Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 11

1. Aufgabe (6 Punkte):
Beweisen Sie:

(i) den Satz 8.5 aus der Vorlesung.

(ii) **Satz:** Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und (Jordan)meßbare Menge. Die Funktion $f : \overline{G} \mapsto \mathbb{R}^n$ sei lipschitzstetig und $f \in C^1(G;\mathbb{R}^n)$; ferner sei $det(f'(x)) \neq 0$ in G. Dann ist die Menge $f(G)$ offen und meßbar, und es ist $\overline{f(G)} = f(\overline{G})$, $\partial f(G) \subset f(\partial G)$; ist f injektiv, so gilt $\partial f(G) = f(\partial G)$.
Anleitung: Benutzen Sie den Satz von der lokalen Umkehrbarkeit und das folgende Lemma (ohne Beweis): Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f : M \mapsto \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig, so gilt: aus $|M| = 0$ folgt, dass auch $|f(M)| = 0$ ist.

2. Aufgabe (2 Punkte):
Zeigen Sie: Es sei f über B integrierbar und $m \leq f \leq M$ auf B. Dann gilt $m \int_B p(x)\, d\mu \leq \int_B p(x)f(x)\, d\mu \leq M \int_B p(x)\, d\mu$ für alle $p \in R_n$ mit $p \geq 0$ auf B.

3. Aufgabe (6 Punkte):
1. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_Q 2z(x+y)^{-2}\, dxdydz$, $Q := [1,2] \times [2,4] \times [0,2]$;

(b) $\int_A x + 2y^2\, dxdy$, wobei A das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,-1)$ ist;

(c) $\int_A x\sqrt{y}\, dxdy$, wobei die Fläche $A \subset [0,2] \times [0,2]$ von der Geraden $y = x$ und von der Parabel $y = x^2/2$ begrenzt wird;

(d) $\int_A |x| + 3|y|\, dxdy$, wobei A die Kreisscheibe um 0 mit dem Radius 1 ist.

2. Vertauschen Sie in den folgenden iterierten Integralen die Integrationsreihenfolge (die Aufgabe besteht darin die Integrationsgrenzen richtig zu transformieren):

$$(e) \quad \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} g(x,y)\, dydx, \qquad (f) \quad \int_0^1 \int_{2x}^{3x} g(x,y)\, dydx.$$

Hinweis: Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

4. Aufgabe (2 Punkte):
Zeigen Sie: A und B meßbar $\Rightarrow A \cup B$, $A \cap B$ und $A \backslash B$ meßbar.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 13.07.09., 12.00 Uhr.