1 Topologie metrischer Räume

1.1 Normierte und metrische Räume

Definition 1.1

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto ||x||$ mit

(N1) $\forall x \in V : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ x \in V : ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.
(N3) $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Dreiecksungleichung)*.

Das Paar $(V, ||\cdot||)$ heißt *normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum*.

Bemerkung 1.2

(1) $\forall x \in V : ||x|| \geq 0$, denn $0 = ||x + (-x)|| \leq ||x|| + ||-x|| = ||x|| + |-1|||x|| = 2||x|| \Rightarrow ||x|| \geq 0$.

(2) Es gilt die „umgekehrte Dreiecksungleichung“ $\forall x, y \in V : |\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x - y||$.

Beispiel 1.3 (Normen auf $\mathbb{R}^n$)

Sei $V = \mathbb{R}^n$. Folgende Abbildungen definieren Normen auf V:

(1) $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ *(1-Norm)*.

(2) $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ *(euklidische Norm)*.

(3) $||x||_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ *Maximumsnorm*.

(4) $||x||_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$ *(p-Norm)*. Beachte: $\lim\limits_{p\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

Beispiel 1.4 (Normen auf $\mathcal{C}^0([a, b])$)

Sei $V = \mathcal{C}^0([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Wir können V zu einem normierten Raum machen durch

(1) *Sup-Norm*: $||f||_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$.

(2) *$\mathcal{L}^1$-Norm*: $||f||_1 := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(3) *$\mathcal{L}^2$-Norm*: $||f||_2 := (\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$.

(4) *$\mathcal{L}^p$-Norm*: $||f||_p := (\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$.

Beispiel 1.5

(1) Der Raum ℓ_∞ der beschränkten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ mit $||(x_n)|| := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ist ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(2) Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ definiere $||(x_n)||_p := (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Dann ist $\ell_p := \{(x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid ||(x_n)||_p < \infty\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $||\cdot||_p$ eine Norm auf $\mathcal{L}_p$.

Bemerkung 1.6 (nützliche Ungleichungen)

(1) Seien $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$ (d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), dann $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $||x \cdot y||_1 \leq ||x||_p ||y||_q$ (Hölder).

(2) Sei $p \in (1, \infty)$, dann gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : ||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$ (Minkowski, Δ-Ungleichung für $||\cdot||_p$).

(3) Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $p \leq q$. Dann gilt $\forall x \in \ell_p : ||x||_q \leq ||x||_p$, insbesondere $\ell_p \subseteq \ell_q$ (Jensen).

Definition 1.7

Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto d(x, y)$ mit

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(M2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie)*.
(M3) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Dreiecksungleichung)*.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d.

Bemerkung 1.8

(1) Abstände sind nie negativ: $\forall x, y \in X : 0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geq 0$.

(2) Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann induziert $||\cdot||$ eine Metrik d auf V durch $d(x,y) := ||x-y||$.

(3) Nicht jeder metrische Raum beruht auf einem normierten Vektorraum: Beispielsweise definiert $d(x,y) := \left\{\begin{smallmatrix} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y \end{smallmatrix}\right.$ eine Metrik auf $X = \mathbb{R}$, die von keiner Norm induziert wird.

Metrische Räume sind also eine Verallgemeinerung der normierten Räume.

Beispiele 1.9

(1) Seien X eine nicht leere Menge und $\delta(x,y) := \left\{\begin{smallmatrix} 0, & x=y \\ 1, & x\neq y \end{smallmatrix}\right.$. Dann ist (X, δ) ein metrischer Raum. δ heißt die *diskrete Metrik*.

(2) Durch $d(x,y) := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |x(t) - y(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$ $(x, y \in \mathcal{C}^0([-\pi, \pi]))$ wird auf $\mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ eine Metrik definiert.

(3) $\mathbb{R}^2$ wird meist mit dem *euklidischen Abstand* $d_2(x,y) := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$ für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ ausgestattet.

(4) $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ $(x, y \in \mathbb{R}^2)$ liefert einen weiteren Abstand auf $\mathbb{R}^2$.

(5) $\mathbb{R}^n$ lässt sich allgemein mit der *Maximumsmetrik* $d_\infty(x,y) := \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k - yk|$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ versehen.

(6) Auch auf $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ existiert eine Maximumsmetrik: $d_\infty(x,y) := \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$ $x, y \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

Definition 1.10

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $a \in X$, $\epsilon > 0$ heißt $B_\epsilon(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < \epsilon\}$ *offene Kugel* mit *Mittelpunkt* a und *Radius* ϵ bzgl. der Metrik d.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* des Punktes $x \in X$, falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$.

Bemerkung 1.11

Insbesondere ist $B_\epsilon(x)$ selbst eine Umgebung von x (die *ϵ-Umgebung* von x).

Satz 1.12 (Hausdorffsches Trennungsaxiom)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis

Sei $\delta := d(x,y)$. Setze $\epsilon := \frac{\delta}{2}$ und dazu $U := B_\epsilon(x)$; $V := B_\epsilon(y)$. Angenommen, $U \cap V \neq \emptyset$, d.h. es gibt $z \in U \cap V$. Dann gilt $\epsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \epsilon$, ein Widerspruch. ■

1.2 Topologie metrischer Räume

Definition 1.13

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt *offen*, wenn $\forall x \in U : \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subseteq U$, d.h. falls U Umgebung all seiner Punkte ist.

Bemerkung 1.14

(1) X und $\emptyset$ sind offen, denn $\forall x \in X : B_1(x) \subseteq X$ und $\forall x \in \emptyset : B_1(x) \subseteq \emptyset$.

(2) Sind $U, V \subseteq X$ offen, dann auch $U \cap V$, d.h. endliche Schnitte offener Mengen sind offen. Sei dazu $x \in U \cap V$; da U und V offen, gibt es $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U$ und $B_{\epsilon_2}(x) \subseteq V$. Setze $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dann gilt $B_\epsilon(x) \subseteq U \cap V$, denn für alle $y \in B_\epsilon(x)$ ist $d(y, x) < \epsilon \leq \epsilon_1$, d.h. $y \in B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U$ und $d(y, x) < \epsilon \leq \epsilon_2$, d.h. $y \in B_{\epsilon_2}(x) \subseteq V$, also $y \in U \cap V$.

(3) Seien I eine nicht-leere Indexmange und dazu U_i offen für alle $i \in I$. Dann ist auch $\bigcup U_i$ offen, d.h. beliebige Vereinigung offener Mengen sind offen: Sei $x \in \bigcup U_i \Rightarrow x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$; da U_{i_0} offen, gibt es $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup U_i$, also $\bigcup U_i$ offen.

Definition 1.15

Seien X eine Menge, $\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}$ die *Potenzmenge* von X. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Topologie* auf X oder *System offener Mengen* und $(X, \mathcal{O})$ heißt ein *topologischer Raum*, falls

(O1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$;
(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ und
(O3) $(O_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup O_i \in \mathcal{O}$.

Beispiele 1.16

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist $\mathcal{O}_d := \{O \subseteq X \mid O \text{ offen}\}$ eine Topologie auf X.

Topologische Räume verallgemeinern also metrische Räume in dem Sinne, dass jeder metrische Raum vermöge $\mathcal{O}_d$ als topologischer Raum aufgefasst werden kann. Wir können aber auch topologische Räume konstruieren, die nicht von einer Metrik induziert werden.

(2) Sei X eine Menge, dann sind $\{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{P}(X)$ Topologien auf X. $\{\emptyset, X\}$ heißt die *chaotische Topologie*; $\mathcal{P}(X)$ die *diskrete Topologie*. Letztere wird von der diskreten Metrik induziert.

Offenbar gilt für jede Topologie $\mathcal{O}$ auf X, dass $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(3) $\mathcal{O}_{\text{kof.}} := \{O \subseteq X \mid X = \emptyset \text{ oder } X \backslash O \text{ ist endlich}\}$ heißt die *Kofinaltopologie* auf X. Ist X endlich, dann ist dies die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$.

(4) Sind $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume, dann ist $\mathcal{O}_{\text{Prod.}} := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \mathcal{O}_1, O_2 \in \mathcal{O}_2\}$ eine Topologie auf dem Produkt $X_1 \times X_2 := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$. $\mathcal{O}_{\text{Prod.}}$ heißt die *Produkttopologie* auf $X_1 \times X_2$.

(5) Seien d_1 die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$ und d_2 die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Dann stimmt die Produkttopologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{d_1})$ mit sich selbst mit der Topologie des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{d_2})$ überein.

Definition 1.17

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \backslash A$ offen ist.

Bemerkung 1.18

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann sind die offenen Kugeln $B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ offen (im Sinne von $\mathcal{O}_d$) und die abgeschlossenen Kugeln $K_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$ abgeschlossen.

(2) In topologischen Räumen kann es Mengen geben, die weder offen noch abgeschlossen sind. Beispielsweise sind die halboffenen Intervalle $[a, b)$ weder offen noch abgeschlossen in der euklidischen Topologie von $\mathbb{R}$ Dagegen sind $[a, b]$ stets abgeschlossen und (a, b) offen.

(3) $X, \emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen in jeder Topologie auf X.

Satz 1.19

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann sind endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Beweis

(1) Seien I eine Indexmenge, $(A_i)_{i \in I} \subseteq X$ abgeschlossen, d.h. A_i^c ist offen für alle $i \in I$. Dann ist auch $(\bigcap A_i)^c = \bigcup (A_i^c) \in \mathcal{O}$, d.h. $\bigcap A_i$ abgeschlossen.

(2) Seien $A_1, ..., A_n \subseteq X$ abgeschlossen, d.h. $A_1^c, ..., A_n^c$ offen. Dann ist auch $A_1^c \cap ... \cap A_n^c$ offen, d.h. $A_1 \cup ... \cup A_n = ((A_1^c) \cap ... \cap A_n^c)^c$ abgeschlossen. ■

Definition 1.20

Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. $U \subseteq X$ heißt eine *Umgebung* von x, falls es ein $O \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in O \subseteq U$.

Bemerkung 1.21

Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann sind die Umgebungen von $(X, \mathcal{O}_d)$ gerade die in Def. 2.10 charakterisierten.

Definition 1.22

Ein topologischer Raum heißt *Hausdorffraum*, falls er das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt.

Beispiele 1.23

(1) Metrische Räume sind Hausdorffräume.

(2) $(X, \mathcal{O}_{\text{kof.}})$ ist für unendliches X kein Hausdorffraum.

Definition 1.24

Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von Y, falls Y eine Umgebung von x ist. Die Menge Y° der inneren Punkte von Y heißt *Inneres* von Y.

$x \in X$ heißt ein *Berührpunkt* von Y, falls $U \cap Y \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x. Die Menge $\overline{Y}$ der Berührpunkte von Y heißt der *Abschluss* von Y.

Ein $x \in \overline{Y} \backslash Y^\circ$ heißt *Randpunkt* von Y. Die Menge ∂Y der Randpunkte von Y heißt der *Rand* von Y.

Bemerkung 1.25

(1) Es gilt stets $Y^\circ \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$. Y° ist die größe offene Teilmenge von Y; $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge. ∂Y ist abgeschlossen und es gilt $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$.

(2) In der euklidischen Topologie von $\mathbb{R}$ gilt $\partial(a, b) = \partial(a, b] = \partial[a, b) = \partial[a, b] = \{a, b\}$. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(3) Für $U, V \subseteq X$ gelten stets $(U \cap V)^\circ = U^\circ \cap V^\circ$ und $(U \cup V)^\circ \supseteq U^\circ \cup V^\circ$; dagegen $\overline{U \cap V} \subseteq \overline{U} \cap \overline{V}$ und $\overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V}$.

(4) In metrischen Räumen (X, d) muss nicht gelten $K_\epsilon(x) = \overline{B_\epsilon(x)}$ $(x \in X,\ \epsilon > 0)$.

Setze $S_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) = \epsilon\}$, dann $\partial B_\epsilon(x) \subseteq S_\epsilon(x)$ („$\subsetneq$“ ist möglich).

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, dann gelten $K_\epsilon(x) = \overline{B_\epsilon(x)}$ und $\partial B_\epsilon(x) = \partial K_\epsilon(x) = S_\epsilon(x)$ $(x \in X,\ \epsilon > 0)$.

1.3 Konvergenz in metrischen Räumen

Definition 1.26

Sei (X, d) ein metrischer Raum. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* gegen den Punkt $x \in X$, wenn

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon.$$

x ist dann eindeutig bestimmt. Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und nennen x den *Grenzwert* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 1.27

Genau dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass U alle Folgenglieder x_n mit $n \geq N$ enthält. Dies motiviert einen Konvergenzbegriff für allgemeine topologische Räume:

Definition 1.28

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konergiert* gegen ein $x \in X$, falls für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\forall n \geq N : x_n \in U$.

Bemerkung 1.29

(1) In topologischen Räumen können Folgen gegen mehrere Punkte konvergieren. In der chaotischen Topologie $(X, \{\emptyset, X\})$ konvergiert etwa jede Folge gegen jeden Punkt, da X einzige Umgebung ist.

(2) Sei (X, d) wieder ein metrischer Raum. Dann lässt sich die Abgeschlossenheit wie folgt charakterisieren:

$$A \subseteq X \text{ ist abgeschlossen } \Leftrightarrow \text{ für alle Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} x_n \in A.$$

Definition 1.30

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ heißt eine *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

(X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ in X konvergiert.

Einen vollständigen normierten Vektorraum nennen wir auch *Banachraum*.

Bemerkung 1.31

Konvergente Folgen sind stets Cauchy-Folgen ($\frac{\epsilon}{2}$-Argument). Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Definition 1.32

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ nicht leer. $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ heißt der *Durchmesser* von A und wir nennen A *beschränkt*, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Bemerkung 1.33

(1) Genau dann ist $A \subseteq X$ beschränkt, wenn A in einer Kugel liegt, d.h. wenn $a \in X$ und $r > 0$ existieren mit $A \subseteq B_r(a)$.

(2) Schachtelungsprinzip: Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ nicht-leere, abgeschlossene Teilmengen von X mit $\operatorname{diam}(A_k) \to 0$ für $k \to \infty$.

Dann gibt es genau einen Punkt $x \in X$, der in $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (d.h. in allen A_k) liegt.

(3) Genau dann konvergiert eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ die Folge $(x_m^{(i)})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ gegen die i-te Komponente von x konvergiert.

Insbesondere ist $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$ vollständig (da $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es ist).

1.4 Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 1.34
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$.
f heißt *stetig in x*, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ gilt: $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.
Ist f stetig in jedem Punkt $x \in X$, so nennen wir f *stetig auf X*.

Bemerkung 1.35

(1) Sind X, Y, Z stetige Räume und $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.
Sind f stetig in $x \in X$ und g stetig in $f(x) \in Y$, dann ist $g \circ f$ stetig in x.

(2) ϵ-δ-Charakterisierung: Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ und $x \in X$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } x \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in B_\delta(x) : f(y) \in B_\epsilon(f(x)).$$

(3) topologische Charakterisierungen: Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ und $x \in X$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } x \quad &\Leftrightarrow \quad \text{zu jeder Umgebung } V \text{ von } f(x) \text{ gibt es eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } f(U) \subseteq V. \\ f \text{ stetig in } X \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für jedes in } Y \text{ offene } V \subseteq Y \text{ ist } f^{-1}(V) \subseteq X \text{ offen in } X. \end{aligned}$$

Definition 1.36
Seien X, Y metrische Räume. Dann heißt $f : X \to Y$ *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ existiert mit

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq L d(x, y).$$

Bemerkung 1.37

(1) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den normierten Räumen $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig} \ \Leftrightarrow\ f \text{ ist Lipschitz-stetig} \ \Leftrightarrow\ \exists C > 0 : \forall v \in V : ||f(v)||_W \leq c||v||_V.$$

(2) Ist $f : V \to W$ linear und stetig, dann setzen wir $||f|| := \sup\{||f(v)||_W \mid ||v|| \leq 1\}$. Dann ist $||f||$ das kleinstmögliche C mit $\forall v \in V : ||f(v)||_W \leq C||v||$.
$||\cdot||$ definiert dann eine Norm auf dem Vektorraum der linearen, stetigen Abbildungen zwischen V, W.

(3) Da Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ äquivalent zu Konvergenz in allen Komponenten ist, gilt für ein $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f_1, ..., f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ ist stetig}.$$

1.5 Kompaktheit in metrischen Räumen

Definition 1.38

Seien X ein metrischer Raum, $M \subseteq X$ und $U = (U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X.

U heißt eine *offene Überdeckug* von M, falls $M \subseteq \bigcup\{U_i \mid i \in I\}$ und alle U_i offen sind.

U enthält eine *endliche Teilüberdeckung*, falls es ein endliches $J \subseteq I$ gibt mit $M \subseteq \bigcup\{U_j \mid j \in J\}$.

M heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Bemerkung 1.39

(1) Seien X ein metrischer Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.

(2) Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist auch $f(K) \subseteq Y$ kompakt: Stetige Funktionen erhalten den Zusammenhang.

(3) Insbesondere gilt: Ist $Y = \mathbb{R}$, dann nimmt f auf K sein Maximum und Minimum an.

(4) Seien X, Y metrische Räume, X kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

(5) Trivialerweise ist bei einer konvergenten Folge auch jede Teilfolge konvergent. Um andererseits aus einer nicht konvergenten Folge eine konvergente Teilfolge zu konstruieren, gibt es den ...

Satz 1.40 (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Seien X ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K.

Dann besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen einen Punkt in K konvergiert.

Bemerkung 1.41

Zu (1) gilt im Allgemeinen nicht die Umkehrung. Speziell für $X = \mathbb{R}^n$ gilt allerdings der ...

Satz 1.42 (Heine-Borel)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt: K ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Folgerung 1.43

(1) Alle Normen im $\mathbb{R}^n$ sind *äquivalent* zu $||\cdot||_\infty$: Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann gibt es $C, c > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $c||x||_\infty \le ||x|| \le C||x||_\infty$.

(2) Sei X ein Vektorraum. Dann definiert in der Tat

$$||\cdot|| \sim ||\cdot||' :\Leftrightarrow \exists C, C > 0 : \forall x \in X : c||x|| \le ||x||' \le C||x||$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf X.

(3) Konsequenz: Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit u.s.w. sind im $\mathbb{R}^n$ unabhängig von der gewählten Norm.

1.6 Zusammenhang in metrischen Räumen

Bemerkung 1.44

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $x, y \in I$. Dann besagt der Zwischenwertsatz, dass zu jedem c zwischen $f(x), f(y)$ ein z zwischen x, y existiert mit $f(z) = c$.

Wir wollen diesen Satz auf metrische Räume verallgemeinern. Problem dabei: Es ist nicht klar, was „zwischen“ im Allgemeinen heißen soll.

Definition 1.45

Ein metrischer Raum X heißt *unzusammenhängend*, wenn es offene, disjunkte, nicht-leere Mengen $A, B \subseteq X$ gibt mit $X = A \cup B$.

X heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht unzusammenhängend ist.

Bemerkung 1.46

Genau dann ist X zusammenhängend, wenn nur $\emptyset$ und X zugleich offen und abgeschlossen sind.

Satz 1.47 (Zwischenwertsatz)

Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig und X zusammenhängend.

Dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend: Stetige Abbildungen erhalten den Zusammenhang.

Bemerkung 1.48

Zusammenhang mit dem Mittelwertsatz für $\mathbb{R}$: Genau dann ist $M \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, wenn M ein Intervall ist.

Also: Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(I)$ ein Intervall.

Bemerkung 1.49

(1) Seien X ein metrischer Raum, A, B Teilmengen von X mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ und A zusammenhängend. Dann ist auch B zusammenhängend.

Insbesondere ist mit $A \subseteq X$ stets auch der Abschluss von A zusammenhängend.

(2) Seien X ein metrischer Raum und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X.

Besitzt $(A_i)_{i \in I}$ einen gemeinsamen Punkt, d.h. ist $\bigcap\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$, dann ist auch $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ zusammenhängend.

Jeder Punkt von X ist also in einer maximalen zusammenhängenden Teilmenge von X enthalten, nämlich in

$$M := \bigcup\{A \subseteq X \mid A \text{ ist zusammenhängend und } x \in A\}.$$