5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (Begriffe zur Differenziation)

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ Berechnen Sie zur Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := x \sin(xy)$$

das totale Differenzial $f' = \mathrm{d}f$, die Jacobi-Matrix $\mathfrak{J}_f(x, y)$ und den Gradienten $(\nabla f)(x, y)$ in (x, y) sowie die Richtungsableitung $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(x, y)$ in Richtung $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{S}^1$.

Aufgabe 2 (partielle und totale Differenzierbarkeit)

Wir setzen die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad g(x, y) := \frac{(x - y)^3}{x^2 + y^2}; \qquad h(x, y) := \frac{(x - y)^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

im Nullpunkt durch 0 fort.

Berechnen Sie wo möglich im Punkt $(0, 0)$ die Ableitungen in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{S}^1$ und überprüfen Sie f auf totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 3 (Tangentialebenen)

Berechnen Sie die Tangentialebenen der durch

$$f(x, y) := 5 \exp(-x^2 - (y - 2)^2) + x^2 + (y - 2)^2$$

gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in den Punkten $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (-0,5; 1)$ und $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (0; 2)$.

Aufgabe 4 (Satz von Schwarz)

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad (x, y) \in \mathbb{R} \backslash (0, 0)$$

mit $f(0, 0) := 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, aber nicht zweimal stetig differenzierbar.

Aufgabe 5 („Gegenbeispiele“)

(1) Zeigen Sie, dass die im Nullpunkt durch 0 fortgesetzte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\})$$

im Ursprung unstetig, aber in alle Richtungen differenzierbar ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

auf allen Geraden durch $(0, 0)$ ein Minimum um Ursprung hat, obschon f dort kein lokales Minimum hat.

Aufgabe 6 (parameterabhängiges Optimierungsproblem)

Gegeben sei für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x^2 + y^2 - 1)^2 - cx \end{array}.$$

An welchen Punkten ist $\nabla f_c = 0$? Wo hat f_c sein globales Minimum?

Aufgabe 7 (lokale Extrema)

Finden Sie Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ folgenden Eigenschaften:

(a) f besitzt in (x, y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv definit.
(b) f besitzt in (x, y) einen Sattelpunkt und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist indefinit.
(c) f besitzt in (x, y) ein lokales, nicht isoliertes Minimum und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.
(d) f besitzt in (x, y) einen Sattelpunkt und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.
(e) f besitzt in (x, y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.

Aufgabe 8 (Kriterien für Extrema)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathfrak{C}^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche nicht? Bei welchen der Implikationen gilt die Umkehrung?

☐ Ist $f'(x) \neq 0$, dann hat f in x kein lokales Extremum. ☐
☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ negativ definit, dann besitzt f in x ein lokales Maximum. ☐

Gelte ab jetzt $f'(x) = 0$.

☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ positiv definit, dann hat f in x ein lokales Extremum. ☐
☐ Hat f in x ein isoliertes, lokales Extremum, dann ist $\mathfrak{H}_f(x)$ positiv oder negativ definit. ☐
☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ echt semidefinit, so kann f in x ein isoliertes, lokales Extremum haben.
☐ Hat f in x ein isoliertes, lokales Extremum, dann kann $\mathfrak{H}_f(x)$ echt semidefinit sein.
☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ indefinit, so kann f in x ein nicht isoliertes, lokales Minimum haben.
☐ Hat f in x ein lokales, isoliertes Minimum, dann kann $\mathfrak{H}_f(x)$ positiv semidefinit sein.
☐ Hat f in x einen Sattelpunkt, dann ist $\mathfrak{H}_f(x)$ indefinit. ☐
☐ Hat f in x ein lokales Minimum, so ist $\mathfrak{H}_f(x)$ negativ semidefinit. ☐

Aufgabe 9 (Optimierung mit Nebenbedingungen)

Eine kreisförmige Platte

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$

trage die Temperaturverteilung

$$T : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy + 1. \end{array}$$

Gesucht sind die Stellen höchster bzw. niedrigster Temperatur.

Aufgabe 10 (Geometrische Optimierung)

Seien a, b, c, d Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $b, d \neq 0$. Wir definieren zwei Geraden

$$\begin{aligned} x(s) &:= a + sb; \\ y(t) &:= c + td; \end{aligned}$$

wobei s, t Parameter aus $\mathbb{R}$. Gesucht sind die globalen Extremstellen der Abstandsfunktion

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (s, t) & \mapsto & ||x(s) - y(t)||_2^2 \end{array}.$$

Aufgabe 11 (Berechnung von Kurvenlängen)

Berechnen Sie die Längen der folgenden Kurven:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &:= \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \beta(t) &:= \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}, & -1 \leq t \leq 1 \\ \gamma(t) &:= \begin{pmatrix} t^2 \cos(t) \\ t^2 \sin(t) \\ t^3/3 \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \delta(t) &:= \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 12 (Wahrscheinlichkeitsdichte)

Berechnen Sie mittels Transformationsformel das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 13 (Berechnung eines Rotationskörpers)

Berechnen Sie das Volumen des Kegels

$$A := \left\{ (r, \varphi, h) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \left[0, \frac{hR}{H}\right], \varphi \in [0, 2\pi], h \in [0, H] \right\}.$$

Aufgabe 14 (Satz über implizite Funktionen)

In welchen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 0 \\ y^2 - z^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

lokal auflösbar?

Zeigen Sie, dass das System bei $(1, 1, 1)$ lokal nach (y, z) aufgelöst werden kann und bestimmen Sie die Ableitung der Auflösungsfunktion $(y(x), z(x))$ durch implizites Differenzieren.