1) Akademisches Beispiel: Berechne

$$\int_{[0,1]^2} \sin(x+y) \mathrm{d}(x,y).$$

Das Integral existiert, da $f : (x,y) \mapsto \sin(x+y)$ stetig ist.

Wir zerlegen $[0,1]^2$ in $[0,1] \times [0,1]$. Dann ist $f_y(x) = \sin(x+y)$ stetig auf $[0,1]$, also integrierbar mit

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{[0,1]} f_y \\ &= \int_0^1 \sin(x+y) \mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x+y)]_0^1 \\ &= \cos(y) - \cos(y+1). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das gesuchte Integral:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} \sin(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 F(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (\cos(y) - \cos(y+1)) \mathrm{d}y \\ &= [\sin(y) - \sin(y+1)]_0^1 \\ &= 2\sin(1) - \sin(2). \end{aligned}$$

(2) Volumen der 3-Einheitskugel.

Setze $A := B_1(0)$, dann $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x||_2^2 - 1 = 0\}$ unwesentlich und mit $A \subseteq Q = [-1,1]^3$ folgt

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A 1 = \int_Q \mathbb{1}_A.$$

Zerlege Q in $S \times T = [-1,1] \times [-1,1]^2$, dann

$$\begin{aligned} f_{(x_2,x_3)}(x_1) &:= \mathbb{1}_A(x_1,x_2,x_3) \\ &= \mathbb{1}[0,1](x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= \mathbb{1}_{[0,1-x_2^2-x_3^2]}(x_1^2) \\ &= \begin{cases} \mathbb{1}_{[-\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}, \sqrt{1-x_2^2-x_3^2}]}(x_1) & x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2^2 + x_3^2) \mathbb{1}_{[-\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}, \sqrt{1-x_2^2-x_3^2}]}(x_1). \end{aligned}$$

Dann liefert der Reduktionssatz:

$$\begin{aligned}\Phi(x_2,x_3) &:= \int_{[-1,1]} f_{(x_2,x_3)}(x_1)\mathrm{d}x_1\\ &= \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2^2+x_3^2)\mathbb{1}_{[-\sqrt{1-x_2^2-x_3^2},\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}]}(x_1)\mathrm{d}x_1\\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2^2+x_3^2)\int_{-\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}}^{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} 1\mathrm{d}x_1\\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2^2+x_3^2)2\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}.\end{aligned}$$

Also

$$\mathrm{vol}(A) = \int_T \Phi(x_2,x_3)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

Mit dem Reduktionssatz zerlegen wir T in $[-1,1]\times[-1,1]$, dann

$$\begin{aligned}\Phi_{(x_3)}(x_2) &= 2\mathbb{1}_{[0,1]}(x_2^2+x_3^2)\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\\ &= 2\mathbb{1}_{[-\sqrt{1-x_3^2},\sqrt{1-x_3^2}]}(x_2)\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}.\end{aligned}$$

Substituiere $x_2 := \sqrt{1-x_3^2}\sin(\varphi) \Rightarrow \mathrm{d}x_2 = \sqrt{1-x_3^2}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi,\ \sqrt{1-x_3^2} = \frac{\pi}{2},\ \varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, dann

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\Phi_{(x_3)}(x_2) &= 2\int_{-\sqrt{1-x_3^2}}^{\sqrt{1-x_3^2}} \sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\mathrm{d}x_2\\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(\varphi)}(1-x_3^2)\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= 2(1-x_3^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= 2(1-x_3^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))\mathrm{d}\varphi\\ &= (1-x_3^2)\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= (1-x_3^2)\pi.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das Volumen der 3-Kugel:

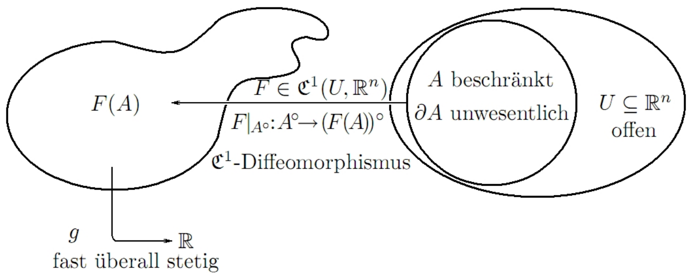
$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(A) &= \int_{-1}^{1} \pi(1-x_3^2)\mathrm{d}x_3\\ &= \pi[x_3-\frac{1}{3}x_3^3]_{-1}^{1}\\ &= \pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

3.4 Der Transformationssatz

Definition

Ein *Homeomorphismus* ist eine stetige Funktion mit stetiger Inversen.

Ein $\mathfrak{C}^1$-*Diffeomorphismus* ist eine stetig differenzierbare Funktion mit stetig differenzierbarer Inversen.



Satz (Transformationssatz)

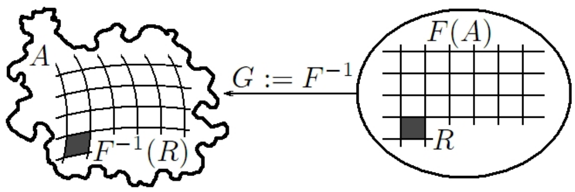
Seien $F|_{A^\circ}$ ein $\mathfrak{C}^1$-Diffeomorphismus und g fast überall stetig.

Dann sind ∂A unwesentlich, $g \circ F$ fast überall stetig auf A und

$$\int_{F(A)} g = \int_A g \circ F |\det F'|.$$

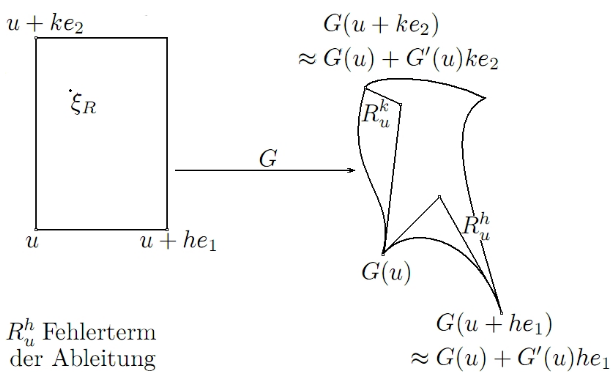
Motivation

Wir untersuchen zunächst den Faktor $|\det F'|$.



Es gilt (mit $\xi_R \in R$):

$$\int_{F(A)} g \approx \sum_{R \in T(F(A))} g(\xi_R) \operatorname{vol}(R) = \sum_{F^{-1}(R) \in F^{-1}(T(F(A)))} g \circ F(F^{-1}(\xi_R)) \frac{\operatorname{vol}(R)}{\operatorname{vol}(F^{-1}(R))} \operatorname{vol}(F^{-1}(R)).$$



Bei sehr kleinem Rechteck R:

$$\operatorname{vol}(G(R)) \approx \operatorname{vol}(G'(u)R) \approx \operatorname{vol}(G'(\xi_R)R),$$

da G' stetig und ξ_R nahe bei u für h, k klein.

Dabei entspricht $G'(\xi_R)R$ einem linear verformten Rechteck *Parallelepiped* mit Kantenvektoren $G'(\xi_R)he_1$

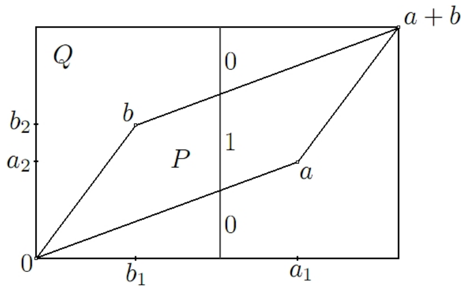
und $G'(\xi_R)ke_2$.

Um das Volumen des Parallelepipeds zu berechnen, verifizieren wir die Formel

$$\mathrm{vol}(\{\lambda_1 a + \lambda_2 b \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]\}) = \left|\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Der Parallelepiped P wird aufgespannt durch die Vektoren $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$, hat also die Eckpunkte $(0,0), (a_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(P) &= \int_P 1 \\
&= \int_Q \mathbb{1}_P \\
&= \int_0^{a_1+b_1} \int_0^{a_2+b_2} \mathbb{1}_P(x,y)\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^{b_1} \int_0^{a_2+b_2} \mathbb{1}_P(x,y)\mathrm{d}(x,y) + \int_{b_1}^{a_1} \int_0^{a_2+b_2} \mathbb{1}_P(x,y)\mathrm{d}(x,y) + \int_{a_1}^{a_1+b_1} \int_0^{a_2+b_2} \mathbb{1}_P(x,y)\mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\text{Geradengleichung}}{=} \int_0^{b_1} \int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{\frac{b_2}{b_1}x} \mathrm{d}(x,y) + \int_{b_1}^{a_1} \int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{b_2+\frac{a_2}{a_1}(x-b_1)} \mathrm{d}(x,y) + \int_{a_1}^{a_1+b_1} \int_{a_2+\frac{b_2}{b_1}(x-a_1)}^{b_2+\frac{a_2}{a_1}(x-b_1)} \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^{b_1} \left(\frac{b_2}{b_1} - \frac{a_2}{a_1}\right) x\mathrm{d}x + \int_{b_1}^{a_1} b_2 + \frac{a_2}{a_1} b_1 \mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_1+b_1} b_2 - a_2 + \frac{b_2}{b_1}a_1 - \frac{a_2}{a_1}b_1 + \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1}x\right)\mathrm{d}x \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
&= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$



Damit erhalten wir für unser deformiertes Flächenstück:

$$\mathrm{vol}(G'(\xi_R)R) = \left|\det \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(\xi_R)h & \partial_2 G_1(\xi_R)k \\ \partial_1 G_2(\xi_R)h & \partial_2 G_2(\xi_R)k \end{pmatrix}\right| = hk|\det \mathfrak{J}_G(\xi_R)| = \mathrm{vol}(R)|\det G'(\xi_R)|.$$

Beweis

Wegen

$$\mathrm{vol}(F^{-1}(R)) \approx \mathrm{vol}(G'(\xi_R)R) = \mathrm{vol}(R)|\det G'(\xi_R)|$$

erhalten wir als relative Volumenänderung:

$$\frac{\mathrm{vol}(R)}{\mathrm{vol}(F^{-1}(R))} \approx \frac{1}{|\det G'(\xi_R)|}.$$

Beachte: Mit $G = F^{-1}$ erhalten wir

$$G'(\xi_R) = (F^{-1})'(\xi_R) = (F'(F^{-1}(\xi_R)))^{-1} \Rightarrow |\det G'(\xi_R)| = \frac{1}{|\det F'(F^{-1}(\xi_R))|}$$

(„Determinate der inversen Matrix ist Kehrwert der Determinante der Matrix.“).

Einsetzen von

$$\frac{\mathrm{vol}(R)}{\mathrm{vol}(F^{-1}(R))} \approx |\det F'(F^{-1}(\xi_R))|$$

ergibt:

$$\int_{F(A)} \approx \sum_{F^{-1}(R)\in F^{-1}(T(F(A)))} (g\circ F|\det F'|)(F^{-1}(\xi_R))\ \mathrm{vol}(F^{-1}(R)).$$

Bei kleinem R ist auch $F^{-1}(R)$ klein, d.h. für $x \in F^{-1}(R)$ gilt:

$$\begin{aligned} &(g\circ F|\det F'|)(x) \approx (g\circ F|\det F'|)(F^{-1}(\xi_R)) \\ \Rightarrow\ &\int_{F^{-1}(R)} g\circ F|\det F'| \approx (g\circ F|\det F'|)(F^{-1}(\xi_R)) \overbrace{\int_{F^{-1}(R)} 1}^{=\mathrm{vol}(F^{-1}(R))} \\ \Rightarrow\ &\int_{F(A)} g \approx \sum_{F^{-1}(R)\in F^{-1}(T(F(A)))} \int_{F^{-1}(R)} g\circ F|\det F'| = \int_A g\circ F|\det F'|. \end{aligned}$$

Bemerkung

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ unbeschränkt und für jede Inklusionskette $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq ...$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i =: C$ mit G_i beschränkt und ∂G_i unwesentlich existiere $\lim\limits_{i\to\infty} \int_{G_i} f$ mit I unabhängig von der gewählten Kette.
Dann setzen wir $\int_G f := I$.

Beispiele

(1) Wir berechnen zunächst mit „klassischen" Mitteln den Flächeninhalt des 2D-Einheitskreises

$$B := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

Substitution: $x=\sin(t),\ \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t,\ \sqrt{1-x^2} = |\cos(t)| = \cos(t),\ a=-\frac{\pi}{2},\ b=\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_B 1 &= 2\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Subst.}}{=} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{Part. Int.}}{=} 2[t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(2\pi + 2\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Berechnung von $\int_B x^2y^2\mathrm{d}(x,y)$ mittels Polarkoordinaten via $F: \begin{smallmatrix} [0,1]\times[0,2\pi] \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\varphi) & \mapsto r(\cos(\varphi),\sin(\varphi)) \end{smallmatrix}$.
Dann $B = F([0,1]\times[0,2\pi]),\ \det F'(r,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)) \end{pmatrix} = r$, also

$$\begin{aligned} \int_B x^2y^2\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\cos^2(\varphi)r^2\sin^2(\varphi)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^5\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 r^5\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$

(2) Berechnung des Schwerpunktes

$$\overline{x} = \frac{1}{\text{vol}(C)} \int_C x\mathrm{d}x$$

des Kugeloktanten

$$C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x||_2^2 \leq 1,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

mittels *Kugelkoordinaten* mit Transformation

$$F: \begin{array}{ccc} [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) & \mapsto & (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \end{array}.$$

Dann gilt für die Jacobi-Determinante:

$$\begin{aligned}
|\det F'| &= \left| \det \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |\sin^3\varphi\sin^2\theta r^2 + r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\sin\varphi + r^2\sin^3\varphi\cos^2\theta| \\
&= r^2|\sin^3\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)| + \sin\varphi\cos^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)| \\
&= r^2|\sin\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)| \\
&= r^2\sin\varphi \text{ für } \varphi \in [0, \pi].
\end{aligned}$$

Für das Volumen des Oktanten erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(C) &= \int_{F(Q)} 1 \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^2 \sin\varphi \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^2\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{F(Q)} x_1\mathrm{d}x &= \int_Q r^3\sin^2\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^3\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{16}; \\
\int_{F(Q)} x_2\mathrm{d}x &= \int_Q r^3\sin^2\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^3\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{16}; \\
\int_{F(Q)} x_3\mathrm{d}x &= \int_Q r^3\cos\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^3\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{16},
\end{aligned}$$

also hat der Schwerpunkt die (kartesischen) Koordinaten

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{16}(1,1,1) = \frac{3}{8}(1,1,1).$$

(3) Berechnung einer *Rotationskörpers*.

Indem wir einen Zylinder (Radius R, Höhe H) als Rotation einer Kreisscheibe um die x_3-Achse auffassen, erhalten wir

$$F: \begin{array}{ccc} [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,H] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,h) & \mapsto & (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) \end{array}$$

als Koordiantentransformation zwischen kartesischen und *Zylinderkoordinaten*.

Als Volumen des Zylinders

$$A := \left\{(r,\varphi,h)\in\mathbb{R}^3 \mid r\in\left[0,\frac{hR}{H}\right], \varphi\in[0,2\pi], h\in H\right\}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(F(A)) &= \int_{F(A)} 1 \\
&= \int_A |\det F'| \\
&= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{hR}{H}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}h \\
&= \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{hR}{H}\right)^2 \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}h \\
&= \int_0^H \pi\left(\frac{hR}{H}\right)\mathrm{d}h \\
&= \frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{1}{3}H^3\right]_0^H \\
&= \frac{1}{3}\pi R^2 H.
\end{aligned}$$

(4) *Wahrscheinlichkeitsdichte*.

Mittels Transformationsformel können wir endlich das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

berechnen:

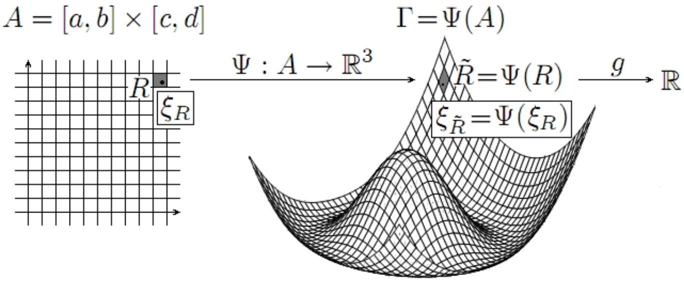
$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \\
&= \pi,
\end{aligned}$$

also $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.}$

3.5 Oberflächenintegrale

Motivation

Um die „Oberfläche“ eines beliebig dimensionalen Objektes zu berechnen, betrachten wir zunächst den uns vertrauten 3D-Fall, in dem wir die 2D-Oberfläche eines Objektes im $\mathbb{R}^3$ bestimmen.



Es gilt:

$$\int_\gamma g \approx \sum_{\tilde{R}\in\Psi(T(A))} \mathrm{vol}_2(\tilde{R}) = \sum_{R\in T(A)} g\circ\Psi(\xi_R)\frac{\mathrm{vol}_2(\tilde{R})}{\mathrm{vol}(R)}\,\mathrm{vol}(R) \approx \int_A g\circ\Psi\frac{\mathrm{vol}_2(\Psi'(\xi_R)R)}{\mathrm{vol}(R)}.$$

Beachte:

$$\frac{\mathrm{vol}_2(\tilde{R})}{\mathrm{vol}(R)} \approx \frac{\mathrm{vol}_2(\Psi'(\xi_R)R)}{\mathrm{vol}(R)},$$

da Rechtecke klein und

$$\Psi(x) \approx \Psi(\xi_R) + \Psi'(\xi_R)(x-\xi_R);$$

mit *Translationsinvarianz* gilt $\Psi(\xi_R) - \Psi'(\xi_R)\xi_R = 0$.

Allgemeiner Fall

Wir in eben berechnen wir die Bilder von kleinen Rechtecken unter glatten Abbildungen über Parallelepipedvolumina.

Dabei bezeichnet

$$P(a_1,...,a_d) := \left\{\sum_{i=1}^d \lambda_i a_i \mid \lambda_1 \in [0,1]\right\}$$

den von den d Vektoren $a_1,...,a_d$ *aufgespannte Parallelepiped*.

Wir nehmen an, dass Volumina invariant unter Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen *(Euklidischen Transformationen)* sind.

Wir führen dann durch Rotation R den Unterraum $\mathrm{span}(a_1,...,a_d)$ in die von den Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n$ erzeugte Ebene $\mathrm{span}(e_1,...,e_d)$ über:

$$Ra_j = (B_{1j},...,B_{dj},0,...,0)$$

und fassen Ra_j als Vektor im $\mathbb{R}^d$ auf; dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_d(P(\underbrace{a_1}_{\in\mathbb{R}^n},...,\underbrace{a_d}_{\in\mathbb{R}^n})) &= \mathrm{vol}(P(\underbrace{B_1}_{\in\mathbb{R}^d},...,\underbrace{B_d}_{\in\mathbb{R}^d})) \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} B_{11} & ... & B_{d1} \\ ... & & ... \\ B_{1d} & ... & B_{dd}\end{pmatrix}\right| \\
&= |\det B| \\
&= \sqrt{\det(B^TB)}.
\end{aligned}$$

Für die einzelnen Komponenten gilt:

$$(B^TB)_{ik} = \sum_{j=1}^d B_{ji}B_{jk} = \sum_{j=1}^d (Ra_i)_j(Ra_k)_j = Ra_iRa_k = a_i(R^TRa_k) = a_ia_k.$$

Wir definieren die *Gramsche Determinante*

$$\boxed{\operatorname{gram}(a_1,...,a_d) := \left| \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 & ... & a_1 \cdot a_d \\ ... & & ... \\ a_d \cdot a_1 & ... & a_d \cdot a_d \end{pmatrix} \right|.}$$

Dann erhalten wir für das Volumen des Parallelepipeds:

$$\operatorname{vol}_d P(a_1,...,a_d) = \sqrt{\operatorname{gram}(a_1,...,a_d)}.$$

Zurück zum 2D-Fall

Betrachten wir nun das von he_1 und ke_2 in ξ_R aufgespannte Rechteck

$$R = \xi_R + P(he_1 + ke_2).$$

Wir erhalten für das Volumen des Bildes $\tilde{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_2(\Psi'(\xi_R)R) &= \operatorname{vol}_2(\Psi'(\xi_R)\xi_R + \Psi'(\xi_R)P(he_1, ke_2)) \\ &\overset{\text{TI}}{=} \operatorname{vol}_2(\Psi'(\xi_R)P(he_1, ke_2)) \\ &= \operatorname{vol}_2(P(\Psi'(\xi_R)he_1, \Psi'(\xi_R)ke_2)) \\ &= \det \begin{pmatrix} h^2\partial_1\Psi \cdot \partial_1\Psi & hk\partial_1\Psi \cdot \partial_2\Psi \\ hk\partial_1\Psi \cdot \partial_2\Psi & k^2\partial_2\Psi \cdot \partial_2\Psi \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{h^2k^2} \det \begin{pmatrix} \partial_1\Psi \cdot \partial_1\Psi & \partial_1\Psi \cdot \partial_2\Psi \\ \partial_1\Psi \cdot \partial_2\Psi & \partial_2\Psi \cdot \partial_2\Psi \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &= \operatorname{vol}(R)\sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R))}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\operatorname{vol}_2(\Psi'(\xi_R)R)}{\operatorname{vol}(R)} = \sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1\Psi(\xi_R), \partial_2\Psi(\xi_R))}.$$

Allgemein definieren wir:

Definition

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\Psi \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $A \subseteq U$ beschränkt mit $\overline{A} \subseteq U$ und ∂A unwesentlich.

Weiter seien $\Psi|_{A\setminus N}$ injektiv und $\Psi'|_{A\setminus N}$ habe Rang d in jedem Punkte aus $A\setminus N$, wobei $N \subseteq A$ unwesentlich.

Zu $g : \Psi(A) \to \mathbb{R}$ mit $g \circ \Psi$ fast überall stetig auf A heißt dann

$$\int_{\Psi(A)} g := \int_A g \circ \Psi \sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1\Psi, ..., \partial_d\Psi)}$$

das *Oberflächenintegral* von g über Ψ.

Bemerkung

Insbesondere gilt $\operatorname{vol}_d(\Psi(A)) = \int_{\Psi(A)} 1$.

Beispiele

(1) Spezialfall $d = 1$ (Kurve).

Wir müssen zeigen, dass mit $A = [a, b]$, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gilt: $\operatorname{vol}(\Psi(A)) = L(\Psi)$ (Kurvenlänge).

$$\operatorname{vol}_1(\Psi(A)) = \int_{\Psi(A)} 1 = \int_A 1\sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1\Psi)} = \int_A \sqrt{\det(\partial_1\Psi \cdot \partial_1\Psi)} = \int_a^b \sqrt{(\Psi'(t))^2}\mathrm{d}t = L(\Psi).$$

(2) Spezialfall $d = 2,\ n = 3$ (Oberfläche).

Wegen $\forall a, b \in \mathbb{R}^3 : |ab| = ||a||_2||b||_2 \cos\sphericalangle(a, b)$ erhalten wir:

$$\operatorname{gram}(a, b) = \det \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = ||a||_2^2||b||_2^2 - |ab|^2 = ||a||_2^2||b||_2^2 \sin^2\sphericalangle(a, b) = ||a \times b||_2^2,$$

also gilt

$$||a \times b||_2^2 = \operatorname{vol}_2 P(a, b)$$

und damit

$$\int_{\Psi(A)} g = \int_A (\Psi(u, v))||\partial_1\Psi(u, v) \times \partial_2\Psi(u, v)||_2 \mathrm{d}(u, v).$$

(3) Berechnung der 3-Kugeloberfläche (Radius R).

Wir rechnen wieder in Kugelkoordinaten via

$$F(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta).$$

Dann gilt mit $A = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ und $\Psi(\vartheta, \varphi) := F(R, \vartheta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \partial_1\Psi(\vartheta, \varphi) &= R(\cos\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta \sin\varphi, -\sin\vartheta), \\ \partial_2\Psi(\vartheta, \varphi) &= R(-\sin\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, 0), \end{aligned}$$

also für die Gramsche Determinante

$$\operatorname{gram}(\partial_1\Psi(\vartheta, \varphi), \partial_2\Psi(\vartheta, \varphi)) = R^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix} = R^4 \sin^2\vartheta$$

und damit für die Kugeloberfläche

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_2(\partial B_R(0)) &= \int_{\Psi(A)} 1 \\ &= \int_A \sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1\Psi(\vartheta, \varphi), \partial_2\Psi(\vartheta, \varphi))} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{R^4 \sin^2\vartheta} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi R^2 [-\cos\vartheta]_0^\pi \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

3.6 Integration über allgemeine Flächen

Definition

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt eine *d-dimensionale $\mathfrak{C}^k$-Fläche* ($k \geq 1$), wenn es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $\Psi : U \to V \cap S$ gibt ($U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen), so dass gilt:

(1) Ψ ist k-mal stetig differenzierbar als Abbildung nach $\mathbb{R}^n$.
(2) $\Psi : U \to V \cap S$ ist ein Homeomorphismus.
(3) $\Psi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv für jedes $x \in U$.

Ψ heißt *Parametrisierung* oder *lokales Koodinatensystem* in einer Umgebung von p.

$V \cap S$ heißt dann eine *Koordinatenumgebung*.

$T_p(S) := \Psi'(\Psi^{-1}(p))\mathbb{R}^d$ heißt der *Tangentialraum* an S in p.

Beachte

Wegen (3) gilt stets $\dim T_p(S) = d$, denn $\Psi'(q)e_1, ..., \Psi'(q)e_d$ sind linear unabhängige Elemente von $T_{\Psi(q)}(S)$ (und bilden damit eine Basis des Tangentialraums).

Bemerkung

Sei $f : S \to \mathbb{R}^k$ stetig mit kompaktem *Träger*

$$\boxed{\operatorname{supp}(f) := \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}.}$$

Dann wird $\operatorname{supp}(f) \subseteq S$ durch endlich viele Koordinatenumgebungen $V_1 \cap S, ..., V_m \cap S$ überdeckt mit zugehörigen lokalen Koordinatensystemen $\Psi^{(i)} : U_i \to V_i \cap S$ und es gibt glatte Funktionen $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V_i$ und $\sum_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in \operatorname{supp}(f)$ (dies ist nicht trivial!).

Wir nennen die φ_i dann *Zerlegung der Eins* auf $\operatorname{supp}(f)$ und definieren

$$\int_S f := \int_S f1 = \int_S f \sum_{i=1}^m \varphi_i = \sum_{i=1}^m \int \varphi_i f.$$

Letzterer Term ist mit den uns bisher bekannten Mitteln berechenbar.

3.7 Der Gausssche Integralsatz

Satz (Integralsatz von Gauss)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\overline{\Omega} \subseteq U$, $\partial\Omega$ $(n-1)$-dimensionale $\mathfrak{C}^1$-Fläche mit stetigem äußeren Normalenfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

(1) $\forall p \in \partial\Omega : ||\nu(p)||_2 = 1$,
(2) $\forall p \in \partial\Omega : \nu(p) \perp T_p(\partial\Omega)$ und
(3) $\forall p \in \partial\Omega : \exists \overline{\epsilon} > 0 : \forall 0 < \epsilon < \overline{\epsilon} : p + \epsilon\nu(p) \notin \Omega$.

Dann gilt

$$\int_\Omega \mathrm{div}(F) = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F.$$

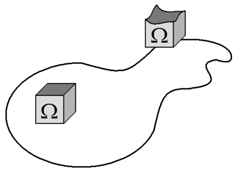
Beweis

Zur Erinnerung: Die Divergenz (oder *Quellstärke*) eines n-dimensionalen Vektorfeldes F haben wir als

$$\mathrm{div}(F) := \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + ... + \partial_n F_n$$

definiert, also als Spur der Jacobi-Matrix $\mathfrak{J}_F$.

Wir unterscheiden zwei Sonderfälle:



Sonderfall 1:

Ω ist ein Quader.

O.B.d.A. sei $n = 2$, $\Omega = (a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{div} F &= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1 \\
&\overset{\mathrm{HS}}{=} \int_{a_2}^{b_2} F_1(b_1, x_2) - F_1(a_1, x_2) \mathrm{d}x_2 + \int_{a_1}^{b_1} F_2(x_1, b_2) - F_2(x_1, a_2) \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{a_2}^{b_2} e_1 \cdot F(b_1, x_2) + \int_{a_2}^{b_2} -e_1 \cdot F(a_1, x_2) \mathrm{d}x_2 + \int_{a_1}^{b_1} e_2 \cdot F(x_1, b_2) + \int_{a_1}^{b_1} -e_2 \cdot F(x_1, a_2) \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F.
\end{aligned}$$

Sonderfall 2:

Ω ist ein deformierter Quader.

Zu $y \in \mathbb{R}^n$ setze $\hat{y} := (y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, dann können wir schreiben

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}],\ \tilde{a}_n < x_n x f(\hat{x})\}$$

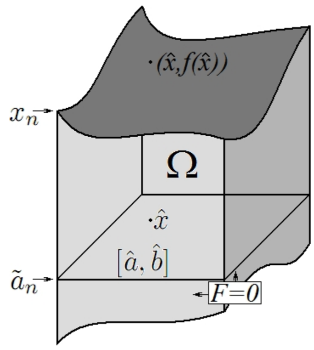
mit glatter Funktion f, so dass $\Psi : q \mapsto (\hat{q}, f(q))$ den deformierten „Deckel" Γ des Quaders parametrisiert. Dabei ist $\tilde{a}_n$ (willkürlich) so gewählt, dass $\mathrm{supp}(F) \subseteq (\hat{a}, \hat{b}) \times (\tilde{a}_n, \infty)$.

Wir setzen $H(y) := (\hat{y}, y_n + f(\hat{y}))$ und $a_n := \tilde{a}_n - \max(f)$, $b_n := 0$, dann

$$\begin{aligned}
H([a, b]) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}],\ \underbrace{a_n + f(\hat{x})}_{<\tilde{a}_n} \leq x_n \leq f(\hat{x})\} \\
&= \overline{\Omega} \cup \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}],\ a_n + f(\hat{x}) < x_n < \tilde{a}_n\}}_{\text{hier ist } \mathrm{div} F = 0}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F) = \int_\Gamma F \cdot \nu.$$



$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}(F) &= \int_{H([a,b])} \operatorname{div}(F) \\
&\overset{\text{Transform.}}{=} \int_{[a,b]} (\operatorname{div}(F) \circ H) \underbrace{|\det H'|}_{=1} \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{[a,b]} \operatorname{div}(F \circ H)(y) - f'(y)\partial_n(\hat{F} \circ H)(y)\mathrm{d}y \\
&\overset{(*)}{=} \underbrace{\int_{[\hat{a},\hat{b}]} F_n(H(\hat{y}, 0))\mathrm{d}\hat{y}}_{\text{nach Sonderfall 1}} - \int_{[\hat{a},\hat{b}]} f'(\hat{y}) \int_{a_n}^0 \frac{\partial}{\partial y_n} F_n(y)\mathrm{d}y_n\mathrm{d}\hat{y} \\
&\overset{\text{HS}}{=} \int_{[\hat{a},\hat{b}]} F_n(\Psi(q)) - f'(q)\hat{F}(\Psi(q))\mathrm{d}q \\
&\overset{\text{Oberfläche}}{=} \int_{[\hat{a},\hat{b}]} (\nu \cdot F)(\Psi(q))\sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1\Psi(q), ..., \partial_{n-1}\Psi(q))}\mathrm{d}q \\
&\overset{(**)}{=} \int_{\underbrace{\Psi([\hat{a},\hat{b}])}_{=\Gamma}} \nu \cdot F \\
&= \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F.
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir benutzt, dass $F \circ H = 0$ auf allen Seiten von $[a, b]$ bis auf $[\hat{a}, \hat{b}] \times \{0\}$.

Zu $(**)$: Wir haben gesetzt:

$$\tilde{\nu}(\Psi(q)) := (-\partial_1 f(q), ..., -\partial_{n-1} f(q), 1),$$

dann $||\tilde{\nu}||_2 = \sqrt{\operatorname{gram}(\partial_1\Psi(q), ..., \partial_{n-1}\Psi(q))}$ und damit $\nu := \frac{\tilde{\nu}}{||\tilde{\nu}||_2}$ normiert.

$\nu \cdot F = \nu_1 F_1 + ... + \nu_n F_n$ wird als die *Normalkomponente* von F bezeichnet.

Allgemeiner Fall.

Wir benutzen die „Zerlegung der Eins“ aus §5.4.

Zu jedem $x \in \overline{\Omega}$ existiert eine Umgebung vom Typ $Q = (a, b) \subseteq U$ mit

(1) $x \in \Omega \Rightarrow Q \subseteq \Omega$;

(2) $x \in \partial\Omega \Rightarrow Q \cap \partial\Omega$ ist eine Koordinatenumgebung mit Parametrisierung

$$\Psi : \pi_i(Q) \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \pi_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{n-1} \\ x & \mapsto & (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \end{array},$$

wobei $\Psi(q) = (q_1, ..., q_{i-1}, f(q), q_i, ..., q_{n-1})$ (wir nennen solche Funktionen *vom Graph-Typ*).

Beachte: $\pi_i(\Psi(q)) = q$.

Dass wir $Q \cap \partial\Omega$ so parametrisieren können, ist nicht trivial!

Da $\overline{\Omega}$ kompakt, gilt weiter $\overline{\Omega} \subseteq (a^{(1)}, b^{((1)}) \cup ... \cup (a^{(m)}, b^{(m)})$.

Wir konstruieren nun eine „Zerlegung der Eins“ $\varphi_i \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq Q_i$, $\sum_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}(F) &= \int_\Omega \operatorname{div}\left(\left(\sum_{i=1}^m \varphi_i\right) F\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi_i F) \qquad (\operatorname{supp}(\varphi_i F) \subseteq Q_i) \\
&= \sum_{i: Q_i \subseteq \Omega} \underbrace{\int_{Q_i} \operatorname{div}(\varphi_i F)}_{=0,\ \text{Sonderfall 1}} + \sum_{i: Q_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \int_{Q_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\varphi_i F) \\
&= \sum_{i: Q_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \underbrace{\int_{Q_i \cap \partial\Omega} (\varphi_i F) \cdot \nu}_{\text{Sonderfall 2}} \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{Q_i \cap \partial\Omega} (\varphi_i F) \cdot \nu \\
&\overset{\text{Flächenintegral}}{=} \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu.
\end{aligned}$$

Bemerkung

Der Gaussche Integralsatz verallgemeinert den 1D-Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung: Mit $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R},\ F := f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $\partial\Omega = \{a, b\},\ \nu(p) = \left\{\begin{smallmatrix} (+1), & p=b \\ (-1), & p=a \end{smallmatrix}\right.$ und $\operatorname{div}(F) = \partial_1 F_1 = f'$, also

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F) \overset{\text{HS}}{=} 1f(b) - 1f(a) = \nu(b) \cdot F(b) - \nu(a) \cdot F(a) = \sum_{p \in \partial\Omega} \nu(p) \cdot F(p) = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F.$$