Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 9

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $f \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ und $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$, und eine der Voraussetzungen

(a) f^{-1} und g sind Lipschitz-stetig (global),

(b) g verschwindet außerhalb einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, d.h. die Menge $\operatorname{supp} g := \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\}$ ist beschränkt,

sei erfüllt. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $f + \varepsilon g \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ für $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, d.h. Diff^1 ist stabil bzgl. kleiner Störungen mit obigen Eigenschaften. Hinweis: Man betrachte die Funktion $h := I + f^{-1} \circ (\varepsilon g)$.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Für welche der Punkte $(x, y) = (-4, 1)$, $(-2, -2)$, $(6, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ läßt sich die Gleichung

$$x^2 - 2xy + 4y^3 = 28$$

in einem Interval um x eindeutig und stetig differenzierbar nach y auflösen?

3. Aufgabe (4 Punkte):
Bestimmen Sie das größtmöglichste Volumen eines achsenparallelen Quaders, der dem Ellipsoid

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

einbeschrieben ist. Hinweis: Jeder achsenparallel einbeschriebene Quader hat genau eine Ecke $(x, y, z) \in E$, die im nichtnegativen Oktanten liegt, und deshalb kann die Zielfunktion (Volumen des Quaders) auf $V_{Quader} = 8xyz$, $\forall x, y, z \geq 0$, reduziert werden.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Die affine Ebene $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 2y + 4z = 6\}$ schneidet den Kegel $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 2x^2 + y^2\}$ längs einer Kurve K. Welcher Punkt auf K hat den geringsten Abstand zum Nullpunkt und welcher den größten Abstand?

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 29.06.09., 12.00 Uhr.