Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 8

1. Aufgabe (8 Punkte):
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen
(i) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) := (2y + x^2)\exp(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4})$,
(ii) $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2yz - 6x + 2z - 35$.
Untersuchen Sie, welche der kritischen Punkte lokale oder globale Minima oder Maxima sind.

2. Aufgabe (2 Punkte):
Es sei $\phi(x,y) = (x^3 - xy^2, x^2y - y^3)$ für $x,y \in \mathbb{R}$. Man finde die Menge M aller $p = (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ für die es offene Mengen U, $V \subset \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $p \in U$, $\phi(p) \in V$ und $\phi : U \mapsto V$ bijektiv ist und eine stetige differenzierbare Umkehrfunktion besitzt.

3. Aufgabe (2 Punkte):
Es seien $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in \mathrm{C}^1(X;\mathbb{R}^m)$. Man zeige
(i) Gilt $f'(x) \in \mathcal{L}is(\mathbb{R}^m)$ für $x \in \mathbb{R}^m$, so besitzt $g(x) := |f(x)|$ in X kein Maximum.
(ii) Gelten $f'(x) \in \mathcal{L}is(\mathbb{R}^m)$ und $f(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}^m$, so besitzt $g(x) := |f(x)|$ kein Minimum.
Setze: $\mathcal{L}is(E,F) := \{L \in \mathcal{L}(E,F) : L \text{ ist Isomorphismus zwischen } E \text{ und } F\}$, $\mathcal{L}is(E) := \mathcal{L}is(E,E)$.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in \mathrm{C}^1(X;\mathbb{R}^m)$. Ferner gebe es ein $\alpha > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \geq \alpha|x - y|, \quad x,y \in X.$$

Man zeige: $Y := f(X)$ ist offen in $\mathbb{R}^m$ und $f \in \mathrm{Diff}^1(X;Y)$. Für den Fall $X = \mathbb{R}^m$ gilt $Y = \mathbb{R}^m$. (Hierbei wurde gesetzt: $\mathrm{Diff}^k(X;Y) := \{f : X \mapsto Y; f \text{ ist ein } C^k-$ Diffeomorphismus$\}$, d.h. für $X \subset E$ offen und $Y \subset F$ offen sowie $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ nennen wir $f \in \mathrm{C}^k(X;Y)$ einen C^k-Diffeomorphismus von X auf Y, falls zusätzlich f bijektiv ist und $f^{-1} \in \mathrm{C}^k(Y;E)$.)

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 22.06.09., 12.00 Uhr.