4 Ergänzungen

4.1 Der Satz über lokale Umkehrbarkeit: Kugelkoordinaten

Motivation

Statt einen Punkt P im $\mathbb{R}^2$ durch seine kartesischen Koordinaten (x, y) anzugeben, kann man ihn auch durch seinen Abstand r zum Ursprung und dem Winkel φ zwischen der Strecke $\overline{PO}$ und der (positiven) x-Achse: den *Polarkoordinaten* von P.

Der Wechel von Polar- in kartesische Koordinaten wird beschrieben durch die Transformation

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Bemerkung

(1) Φ ist stetig differenzierbar, surjektiv und lokal umkehrbar auf $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$.

(2) Schränkt man Φ ein auf $I := (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, dann ist $\Phi|_I$ eine Bijektion zwischen I und $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

(3) Die Umkehrung $\Phi|_I^{-1} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to I$ ist gegegeben durch

$$\Phi|_I^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan_{[0,2\pi)}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}.$$

Anwendung

Der Einheitskreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||x, y|| = 1\}$ lässt sich darstellen als Bild der Abbildung

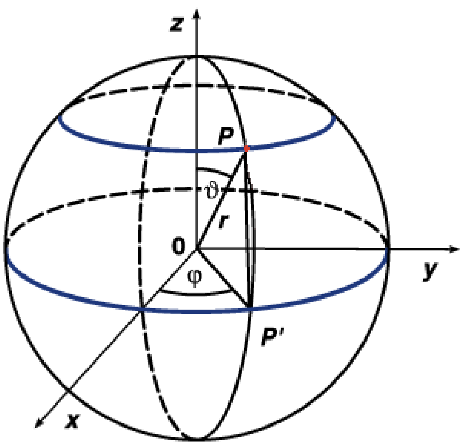
$$\Psi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \Psi(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

oder als Vereinigung der Graphen $\{(x, \Gamma_\pm(x)) \mid x \in [-1, 1]\}$ der Abbildungen

$$\Gamma_\pm : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma_\pm(x) := \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ und alle $x \in [-1, 1]$ gilt nämlich

$$||\Psi(\varphi)|| = \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1 = \sqrt{x^2 + (\pm\sqrt{1 - x^2})} = ||(x, \Gamma_\pm(x))||.$$



Entsprechend suchen wir jetzt eine stetig differenzierbare, surjektive, lokal invertierbare Abbildung Φ, die jeden Punkt P in kartesischen Koordinaten (x, y, z) durch zwei Winkel φ, θ und den Abstand $r = \overline{PO}$ von P zum Ursprung beschreibt.

Genauer: Wir suchen Abbildungen $\Phi_i : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi_i(r, \varphi, \theta) = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so dass

$$\Phi := \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

obige Eigenschaften hat.

Am einfachsten kommen wir an die z-Koordinate bzw. an Φ_3:

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\theta =: \Phi_3(r, \varphi, \theta).$$

Für die anderen beiden Koordinaten berechne zunächst $d := |\overline{P'O}|$: Es gilt

$$\sin\theta = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r\sin\theta.$$

Damit

$$\begin{aligned}\sin\varphi = \frac{y}{d} \quad &\Rightarrow \quad y = d\sin\varphi = r\sin\varphi\sin\theta;\\ \cos\varphi = \frac{x}{y} \quad &\Rightarrow \quad x = d\cos\varphi = r\cos\varphi\sin\theta.\end{aligned}$$

Insgesamt wird der Koordinatenwechsel von den *Kugelkoordinaten* (r,φ,θ) in die kartesischen Koordinaten (x,y,z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ vermittelt durch die Transformation

$$\Phi : [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist Φ surjektiv und stetig differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned}\det \mathfrak{J}_\Phi(r,\varphi,\theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}\\ &= r^2\sin\theta\end{aligned}$$

ist Φ lokal umkehrbar für auf $(0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi)$.

Wir suchen noch die Umkehrabbildung $\Psi : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to (0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi)$. Es gilt

$$\begin{aligned} r &= r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2};\\ z = r\cos\theta \Rightarrow \theta &= \theta(x,y,z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} x = r\cos\varphi\sin\theta \quad &\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta};\\ x = r\sin\varphi\sin\theta \quad &\Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{y}{r\sin\theta}\end{aligned}$$

und damit $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, d.h.

$$\varphi = \varphi(x,y,z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & y > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & y < 0 \\ 0 & y = 0,\ x > 0 \\ \pi & y = 0,\ x < 0 \end{cases}.$$

Die gesuchte Umkehrfunktion ist dann gegeben durch

$$\Psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} r(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z) \\ \theta(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Anwendung

Die Einheitskugel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ||(x,y,z)|| = 1\}$ lässt sich parametrisieren durch

$$\Phi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$