4.4 Der Satz von Radon-Nikodym

Definition 4.2

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν zwei Maße auf X.

Dann heißt ν *absolut stetig* bzgl. μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), falls gilt:

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Bemerkung 4.3

Absolut stetige Maße lassen sich mittels *Dichten*, d.h. nicht negativer, messbarer Funktionen, ausdrücken:

Lemma 4.4

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ eine Dichte.

Dann wird ein bzgl. μ absolut stetiges Maß definiert durch

$$\nu(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis

(1) $\nu(A) \geq 0$, da $f \geq 0$.

(2) $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

(3) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge disjunkter, messbarer Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int\limits_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int f \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \\
&= \int f \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int \sum_{n\in\mathbb{N}} f \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f \mathbb{1}_{A_k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f \mathbb{1}_{A_k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f \mathbb{1}_{A_k} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

Also ist ν σ-additiv.

(4) Sei N eine μ-Nullmenge. Dann $\nu(N) = \int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0$, d.h. $\nu \ll \mu$. ■

Bemerkung 4.5

Zentrale Frage: Gilt auch die Umkehrung, d.h. kann zu einem Maß μ jedes bzgl. μ absolut stetige Maß durch eine Dichte dargestellt werden?

Eine Antwort darauf gibt der ...

Satz 4.6 (Radon-Nikodym)

Seien μ, ν zwei endliche Maße auf einem Messraum $(X, \mathcal{A})$ mit $\nu \ll \mu$. Dann gibt es eine Dichte $h : X \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A h \; \mathrm{d}\mu.$$

h ist bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt.

Beweis

(1) Wir betrachten den Hilbertraum $H := \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu + \nu)$. Dann ist

$$I : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int f \; \mathrm{d}\mu \end{array}$$

ein Funktional: I ist linear (da additiv und homogen) und

$$|I(f)| = |\int f \; \mathrm{d}\mu| \leq \int |f||1| \; \mathrm{d}\mu \leq \int |f||1| \; \mathrm{d}(\mu + \nu) = ||f1||_1 \overset{\text{Hölder}}{\leq} ||f||_2||1||_2 = ||f||_2,$$

also I beschränkt und damit stetig.

(2) Nach dem **Darstellungssatz von Riesz** gibt es dann ein $h_0 \in H$, so dass für alle $f \in H$ gilt:

$$I(f) = \langle h_0, f \rangle = \int h_0 f \; \mathrm{d}(\mu + \nu).$$

Also

$$I(f) = \int f \; \mathrm{d}\mu = \int h_0 f \; \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int f h_0 \; \mathrm{d}\mu + \int f h_0 \; \mathrm{d}\nu,$$

d.h.

$$\int f h_0 \; \mathrm{d}\nu = \int f(1 - h_0) \; \mathrm{d}\mu.$$

Setze $N := \{x \in X : h_0(x) \leq 0\}$, dann $(1 - h_0)|_N \geq 1$. Dann gilt:

$$0 \leq \mu(N) = \int \mathbb{1}_N \; \mathrm{d}\mu \leq \mathbb{1}_N(1 - h_0) \; \mathrm{d}\mu = \int \mathbb{1}_N h_0 \; \mathrm{d}\nu \leq 0,$$

also $\mu(N) = 0$ und damit $h_0(x) > 0$ μ-fast überall.

Wegen $\nu \ll \mu$ folgt dann $\nu(N) = 0$, d.h. für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\nu(A) = \int \mathbb{1}_A \; \mathrm{d}\nu \overset{h_0 > 0 \; \nu\text{-fast überall}}{=} \int \frac{1}{h_0} \mathbb{1}_A h_0 \; \mathrm{d}\nu = \int h_0 \mathbb{1}_A (1 - h_0) \; \mathrm{d}\mu = \int_A \frac{1}{h_0}(1 - h_0) \; \mathrm{d}\mu.$$

Setze $h := \frac{1}{h_0}(1 - h_0) = \frac{1 - h_0}{h_0}$.

(3) Noch zu zeigen: $h \geq 0$ μ-fast überall. Betrachte dazu $A := \{x \in X \mid h(x) < 0\}$. Dann gilt:

$$0 \leq \nu(A) = \int_A h \; \mathrm{d}\mu \leq 0,$$

also $\mu(A) = 0$. ■