4.3 Der Satz von Stone-Weierstraß

Satz 4.2 (Dini)

Sei $X \neq \emptyset$ ein quasikompakter topologischer Raum. Wir versehen den Raum $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf X mit der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$.

Seien $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}^{\mathbb{N}}(X, \mathbb{R})$ derart, dass $\forall x \in X : (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist mit $g_n(x) \to f(x)$ in $\mathbb{R}$.

Dann konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ gegen f.

Beweis

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - g_{n(x)}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Da $f, f_{n(x)}$ stetig, gibt es in X offene Umgebungen $U^1(x), U^2(x)$ von x mit $\forall y \in U^1(x) : |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ und $\forall y \in U^2(x) : |g_{n(x)}(x) - g_{n(x)}(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Setze $U(x) := U^1(x) \cap U^2(x)$ (offen), dann gilt für alle $y \in U(x)$:

$$|f(y) - g_{n(x)}(y)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - g_{n(x)}(x)| + |g_{n(x)}(x) - g_{n(x)}(y)| < \epsilon$$

und da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, gilt $\forall y \in U(x),\ n > n(x) : |f(y) - f_n(y)| < \epsilon$. Offensichtlich überdeckt $\{U(x) \mid x \in X\}$ den Raum X. Da X quasikompakt, gibt es endlich viele $x_1, ..., x_m$ mit $\bigcup_{i=1}^m U(x_i) = X$. Bezeichne N das Maximum aus $\{n(x_1), ..., n(x_m)\}$.

Sei nun $x \in X$ beliebig. Dann gibt es ein $i \in \{1, ..., m\}$ mit $x \in U(x_i)$ und für alle $y \in U(x_i)$ und alle $n \geq N$ gilt: $|f(y) - g_n(y)| \leq |f(y) - g_{n(x_i)}(y)| < \epsilon$, d.h. g_n konvergiert gleichmäßig gegen f. ∎

Satz (Stone-Weierstraß)

Seien $X \neq \emptyset$ ein kompakter topologischer Raum und die $\mathbb{R}$-Algebra $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf X mit der Maximumsnorm versehen.

Sei A eine *punktetrennende* $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$, d.h. zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es stets ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Dann liegt A *dicht* in $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$, d.h. der Abschluss $\overline{A}$ von A ist $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.

Beweis

Der Abschluss von A ist eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$. Œ sei also A eine abgeschlossene $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.

Seien $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ mit $0 \leq f \leq 1$ auf X und $g_0 \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ mit $0 \leq g_0 \leq \sqrt{f}$. Dann konvergiert die durch $g_{n+1} := g_n + \frac{1}{2}(f - g_n^2)$ rekursiv gegebene Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{f}$ in $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$:

(1) $\sqrt{f} \geq g_n$, denn nach Vor. $\sqrt{f} \geq g_0$. Gelte also $\sqrt{f} \geq g_n$, dann

$$\begin{aligned} \sqrt{f} \geq g_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{f} \geq g_n + \tfrac{1}{2}(f - g_n^2) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{f} - g_n \geq \tfrac{1}{2}(\sqrt{f} - g_n)(\sqrt{f} + g_n) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geq \tfrac{1}{2}(\sqrt{f} + g_n) \\ &\Leftarrow \quad 1 \geq \sqrt{f}. \end{aligned}$$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : g_n \geq 0$, denn $g_0 \geq 0$ nach Voraussetzung. Sei also $g_n > 0$, dann auch

$$g_{n+1} = g_n + \tfrac{1}{2}(f - g_n^2) \geq g_n + \tfrac{1}{2}(f - (\sqrt{f})^2) = g_n \geq 0.$$

(3) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, denn $g_1 = g_0 + \frac{1}{2}(f - g_0^2) \geq g_0$. Gelte also $g_n > ... > g_1 > g_0$. Dann

$$\begin{aligned} g_{n+1} \geq g_n \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{f} - g_{n+1} \leq \sqrt{f} - g_n \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{f} - (g_n + \tfrac{1}{2}(f - g_n^2)) \leq \sqrt{f} - g_n \\ &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{f} - g_n)(1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{f} + g_n)) \leq \sqrt{f} - g_n \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{f} + g_n) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(\sqrt{f} + g_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Also insgesamt $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \sqrt{f} \leq 1$.

Weiter konvergiert $g_n(x)$ gegen $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$ für alle $x \in X$, denn sei $x \in X$. Da $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch $\sqrt{f(x)}$ nach oben beschränkt, konvergiert $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $g(x)$ der Grenzwert, dann $g(x) = g(x) + \frac{1}{2}(f - g^2(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{2}g^2(x) = \frac{1}{2}f(x) \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{f(x)}$. Damit sind die Voraussetzungen des **Satzes von Dini** erfüllt, d.h. $g_n \to \sqrt{f}$ in $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$.

Mit f liegt stets auch f in A. Wir zeigen dazu, dass $|f$ der gleichmäßige Grenzwert einer Funktionenfolge in A ist. Da f stetig im kompakten Raum, nimmt $|f|$ auf X ihr Maximum $M = ||f||$ an, Œ $M \neq 0$. Wir setzen $g := \frac{|f|}{M}$, dann $0 \leq g^2(x) \leq 1$ für alle $x \in X$ und nach eben Gezeigtem lässt sich damit $|g| = \sqrt{g^2}$ gleichmäßig durch Elemente aus A approximieren, wenn wir setzen $g_0 \equiv 0$ und rekursiv $g_{n+1} := g_n + \frac{1}{2}(g^2 - g_n^2)$. Wir benutzen dabei natürlich, dass für beliebiges $p \in \mathbb{R}[X],\ h \in A$ stets gilt $p(h) \in A$.

Damit folgt sofort, dass mit $f \in A$ auch die beiden (stetigen) Abbildungen max und min, gegeben durch $\max\{f,g\} : X \to A,\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ und $\min\{f,g\} : X \to A,\ x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ in A liegen, denn $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$ und $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$.

Zu gegebenen $x, y \in X,\ x \neq y$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es stets ein $f \in A$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$. Wähle dazu (unter Ausnutzung der Punkttrennung) ein $g \in A$ mit $g(x) \neq g(y)$ und setze

$$f(z) := a + (b-a)\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}.$$

Wir wenden dies nun an: Sei $x \in X$ beliebig. Dann gibt es ein $f_x \in \mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$, das gleichmäßiger Grenzwert einer Funktionenfolge aus A ist und die Bedingungen $f_x(x) = f(x)$ sowie $\forall f_x(y) > f(y) - \epsilon$ erfüllt. Sei nämlich $y \in X$, dann gibt es $f_x^y \in A$ mit $f_x^y(x) = f(x)$ und $f_x^y(y) > f(y) - \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Stetigkeit von f und f_x^y gibt es eine in X offene Umgebung U_x^y von y mit $\forall z \in U_x^y : f_x^y(z) > f(z) - \epsilon$. Die $\{U_x^y \mid y \in X\}$ bilden dann eine offene Überdeckung von X; da X kompakt ist, können wir X bereits mit $\{U_x^y \mid y \in \{y_1, ..., y_m\}$ überdecken. Setze $f_x := \max\{f_x^y \mid y \in \{y_1, ..., y_m\}\}$, dann ist f_x gleichmäßiger Grenzwert einer Funktionenfolge aus A (und es gilt $f_x(x) = x$).

Letzter Streich: Wegen der Stetigkeit von f, f_x und $f_x(x) = x$ gibt es eine in X offene Umgebung U_x von x derart, dass $\forall y \in X : f_x(y) - \epsilon < f(y)$. Wiederum erhalten wir mir $\{U_x \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X und wegen der Kompaktheit daraus eine endliche Überdeckung $\{U_x \mid x \in \{x_1, ..., x_n\}\}$. Bezeichne g die Abbildung $\min\{f_x \mid x \in \{x_1, ..., x_n\}$, dann ist g gleichmäßiger Grenzwert einer Funktionenfolge aus A, also gilt nach Konstruktion $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ für alle $x \in X$. ∎

Anwendungen 4.3

(1) (Approximationssatz von Weierstraß) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. es gilt $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(2) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt; P die Menge der *multivariaten Polynome*, d.h. Polynome in mehreren Variablen. Dann ist P punktetrennend, denn zu $x, y \in K$ verschieden gibt es $k \in \{1, ..., n\}$ mit $x_k \neq y_k$: Betrachte z.B. $p(z_k) = z_k$, dann $p_k(x) = x_k \neq y_k = p_k(y)$.

Also gibt es zu jedem $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom p mit $\sup_{x\in K} |f(x) - p(x)| < \epsilon$. Damit liegen die Polynome dicht in $\mathfrak{C}^0(K,\mathbb{R})$.

(3) Komplexe Version: Sei V ein normierter Raum und $K \subseteq V$ kompakt und $P \subseteq \mathfrak{C}^0(K,\mathbb{C})$ mit $1 \in P$ eine punktetrennende Unteralgebra. Zusätzlich gelte $p \in P \Rightarrow \overline{p} \in P$. Dann liegt P dicht in $\mathfrak{C}^0(K,\mathbb{C})$.

Bemerkung 4.4

Der Approximationssatz von Weierstrass lässt sich auch direkt mit Hilfe von Bernstein-Polynomen zeigen, vgl. etwa `Gubisch, M.: Proseminar Analysis`.