4.2 Der Satz über parameterabhängige Integrale: Ein Beispiel

Behauptung 4.2

Das uneigentliche Riemann-Integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$
existiert und hat den Wert
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis

Nach dem **Satz über parameterabhängige Integrale** gilt
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\ \mathrm{d}x &\overset{(1)}{=} \int_0^\infty \lim_{t\to 0}\frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\ \mathrm{d}x\\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$
und weiter
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\ \mathrm{d}x &\overset{(2)}{=} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\ \mathrm{d}x\\ &= -\int_0^\infty \sin(x)e^{-xt}\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Mit **partieller Integration** berechnen wir
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(x)e^{-xt}\ \mathrm{d}x &= -\cos(x)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \cos(x)e^{-xt}t\ \mathrm{d}x\\ &= -1-\underbrace{\sin(x)e^{-xt}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \sin(x)e^{-xt}t^2\ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$
damit
$$\int_0^\infty \sin(x)e^{-xt}\ \mathrm{d}x = -1+t^2\int_0^\infty \sin(x)e^{-xt}\ \mathrm{d}x,$$
d.h.
$$\int_0^\infty \sin(x)e^{-xt}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}.$$
Also insgesamt
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{1+t^2},$$
d.h.
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\ \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1+t^2} = -\arctan(t)+c.$$
Für $t\to\infty$ gilt dann:
$$0 = \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \sin(x)e^{-xt}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} -\arctan(t)+c = -\frac{\pi}{2}+c \qquad\Longrightarrow\qquad c=\frac{\pi}{2}.$$
Mit $t\to 0$ folgt:
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\ \mathrm{d}x = -\arctan(0)+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$
■