A Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (partielles Differenzieren)

(1) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := y\sqrt{2x^2 + y^2}$$

auf partielle Differenzierbarkeit und berechnen Sie wo möglich die partiellen Ableitungen.

(2) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:

$$\text{div rot } F = 0.$$

Zur Erinnerung: Die *Divergenz* eines partiell differnenzierbaren Vektorfeldes $\nu : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\text{div } \nu := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i}$$

und die *Rotation* im Fall $n = 3$ ist definiert als

$$\text{rot } \nu := \left(\frac{\partial \nu_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \nu_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \nu_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \nu_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \nu_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \nu_1}{\partial x_2} \right).$$

(3) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \cdot \Delta f.$$

Dabei bezeichnet Δ den Laplace-*Operator*, gegeben durch

$$\Delta h := \text{div grad } h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} \qquad (h : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (Gradient)

(1) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in U$ und $c := f(x)$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla f(x) \perp N_f(c) := \{z \in U \mid f(z) = c\},$$

d.h. dass für jedes stetig differenzierbare $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ ($\epsilon > 0$) mit $\varphi(0) = x$ und $\text{Bild}(\varphi) \subseteq N_f(c)$ gilt:

$$\langle \varphi'(0), \nabla f(x) \rangle = 0.$$

(2) Seien $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ und } x \neq 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} e^x - 1 & (x,y) \in M \\ 0 & (x,y) \notin M \end{cases}.$$

Zeigen Sie: f ist in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ partiall differenzierbar $\Leftrightarrow (x,y) \notin M$.

Für jedes $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $||\nu|| = 1$ existiert die Richtungsableitung $D_\nu f(0)$.

Es gibt ein $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $||\nu|| = 1$ und $D_\nu f(0) \neq \langle \nu, \nabla f(0) \rangle$.

Aufgabe 3 (Satz von Taylor)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{x - y}{x + y},$$

im Punkt $P = (1,1)$ bis einschließlich den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 4 (lokale Extrema)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2).$$

Aufgabe 5 (Koordinatentransformation)

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$T(\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} \cosh(\theta)\cos(\varphi) \\ \sinh(\theta)\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

(1) Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass T lokal umkehrbar ist, und ermitteln Sie alle Punkte $(\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2$, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist.

(2) Zeichen Sie einige φ-Koordinatenlinien für $\theta > 0$.

(3) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Koordinatenlinien von φ und θ.

Aufgabe 6 (implizite Funktionen)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x,y,z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

(1) Zeigen Sie, dass durch $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x,y) = (1,1)$ implizit eine Funktion $z = z(x,y)$ mit $z(1,1) = 1$ definiert ist.

(2) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von z nach x und y im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 7 (implizites Lösen von Gleichungen)

Gegeben sei $\Phi(t,x,u) = e^{x-tu} - u$ $(t,x,u \in \mathbb{R})$. Zu zeigen sind:

(1) $\Phi(t,x,u) = 0$ ist in einer Umgebung von $(0,x,e^x)$ nach u auflösbar.

(2) Die partiellen Ableitungen der Auflösung $U(t,x)$ aus der impliziten Gleichung $\Phi(t,x,U(t,x)) = 0$ lösen die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}U(t,x)^2 = 0 \qquad \text{(Burgers-Gleichung).}$$

Aufgabe 8 (Lagrange-Verfahren)

Bestimmen Sie Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) := x(y-1)$$

auf der Menge

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Aufgabe 9 (Extrema unter Nebenbedingungen)

(1) Die minimale (euklidische) Distanz zwischen dem Punkt $(0,c) \in \mathbb{R}^2$ $(c \in \mathbb{R})$ und der Parabel $\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ soll berechnet werden.

Formulieren Sie die Fragestellung als Minimierungsproblem mit Nebenbedingung.

(2) Zeichnen Sie den Graphen sowie die Niveaulinien der zu minimierenden Funktion.

(3) Lösen Sie das Problem.

(4) Zeigen Sie, dass die Verbindungslinie zwischen dem Punkt $(0,c)$ und dem nächsten Punkt auf der Parabel die Kurve senkrecht durchschneidet.

Aufgabe 10 (Lösen einer partiellen Differenzialgleichung)

Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$h(t,x,y) := \frac{1}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu t}\right) \qquad (\nu > 0)$$

eine Lösung der *Diffusionsgleichung*

$$\partial_t u(t,x,y) = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)u(t,x,y)$$

ist.

Hintergrund: u gibt die Temperaturverteilung einer Platte mit Wärmeleitfähigkeit ν in Abwesenheit von Wärmequellen an.

Aufgabe 11 (Kurvenlänge)

Bestimmen Sie die Länge der durch

$$\gamma : [0, \sinh(1)] \to \mathbb{R},\ \gamma(t) := \left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$$

parametrisierten Kurve.

Hinweis: Zur Berechnung des Integrals substituiere $t := \sinh(u)$ und benutze dann partielle Integration.

Aufgabe 12 (Tetraeder-Volumen)

Seien $a, b, c > 0$. Betrachten Sie die Punkte $(a,0,0)$; $(0,b,0)$ und $(0,0,c)$, welche im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene E definieren.

(1) Definieren Sie die Menge aller Punkte $V \subseteq \mathbb{R}^3$, welche zwischen E und den drei Koordinatenebenen liegen.

(2) Berechnen Sie das Volumen von V.

(3) Berechnen Sie
$$\int_V x^2 y \mathrm{d}(x,y,z).$$

(4) Führen Sie (2) und (3) unter Verwendung der Substitutionsregel durch, d.h. definieren Sie eine Koordiatentransformation $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die den Einheitswürfel des $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf das Tetraeder V abbildet, und benutzen Sie dann die Transformationsformel.

Aufgabe 13 (Schwerpunkt des Kugeloktanten)

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Körpers

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ||(x,y,z)||^2 \leq 1,\ x,y,z \geq 0\}.$$

Hinweis: Der Schwerpunkt einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$S := \frac{1}{\mathrm{vol(A)}} \int_A x \mathrm{d}x := \frac{1}{\int_A 1 \mathrm{d}x} \left(\int_A x_1 \mathrm{d}x, ..., \int_A x_n \mathrm{d}x\right).$$

Aufgabe 14 (Kugeloberfläche)

Berechnen Sie die Oberfläche einer 3D-Kugel mit Radius R.

Hinweis: Rechnen Sie in Kugelkoordinaten und benutzen Sie die Gramsche Formel für Oberflächenintegrale.